

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.1.4](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.1.4)
УДК 539.3

СМЕЩЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМ ПОКРЫТИЕМ И КРУГОВЫМ ЭЛЕКТРОДОМ НА ПОВЕРХНОСТИ

С.С. Волков, А.С. Васильев, С.М. Айзикович

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Предложена математическая модель деформирования функционально-градиентного материала вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта. Основу модели составляют уравнения, которые отвечают осесимметричной задаче электроупругости для полупространства с функционально-градиентным покрытием. Покрытие считается идеально сцепленным с подложкой. Разность потенциалов создается путем их приложения к круговой области на поверхности покрытия (к электроду, толщина и свойства которого во внимание не принимаются) и к бесконечно удаленной границе подложки. Рассмотрены произвольные, не зависящие друг от друга гладкие законы изменения электроупругих модулей по глубине покрытия. Использован двухсторонний асимптотический метод, который позволил представить решение моделируемой задачи в приближенном аналитическом виде, эффективном для покрытия любой толщины. Получены содержащие конечные квадратуры выражения для распределения смещений и электрического потенциала на поверхности покрытия как в области электрода, так и вне него. Проведены численные расчеты распределения радиальных и нормальных смещений, а также электрического потенциала для двух характерных законов изменения свойств по глубине покрытия в широком диапазоне значений его относительной толщины. Показана сходимость авторских результатов, вычисленных при малых и больших значениях относительной толщины покрытия, к классическим, известным для полупространства без покрытия. Особое внимание уделено сравнению в случае однородного полупространства без покрытия. Показано, что наибольшее изменение электромеханических характеристик для полупространства с покрытием наблюдается вблизи границы электрода. Особенно это заметно для покрытий малой и средней (по сравнению с размером электрода) толщины.

Ключевые слова: электроупругость, контактные задачи, пьезоэлектричество, покрытие, функционально-градиентные материалы, электрод

DISPLACEMENTS OF THE SURFACE OF A PIEZOELECTRIC HALF-SPACE WITH FUNCTIONALLY-GRADED COATING AND CIRCLE ELECTRODE ON THE SURFACE

S.S. Volkov, A.S. Vasiliev and S.M. Aizikovich

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

A mathematical model describing the deformation of a material caused by the reverse piezoelectric effect is proposed. The model is based on an axisymmetric problem of electroelasticity for a half-space with a functionally-graded coating. An electric potential difference is applied across a circle area on the surface (an electrode whose thickness and elastic properties are neglected) and an infinity boundary of the half-space. Arbitrary independent variation of all electroelastic properties in depth of the coating is considered. The coating is assumed to be perfectly bonded to the substrate. The problem is solved using the bilateral asymptotic method in an approximated analytical form effective for any value of the relative thickness of the coating. Approximated analytical expressions containing finite quadratures are obtained for the distribution of radial and normal displacements and electric potential on the surface under the electrode and outside of it. Numerical calculations are provided for the distribution of radial and normal displacements and electric potential for two typical examples of functionally-graded coatings in a wide range of relative thickness values of the coating. Convergence of the results to those for a homogeneous non-coated half-space is obtained for small and large values of the relative coating thickness. Special attention is paid to the comparison of the results with those for a non-coated half-space. The redistribution of the electromechanical characteristics caused by the presence of the coating is most noticeably observed near the boundary of the electrode especially for thin and intermediate thickness coatings (in comparison with the size of the electrode).

Key words: electroelasticity, contact problems, piezoelectricity, coating, functionally-graded material, electrode

1. Введение

Пьезоэлектрические материалы находят широкое распространение всюду: в современной электронике, промышленности, в быту. Из них создаются различного рода датчики, пьезогенераторы, акустические излучатели и другие приборы [1–4]. Задачам деформирования пьезоэлектрических материалов посвящено большое количество современных исследований. В точном аналитическом виде получены решения модельных контактных задач о вдавлении проводящего и изолированного штампа [5–8] с учетом касательной нагрузки [7] и сил трения [8], в том числе с учетом пьезомагнетизма [9, 10] и общей симметрии класса 6 [11]. Кроме того, на практике широко применяются функционально-градиентные материалы (ФГМ) — композитные материалы, свойства которых непрерывно изменяются по одному из направлений. Такие материалы активно используются в качестве теплозащитных [12], для снижения риска отслаивания [13], улучшения биосовместимости [14] и долговечности импланта [15] и другого.

Построение решений контактных задач для тел с ФГМ покрытиями сопряжено с серьезными математическими трудностями. Возникающие при этом сингулярные интегральные уравнения не удается разрешить в точном аналитическом виде. В подавляющем большинстве современных работ [16–21] сингулярные интегральные уравнения решаются численно методом коллокации. Таким способом решены задачи о вдавливании проводящего штампа в электроупругое [16] и электромагнитоупругое [17] тела с ФГМ покрытием, в том числе с учетом трения [12] и термофрикционного разогрева [20], задача кручения с учетом термофрикционного разогрева [21]. В ряде работ рассматриваются лишь однородные пьезоэлектрические покрытия [22–25]. Аналитических решений контактных задач для пьезоэлектрических тел с ФГМ покрытиями известно немного. В частности, авторами данной работы получены приближенные аналитические решения контактной задачи о вдавливании проводящего штампа с плоским основанием [26] и сферической формы [27] без учета сил трения. Парные интегральные уравнения и их системы решаются с использованием двухстороннего аналитического метода [28]. Его достоинство состоит в том, что он позволяет учитывать произвольное гладкое изменение свойств по глубине покрытия; решения задач являются двухсторонне асимптотически точными для больших и малых значений характерного геометрического параметра задачи.

Данная статья посвящена новой задаче — задаче деформирования пьезоэлектрического полупространства с ФГМ покрытием под воздействием разности потенциалов, приложенных к круговому электроду на поверхности покрытия и к удаленной границе подложки. В таком случае становится возможным анализ деформации, вызванной только обратным пьезоэлектрическим эффектом в отсутствие внешних механических нагрузок. Ранее подобные задачи обсуждались только в плоской постановке [29, 30].

2. Постановка задачи

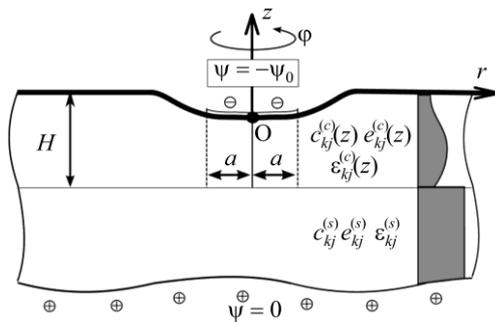


Рис. 1. Схема задачи

Рассмотрим пьезоэлектрическое трансверсально-изотропное полупространство (см. Рис. 1) с функционально-градиентным пьезоэлектрическим покрытием толщиной H . Введем цилиндрическую систему координат $O r \varphi z$ так, что ось Oz нормальна к поверхности покрытия и совпадает с осью симметрии пьезоэлектрического ФГМ. В этом случае соблюдается осевая симметрия (отсутствует зависимость характеристик от угловой координаты φ), поэтому уравнения равновесия и уравнения электростатики имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \\ \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{\partial D_z}{\partial z} + \frac{D_r}{r} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Для линейной электроупругости справедливы определяющие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_r = c_{11} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{12} \frac{u}{r} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \sigma_\varphi = c_{12} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{11} \frac{u}{r} + c_{13} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{31} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \sigma_z = c_{13} \frac{\partial u}{\partial r} + c_{13} \frac{u}{r} + c_{33} \frac{\partial w}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \tau_{rz} = c_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + e_{15} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ D_r = e_{15} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad D_z = e_{31} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + e_{33} \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_{33} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$ — компоненты тензора напряжений; D_r, D_z — компоненты вектора электрической индукции; u и w — радиальные и нормальные смещения; ψ — электрический потенциал; $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ — упругие модули; e_{31}, e_{15}, e_{33} — пьезоэлектрические модули; $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ — диэлектрические проницаемости.

Пусть на поверхности покрытия $z=0$ расположен круговой электрод с радиусом a и центром, совпадающим с началом координат. Электрод достаточно тонкий, такой, что можно пренебречь его толщиной и свойствами. Вне электрода поверхность покрытия электрически изолирована. Тогда выполняются следующие смешанные граничные условия:

$$z = 0: \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \begin{cases} D_z = 0, & r > a, \\ \Psi = -\Psi_0, & r \leq a. \end{cases} \quad (3)$$

Считаем, что смещения и электрический потенциал затухают на бесконечности: $u, w, T, \Psi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

Упругие модули $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$, пьезоэлектрические модули e_{31}, e_{15}, e_{33} и диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ полупространства изменяются с его глубиной по следующим законам:

$$f_{kj} = \begin{cases} f_{kj}^{(c)}(z), & -H \leq z \leq 0, \\ f_{kj}^{(s)} = \text{const}, & -\infty < z < -H, \end{cases} \quad (4)$$

где $f_{kj}^{(c)}(z)$ — непрерывно дифференцируемые или кусочно-постоянные функции, описывающие изменение свойств по глубине покрытия, $f_{kj}^{(s)}$ — некоторые постоянные, описывающие электроупругие свойства однородной полубесконечной подложки. Здесь и далее индексами (c) и (s) обозначены характеристики, соответствующие покрытию и подложке.

На границе покрытие–подложка выполняются условия непрерывности электромеханических характеристик:

$$z = -H: \quad w^{(c)} = w^{(s)}, \quad u^{(c)} = u^{(s)}, \quad \Psi^{(c)} = \Psi^{(s)}, \quad \sigma_z^{(c)} = \sigma_z^{(s)}, \quad \tau_{zr}^{(c)} = \tau_{zr}^{(s)}, \quad D_z^{(c)} = D_z^{(s)}. \quad (5)$$

Необходимо определить электрическую индукцию под электродом:

$$z = 0: \quad D_z|_{z=0} = -q_a(r), \quad r \leq a, \quad (6)$$

и распределение смещений и потенциала на поверхности покрытия.

3. Построение решения задачи

Представим смещения и электрический потенциал в виде интегрального преобразования Ханкеля [31]:

$$\begin{aligned} \{w, \Psi\}(z, r) &= \int_0^\infty \{\bar{w}, \bar{\Psi}\}(z, \alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha, \\ u(z, r) &= -\int_0^\infty \bar{u}(z, \alpha) J_1(\alpha r) \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Образы Ханкеля для перемещений и электрического потенциала на поверхности покрытия запишем следующим образом:

$$\{\bar{u}, \bar{w}, \bar{\Psi}\}(\alpha, 0) = -\left\{ \frac{L_{11}(\alpha)}{E_{11}^{(c)}}, \frac{L_{13}(\alpha)}{E_{13}^{(c)}}, \frac{L_{15}(\alpha)}{E_{15}^{(c)}} \right\} \frac{\bar{q}_a(\alpha)}{\alpha}, \quad (8)$$

где $E_{ij}^{(c)}$ — эффективные электроупругие модули поверхности покрытия ($z=0$) [5, 32], $\bar{q}_a(\alpha)$ — образ Ханкеля электрической индукции на поверхности покрытия, $L_{ij}(\alpha)$ — функции податливости, определяющие решение задачи в пространстве образов Ханкеля. Для кусочно-однородного покрытия построение функций податливости можно свести к решению системы линейных алгебраических уравнений [25]. Для произвольного закона изменения свойств по глубине покрытия схема численного построения функций податливости описана ранее для более общего случая электромагнитоупругого полупространства [33]. Индексы ij не имеют прямой связи с индексами упругих модулей, пьезомодулей и т.п. Эти обозначения естественным образом вытекают в процессе построения функций податливости [25, 26].

Действуя по аналогии со случаем решения контактных задач в упругой постановке [31, 34], получим парное интегральное уравнение задачи:

$$\int_0^{\infty} \frac{L_{15}(\alpha\lambda)}{E_{15}^{(c)}} \bar{q}(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = \frac{\Psi_0}{a}, \quad r \leq 1, \quad (9)$$

$$\int_0^{\infty} \bar{q}(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha = 0, \quad r > 1.$$

Здесь сделана следующая замена переменных (штрихи опущены):

$$r' = r/a, \quad \lambda = H/a, \quad q(r') = q_a(r'a), \quad L'_{kj}(\alpha) = L_{kj}(\alpha/H), \quad \alpha' = \alpha a. \quad (10)$$

Следует отметить, что контактная задача вдавливания кругового штампа с плоским основанием в упругое полупространство с покрытием описывается идентичным (9) парным интегральным уравнением. Для его решения воспользуемся двухсторонним асимптотическим методом [28]. Для этого аппроксимируем функции податливости следующими выражениями:

$$L_{ij}(\lambda\alpha) \approx \Pi_{ij}^{\pm}(\lambda\alpha), \quad \Pi_{ij}^{\pm}(\lambda\alpha) = \prod_{n=1}^{N_{ij}} \frac{(A_{ijn}^2 \pm \lambda^2 \alpha^2)}{(B_{ijn}^2 \pm \lambda^2 \alpha^2)}. \quad (11)$$

В этом случае приближенное парное интегральное уравнение можно решить в замкнутом аналитическом виде:

$$\bar{q}(\alpha) = \frac{2E_{15}^{(s)}\Psi_0}{\pi a} \bar{q}_0(\alpha), \quad \bar{q}_0(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \sum_{i=1}^{N_{15i}} C_{15i} \frac{\alpha \sin \alpha \operatorname{ch}(A_{15i}\lambda^{-1}) + A_{15i}\lambda^{-1} \cos \alpha \operatorname{sh}(A_{15i}\lambda^{-1})}{\alpha^2 + A_{15i}^2\lambda^{-2}}, \quad (12)$$

где $E_{ij}^{(s)}$ — эффективные электроупругие модули подложки. Неизвестные постоянные C_{15i} ($i=1, \dots, N$) определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N_{15i}} C_{15i} \frac{A_{15i} \operatorname{sh}(A_{15i}\lambda^{-1}) + B_{15n} \operatorname{ch}(A_{15i}\lambda^{-1})}{(A_{15i}^2 - B_{15n}^2)} = \frac{1}{B_{15n}} \quad (n=1, \dots, N). \quad (13)$$

После обращения преобразования Ханкеля в (12) приходим к приближенному выражению для электрической индукции на электроде:

$$q(r) = \frac{2E_{15}^{(s)}\Psi_0}{\pi a} \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_{15i} \left(\frac{\operatorname{ch}(A_{15i}\lambda^{-1})}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{A_{15i}}{\lambda} \int_r^1 \frac{\operatorname{sh}(A_{15i}\lambda^{-1})}{\sqrt{t^2-r^2}} dt \right) \right]. \quad (14)$$

Найденное решение (14) является асимптотически точным для $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$ [28]. Погрешность решений для средних значений λ зависит напрямую от погрешности аппроксимации функций податливости (11). Ранее при решении аналогичных задач установлено, что эти величины имеют один порядок малости [35] и показано, что изменение погрешности аппроксимации на величину x приводит к изменению распределения контактных давлений и других характеристик задачи на величину $O(x)$.

Подставляя (8) в (7), получим выражения для смещений и электрического потенциала в виде квадратур:

$$w(z, r) = -\frac{2E_{15}^{(s)}\Psi_0}{\pi E_{13}^{(c)}} \int_0^{\infty} L_{13}(\alpha\lambda) \bar{q}_0(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$\psi(z, r) = -\frac{2E_{15}^{(s)}\Psi_0}{\pi E_{15}^{(c)}} \int_0^{\infty} L_{15}(\alpha\lambda) \bar{q}_0(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad (15)$$

$$u(z, r) = \frac{2E_{15}^{(s)}\Psi_0}{\pi E_{11}^{(c)}} \int_0^{\infty} L_{11}(\alpha\lambda) \bar{q}_0(\alpha) J_1(\alpha r) d\alpha.$$

Введем безразмерные величины:

$$u_s(r) = \frac{E_{11}^{(s)}}{\Psi_0 E_{15}^{(s)}} u(r, 0), \quad w_s(r) = -\frac{E_{13}^{(s)}}{\Psi_0 E_{15}^{(s)}} w(r, 0), \quad \psi_s(r) = -\frac{\Psi_s(r, 0)}{\Psi_0}, \quad \beta_{ij} = \frac{E_{ij}^{(s)}}{E_{ij}^{(c)}}. \quad (16)$$

Используя аппроксимации (11) для функций податливости и вычисляя квадратуры, получим выражения для безразмерных смещений и электрического потенциала в виде:

$$\begin{aligned} w_s(r) &= w_{\text{hom}}(r) + \beta_{13} w_{\text{inh}}(r), \quad u_s(r) = \frac{2}{\pi} (u_{\text{hom}}(r) + \beta_{11} u_{\text{inh}}(r)), \\ \psi_s(r) &= \psi_{\text{hom}}(r) + \beta_{15} \psi_{\text{inh}}(r). \end{aligned} \quad (17)$$

Слагаемые с индексом hom описывают решение аналогичной задачи для однородного полупространства без покрытия:

$$u_{\text{hom}}(r) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & r > 1 \\ \frac{r}{1 + \sqrt{1 - r^2}}, & r < 1, \end{cases} \quad w_{\text{hom}}(r) = \psi_{\text{hom}}(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r \leq 1, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{1}{r}\right), & r > 1. \end{cases} \quad (18)$$

Слагаемые с индексом inh — это дополнительный вклад в рассматриваемые характеристики при наличии покрытия:

$$\begin{aligned} w_{\text{inh}}(r) &= \sum_{n=1}^{N_{13}} P_{13n} I_{12}\left(\frac{B_{13n}}{\lambda}, r\right) + \sum_{n=1}^{N_{13}} F_{13n} I_{11}\left(\frac{B_{13n}}{\lambda}, r\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_{15}} C_{15i} \Pi_{13}^-(A_{15i}) \left(\text{ch}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}\right) I_{11}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}, r\right) + \frac{A_{15i}}{\lambda} \text{sh}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}\right) I_{12}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}, r\right) \right), \\ u_{\text{inh}}(r) &= \sum_{n=1}^{N_{11}} P_{11n} I_{22}\left(\frac{B_{11n}}{\lambda}, r\right) + \sum_{n=1}^{N_{11}} F_{11n} I_{21}\left(\frac{B_{11n}}{\lambda}, r\right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_{15}} C_{15i} \Pi_{11}^-(A_{15i}) \left(\text{ch}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}\right) I_{21}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}, r\right) + \frac{A_{15i}}{\lambda} \text{sh}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}\right) I_{22}\left(\frac{A_{15i}}{\lambda}, r\right) \right). \end{aligned}$$

Функция ψ_{inh} может быть получена из w_{inh} заменой индекса 13 на 15. Легко убедиться в выполнении граничного условия $\psi = -\psi_0$ при $r \leq 1$. Выше использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I_{11}(A, r) &= \begin{cases} e^{-A} I_0(Ar), & 0 < r \leq 1, \\ e^{-A} I_0(Ar) - \frac{2}{\pi} \int_1^r \frac{\text{ch}(A(t-1)) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}}, & r > 1, \end{cases} \\ I_{12}(A, r) &= \begin{cases} \frac{1}{A} e^{-A} I_0(Ar), & 0 < r \leq 1, \\ \frac{1}{A} \left(e^{-A} I_0(Ar) - \frac{2}{\pi} \int_1^r \frac{\text{sh}(A(t-1))}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right), & r > 1, \end{cases} \\ I_{21}(r, B) &= \begin{cases} \text{sh}(B) K_1(Br), & r > 1 \\ \text{sh}(B) K_1(Br) - \frac{1}{r} \int_r^1 \frac{t \text{ch}(B(1-t))}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt, & r < 1 \end{cases} \\ I_{22}(r, B) &= \begin{cases} \frac{1}{B^2} \left(\frac{1}{r} - B \text{ch}(B) K_1(Br) \right) + \frac{1}{Br} \int_r^1 \frac{t \text{sh}(B(1-t))}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & r < 1, \\ \frac{1}{B^2} \left(\frac{1}{r} - B \text{ch}(B) K_1(Br) \right), & r > 1, \end{cases} \\ P_{ijn} &= \frac{\Pi_{ijn}(B_{ijn})}{\lambda} \sum_{k=1}^{N_{15}} C_{15k} \frac{A_{15k} \text{sh}(A_{15k} \lambda^{-1})}{A_{15k}^2 - B_{ijn}^2}, \quad F_{ijn} = \Pi_{ijn}(B_{ijn}) \left(\sum_{k=1}^{N_{15}} C_{15k} \frac{\text{ch}(A_{15k} \lambda^{-1})}{A_{15k}^2 - B_{ijn}^2} - \frac{1}{B_{ijn}^2} \right), \\ \Pi_{ijn}(\alpha) &= (A_{ijn}^2 - B_{ijn}^2) \prod_{m=1, m \neq n}^{N_j} \frac{A_{ijm}^2 - \alpha^2}{B_{ijm}^2 - \alpha^2}. \end{aligned}$$

4. Численные результаты

Проиллюстрируем описанные выше результаты примерами. Для этого рассмотрим пьезокерамический материал PZT-4 [5] со свойствами: $\epsilon_{11} = 64,61 \cdot 10^{-10}$ Ф/м, $\epsilon_{33} = 56,2 \cdot 10^{-10}$ Ф/м, $c_{11} = 139$ ГПа, $c_{13} = 74,3$ ГПа, $c_{33} = 115$ ГПа, $c_{44} = 25,6$ ГПа, $e_{15} = 25,7$ Кл/м², $e_{31} = -5,2$ Кл/м², $e_{33} = 15,1$ Кл/м² и два функционально-градиентных покрытия, свойства которых изменяются с глубиной по следующим законам:

$$\{c_{jk}, e_{jk}, \epsilon_{jk}\}(z) = \{c_{jk}^{(c)}, e_{jk}^{(c)}, \epsilon_{jk}^{(c)}\} \times \begin{cases} \exp(-kz/H), & -H \leq z \leq 0, \\ \exp(kz), & -\infty \leq z \leq -H. \end{cases}$$

Здесь значения $c_{jk}^{(c)}$, $e_{jk}^{(c)}$, $\epsilon_{jk}^{(c)}$ соответствуют PZT-4.

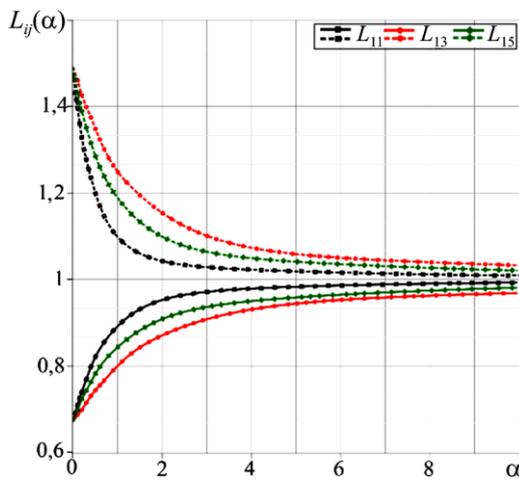


Рис. 2. Функции податливости $L_{11}(\alpha)$, $L_{13}(\alpha)$, $L_{15}(\alpha)$; пунктирные линии соответствуют случаю $k = -0,4$, сплошные – $k = 0,4$

Аналогично работе [16] возьмем значение параметра k , равное 0,4; в этом случае абсолютные значения свойств покрытия увеличиваются с его глубиной (покрытие типа I). Для полноты картины рассмотрим также покрытие, свойства которого уменьшаются с глубиной с тем же показателем, то есть с $k = -0,4$ (покрытие типа II). На рисунке 2 изображены графики функций податливости $L_{11}(\alpha)$, $L_{13}(\alpha)$, $L_{15}(\alpha)$. При численных расчетах использованы их аппроксимации с погрешностью, не превышающей 0,5%.

Анализ влияния типа покрытия на изменение электромеханических характеристик на поверхности покрытия удобно проводить при относительных величинах:

$$u_{rel}(r) = \frac{u_s(r)}{u_{hom}(r)}, \quad w_{rel}(r) = \frac{w_s(r)}{w_{hom}(r)}, \quad \psi_{rel}(r) = \frac{\psi_s(r)}{\psi_{hom}(r)}.$$

Далее на рисунках для значений характерного геометрического параметра λ от 0,01 до 50 изображены графики распределения относительных радиальных смещений — u_{rel} (Рис. 3, 4), нормальных смещений на поверхности покрытия (как на электроде, так и вне него) — w_{rel} (Рис. 5, 6), электрического потенциала вне электрода — ψ_{rel} (Рис. 7). На рисунках видно, что результаты вычислений для малых и больших λ сходятся к данным, соответствующим однородному полупространству без покрытия (относительные величины стремятся к 1). Для тонких покрытий сходимость проявляет неравномерный характер, так как для любого малого значения λ наблюдается узкая область в окрестности $r = 1$, где

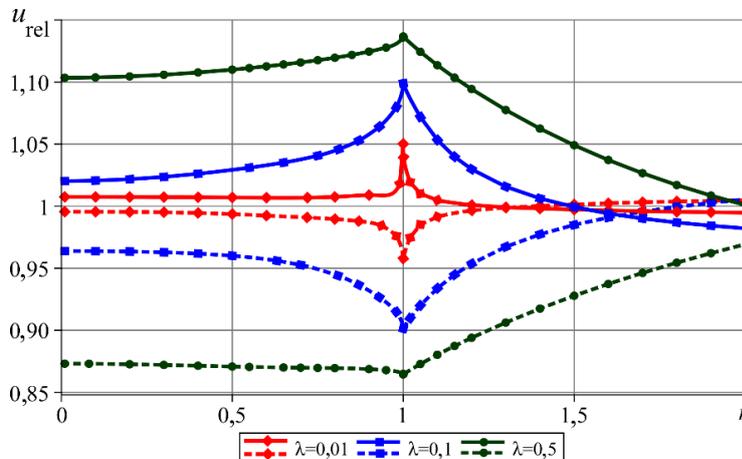


Рис. 3. Относительные радиальные смещения u_{rel} при малых и средних значениях λ под электродом и вне него; пунктирные линии соответствуют случаю $k = -0,4$, сплошные – $k = 0,4$

относительная величина существенно отличается от 1. Чем меньше значение λ , тем эта область уже, и тем острее пик на графике. Заметнее всего смещения и электрический потенциал отличаются от таких же параметров для полупространства без покрытия в случае средних значений λ (см. кривые, отвечающие $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 1$).

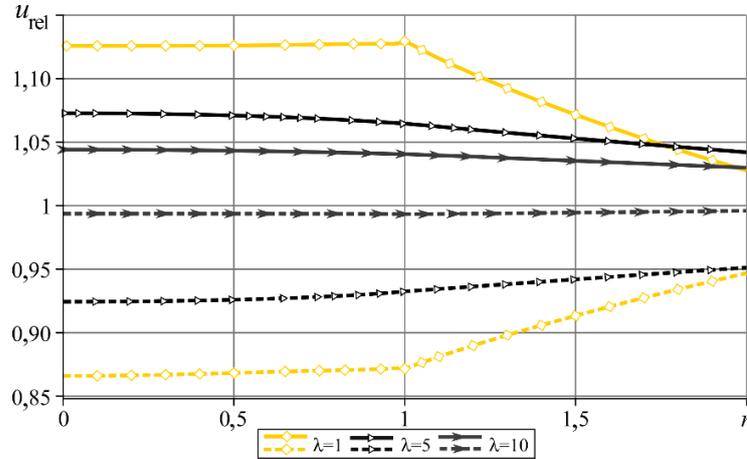


Рис. 4. Относительные радиальные смещения u_{rel} при средних и больших значениях λ под электродом и вне него; пунктирные линии – $k = -0,4$, сплошные – $k = 0,4$

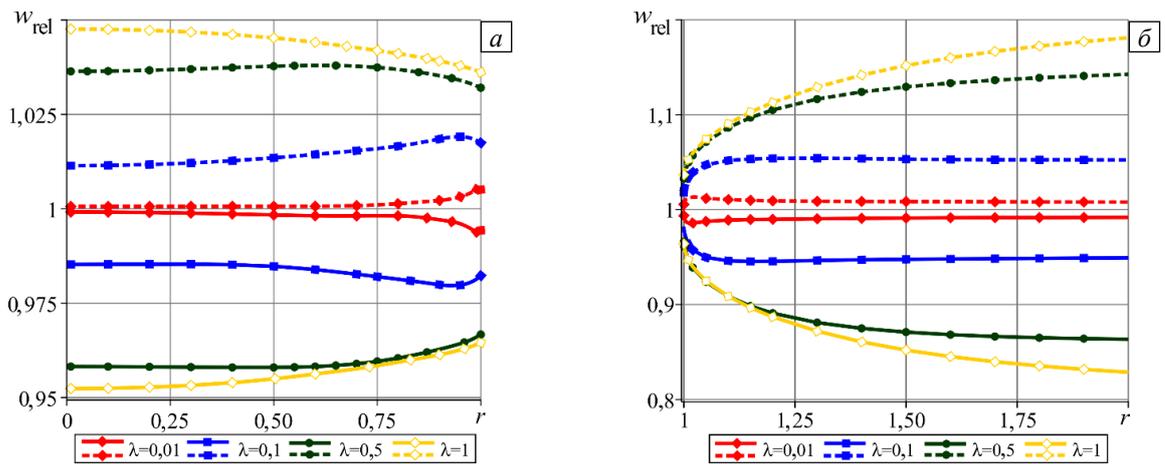


Рис. 5. Относительные нормальные смещения w_{rel} при малых и средних значениях λ под электродом (а) и вне него (б); пунктирные линии соответствуют $k = -0,4$, сплошные – $k = 0,4$

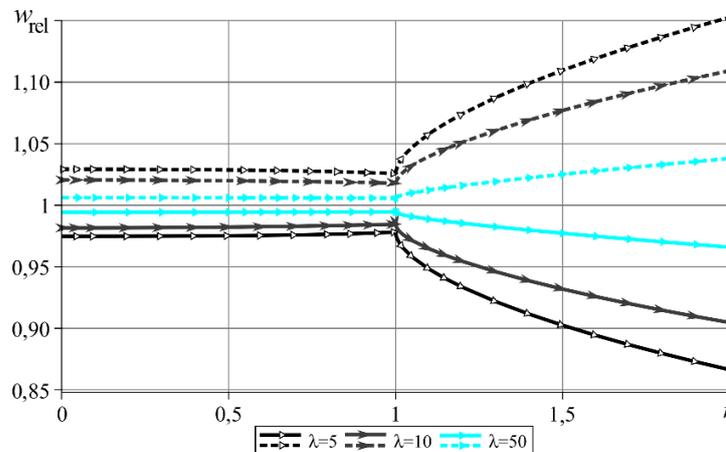


Рис. 6. Относительные нормальные смещения w_{rel} при больших значениях λ под электродом и вне него; пунктирные линии соответствуют $k = -0,4$, сплошные – $k = 0,4$

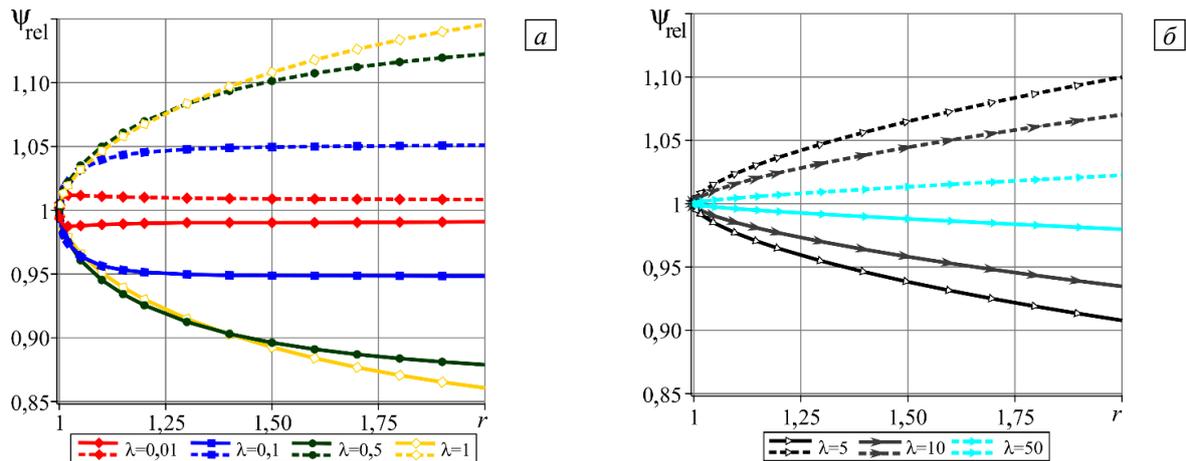


Рис. 7. Относительный электрический потенциал ψ_{rel} при малых, средних (а) и больших (б) значениях λ вне электрода; пунктирные линии соответствуют $k = -0,4$, сплошные – $k = 0,4$

Следует отметить, что скорость сходимости у рассмотренных характеристик разная. Наиболее наглядно это демонстрируют касательные смещения при больших значениях λ : график на рисунке 4, соответствующий $\lambda = 10$ и $k = -0,4$, значительно ближе к 1, чем при $\lambda = 10$ и $k = 0,4$. Для однородного полупространства без покрытия вертикальные смещения под электродом постоянны, см. формулу (18), в то время как для тела с покрытием ситуация совсем иная. Наличие покрытия влияет на изменение вертикальных смещений вне электрода в большей степени, чем под электродом.

5. Выводы

В работе построено решение контактной задачи деформирования пьезоэлектрического полупространства с функционально-градиентным покрытием, которое происходит под воздействием разности потенциалов, приложенных к круговому электроду на поверхности и к бесконечно удаленной границе подложки. Впервые получены в аналитическом виде выражения для смещений и электрического потенциала на поверхности покрытия. Вычисленные на их основе результаты асимптотически точны для малых и больших значений характерного геометрического параметра задачи. Проведенные численные расчеты иллюстрируют особенности деформирования полупространства с покрытием. Показано, что наибольшее перераспределение электромеханических характеристик по сравнению с таковыми для полупространства без покрытия наблюдается в окрестности края электрода, особенно у покрытий средней толщины. Показано, что наличие любого покрытия со свойствами, отличными от свойств подложки, приводит к тому, что нормальные напряжения под электродом оказываются непостоянными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-19-00444).

Литература

1. Kim S.J., Jones J.D. Optimal design of piezoactuators for active noise and vibration control // AIAAJ. 1991. Vol. 29. P. 2047-2053. <https://doi.org/10.2514/3.10840>
2. Wang M.L., Wang G. Electromagnetic sensors for assessing and monitoring civil infrastructure // Sensor technologies for civil infrastructures. Vol. 1: Sensing hardware and data collection methods for performance assessment / Ed. M.L. Wang, J.P. Lynch, H. Sohn. Elsevier, 2014. P. 238-264. <https://doi.org/10.1533/9780857099136.238>
3. Khan A., Abas Z., Soo Kim H., Oh I.-K. Piezoelectric thin films: an integrated review of transducers and energy harvesting // Smart Mater. Struct. 2016. Vol. 25. 053002. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/053002>
4. Soloviev A.N., Oganessian P.A., Lupeiko T.G., Kirillova E.V. Modeling of non-uniform polarization for multi-layered piezoelectric transducer for energy harvesting devices // Advanced materials / Ed. I. Parinov, Sh. Chang, V. Topolov. Springer, 2016. P. 651-658. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26324-3_46
5. Giannakopoulos A.E., Suresh S. Theory of indentation of piezoelectric materials // Acta Mater. 1999. Vol. 47. P. 2153-2164. [https://doi.org/10.1016/s1359-6454\(99\)00076-2](https://doi.org/10.1016/s1359-6454(99)00076-2)
6. Chen W.Q., Ding H. Indentation of a transversely isotropic piezoelectric half-space by a rigid sphere // Acta Mech. Solid. Sin. 1999. Vol. 12. P. 114-120.
7. Zhou Y.T., Lee K.Y. Exact solutions of a new, 2D frictionless contact model for orthotropic piezoelectric materials indented by a rigid sliding punch // Phil. Mag. 2012. Vol. 92. P. 1937-1965. <https://doi.org/10.1080/14786435.2012.661481>
8. Makagon A., Kachanov M., Karapetian E., Kalinin S.V. Piezoelectric indentation of a flat circular punch accompanied by frictional sliding and applications to scanning probe microscopy // Int. J. Eng. Sci. 2009. Vol. 47. P. 221-239. <https://doi.org/10.1016/j.jengsci.2008.07.010>

9. *Elloumi R., Guler M.A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S.* Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch // *Int. J. Solid. Struct.* 2013. Vol. 50. P. 3778-3792. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.014>
10. *Elloumi R., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S., Guler M.A.* On the frictional sliding contact problem between a rigid circular conducting punch and a magneto-electro-elastic half-plane // *Int. J. Mech. Sci.* 2014. Vol. 87. P. 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.04.024>
11. *Berndt E.A., Sevostianov I.* Action of a smooth flat charged punch on the piezoelectric half-space possessing symmetry of class 6 // *Int. J. Eng. Sci.* 2016. Vol. 103. P. 77-96. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.03.005>
12. *Koizumi M.* FGM activities in Japan // *Compos. B Eng.* 1997. Vol. 28. P. 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
13. *Muller E., Drasar C., Schilz J., Kaysser W.A.* Functionally graded materials for sensor and energy applications // *Mater. Sci. Eng.* 2003. Vol. 362. P. 17-39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1)
14. *Matula I., Dercz G., Barczyk J.* Titanium/Zirconium functionally graded materials with porosity gradients for potential biomedical applications // *Mater. Sci. Tech.* 2020. Vol. 36. P. 972-977. <https://doi.org/10.1080/02670836.2019.1593603>
15. *Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., Kawasaki T.* Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application // *Compos. Sci. Tech.* 2004. Vol. 64. P. 893-908. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2003.09.005>
16. *Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S.* Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch // *Int. J. Solid. Struct.* 2016. Vol. 90. P. 45-59. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.011>
17. *Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S.* Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch // *Int. J. Solid. Struct.* 2014. Vol. 51. P. 2791-2806. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.03.028>
18. *Su J., Ke L.-L., El-Borgi S., Xiang Y., Wang Y.-S.* An effective method for the sliding frictional contact of a conducting cylindrical punch on FGPMs // *Int. J. Solid. Struct.* 2018. Vol. 141-142. P. 127-136. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.02.017>
19. *Ma J., El-Borgi S., Ke L.-L., Wang Y.-S.* Frictional contact problem between a functionally graded magneto-electroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation // *J. Therm. Stresses.* 2016. Vol. 39. P. 245-277. <https://doi.org/10.1080/01495739.2015.1124648>
20. *Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S.* Fretting contact of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a conducting punch // *Smart Mater. Struct.* 2016. Vol. 25. 025014. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/2/025014>
21. *Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Xiang Y.* Axisymmetric torsional fretting contact between a spherical punch and an FGPM coating // *Appl. Math. Model.* 2017. Vol. 52. P. 576-589. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.010>
22. *Comez I., Guler M.A., El-Borgi S.* Continuous and discontinuous contact problems of a homogeneous piezoelectric layer pressed by a conducting rigid flat punch // *Acta Mech.* 2020. Vol. 231. P. 957-976. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02551-3>
23. *Wang J.H., Chen C.Q., Lu T.J.* Indentation responses of piezoelectric films // *J. Mech. Phys. Solid.* 2008. Vol. 56. P. 3331-3351. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.09.009>
24. *Lapina P.A., Mitrin B.I., Kuznetsova T.A., Lapitskaya V.A.* Dynamics of thermoelastic frictional wear of a coating with piezoelectric interlayer // *MATEC Web Conf.* 2018. Vol. 226. 03031. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822603031>
25. *Wu Y.F., Yu H.Y., Chen W.Q.* Indentation responses of piezoelectric layered half-space // *Smart Mater. Struct.* 2013. Vol. 22. 015007. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/1/015007>
26. *Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Mitrin B.I.* Axisymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch // *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. P. 1289-1302. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2026-x>
27. *Vasiliev A.S.* Penetration of a spherical conductive punch into a piezoelectric half-space with a functionally graded coating // *Int. J. Eng. Sci.* 2019. Vol. 142. P. 230-241. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.006>
28. *Айзикович С.М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // *ПММ.* 1990. Т. 54, № 5. С. 872-877. (English version [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(90\)90125-T](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90125-T))
29. *Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aguiar A.R.* Electroelastic deformation of a piezoelectric FGM coated half-plane caused by an electrostatic potential difference applied to the strip electrode on the surface // *Multiscale Solid Mechanics / Ed. H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov.* Springer, 2021. P. 475-486. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_35
30. *Vasiliev A.S., Volkov S.S., Kislyakov E.A., Irkha V.A.* Analytical expressions for the displacements of a surface of piezoelectric FGM-coated half-plane with a strip electrode // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2021. Vol. 33. P. 1555-1566. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-00991-8>
31. *Айзикович С.М., Александров В.М.* Осесимметричная задача о вдавливании кругового штампа в упругое неоднородное по глубине полупространство // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1984. № 2. С. 73-82.
32. *Melkumyan S.A., Ulitko A.F.* Axisymmetric contact problem of electroelasticity for a half-space // *Soviet Applied Mechanics.* 1987. Vol. 23. P. 836-843. <https://doi.org/10.1007/BF00887786>
33. *Васильев А.С.* Функции податливости электромагнитупругой пьезоэлектрической пьезомагнитной полуплоскости и полупространства с функционально-градиентным или слоистым покрытием // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.* 2019. Т. 23, № 3. С. 475-496. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1739>
34. *Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M.* Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating // *Mater. Phys. Mech.* 2016. Vol. 28. P. 11-15.
35. *Vasiliev A.S., Volkov S.S., Sadyrin E.V., Aizikovich S.M.* Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a conical punch // *Mathematics.* 2020. Vol. 8. 983. <https://doi.org/10.3390/math8060983>

References

1. Kim S.J., Jones J.D. Optimal design of piezoactuators for active noise and vibration control. *AIAAJ*, 1991, vol. 29, pp. 2047-2053. <https://doi.org/10.2514/3.10840>
2. Wang M.L., Wang G. Electromagnetic sensors for assessing and monitoring civil infrastructure. *Sensor technologies for civil infrastructures. Vol. 1: Sensing hardware and data collection methods for performance assessment*, ed. M.L. Wang, J.P. Lynch, H. Sohn. Elsevier, 2014. Pp. 238-264. <https://doi.org/10.1533/9780857099136.238>
3. Khan A., Abas Z., Soo Kim H., Oh I.-K. Piezoelectric thin films: an integrated review of transducers and energy harvesting. *Smart Mater. Struct.*, 2016, vol. 25, 053002. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/5/053002>
4. Soloviev A.N., Oganessian P.A., Lupeiko T.G., Kirillova E.V. Modeling of non-uniform polarization for multi-layered piezoelectric transducer for energy harvesting devices. *Advanced materials*, ed. I. Parinov, Sh. Chang, V. Topolov. Springer, 2016. P. 651-658. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26324-3_46
5. Giannakopoulos A.E., Suresh S. Theory of indentation of piezoelectric materials. *Acta Mater.*, 1999, vol. 47, pp. 2153-2164. [https://doi.org/10.1016/s1359-6454\(99\)00076-2](https://doi.org/10.1016/s1359-6454(99)00076-2)
6. Chen W.Q., Ding H. Indentation of a transversely isotropic piezoelectric half-space by a rigid sphere. *Acta Mech. Solid. Sin.*, 1999, vol. 12, pp. 114-120.
7. Zhou Y.T., Lee K.Y. Exact solutions of a new, 2D frictionless contact model for orthotropic piezoelectric materials indented by a rigid sliding punch. *Phil. Mag.*, 2012, vol. 92, pp. 1937-1965. <https://doi.org/10.1080/14786435.2012.661481>
8. Makagon A., Kachanov M., Karapetian E., Kalinin S.V. Piezoelectric indentation of a flat circular punch accompanied by frictional sliding and applications to scanning probe microscopy. *Int. J. Eng. Sci.*, 2009, vol. 47, pp. 221-239. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.07.010>
9. Elloumi R., Guler M.A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch. *Int. J. Solid. Struct.*, 2013, vol. 50, pp. 3778-3792. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.07.014>
10. Elloumi R., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S., Guler M.A. On the frictional sliding contact problem between a rigid circular conducting punch and a magneto-electro-elastic half-plane. *Int. J. Mech. Sci.*, 2014, vol. 87, pp. 1-17. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.04.024>
11. Berndt E.A., Sevostianov I. Action of a smooth flat charged punch on the piezoelectric half-space possessing symmetry of class 6. *Int. J. Eng. Sci.*, 2016, vol. 103, pp. 77-96. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.03.005>
12. Koizumi M. FGM activities in Japan. *Compos. B Eng.*, 1997, vol. 28, pp. 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9)
13. Muller E., Drasar C., Schilz J., Kaysser W.A. Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Mater. Sci. Eng.*, 2003, vol. 362, pp. 17-39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1)
14. Matuła I., Dercz G., Barczyk J. Titanium/Zirconium functionally graded materials with porosity gradients for potential biomedical applications. *Mater. Sci. Tech.*, 2020, vol. 36, pp. 972-977. <https://doi.org/10.1080/02670836.2019.1593603>
15. Watari F., Yokoyama A., Omori M., Hirai T., Kondo H., Uo M., Kawasaki T. Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Compos. Sci. Tech.*, 2004, vol. 64, pp. 893-908. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2003.09.005>
16. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Axisymmetric frictionless contact of a functionally graded piezoelectric layered half-space under a conducting punch. *Int. J. Solid. Struct.*, 2016, vol. 90, pp. 45-59. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.04.011>
17. Ma J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictionless contact of a functionally graded magneto-electro-elastic layered half-plane under a conducting punch. *Int. J. Solid. Struct.*, 2014, vol. 51, pp. 2791-2806. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.03.028>
18. Su J., Ke L.-L., El-Borgi S., Xiang Y., Wang Y.-S. An effective method for the sliding frictional contact of a conducting cylindrical punch on FGPMs. *Int. J. Solid. Struct.*, 2018, vol. 141-142, pp. 127-136. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.02.017>
19. Ma J., El-Borgi S., Ke L.-L., Wang Y.-S. Frictional contact problem between a functionally graded magneto-electroelastic layer and a rigid conducting flat punch with frictional heat generation. *J. Therm. Stresses*, 2016, vol. 39, pp. 245-277. <https://doi.org/10.1080/01495739.2015.1124648>
20. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Fretting contact of a functionally graded piezoelectric layered half-plane under a conducting punch. *Smart Mater. Struct.*, 2016, vol. 25, 025014. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/2/025014>
21. Su J., Ke L.-L., Wang Y.-S., Xiang Y. Axisymmetric torsional fretting contact between a spherical punch and an FGPM coating. *Appl. Math. Model.*, 2017, vol. 52, pp. 576-589. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.010>
22. Comez I., Guler M.A., El-Borgi S. Continuous and discontinuous contact problems of a homogeneous piezoelectric layer pressed by a conducting rigid flat punch. *Acta Mech.*, 2020, vol. 231, pp. 957-976. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02551-3>
23. Wang J.H., Chen C.Q., Lu T.J. Indentation responses of piezoelectric films. *J. Mech. Phys. Solid.*, 2008, vol. 56, pp. 3331-3351. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2008.09.009>
24. Lapina P.A., Mitrin B.I., Kuznetsova T.A., Lapitskaya V.A. Dynamics of thermoelastic frictional wear of a coating with piezoelectric interlayer. *MATEC Web Conf.*, 2018, vol. 226, 03031. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201822603031>
25. Wu Y.F., Yu H.Y., Chen W.Q. Indentation responses of piezoelectric layered half-space. *Smart Mater. Struct.*, 2013, vol. 22, 015007. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/22/1/015007>
26. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikov S.M., Mitrin B.I. Axisymmetric indentation of an electroelastic piezoelectric half-space with functionally graded piezoelectric coating by a circular punch. *Acta Mech.*, 2019, vol. 230, pp. 1289-1302. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-2026-x>
27. Vasiliev A.S. Penetration of a spherical conductive punch into a piezoelectric half-space with a functionally graded coating. *Int. J. Eng. Sci.*, 2019, vol. 142, pp. 230-241. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.006>
28. Aizikov S.M. An asymptotic solution of a class of coupled equations. *J. Appl. Math. Mech.*, 1990, vol. 54, pp. 719-724. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(90\)90125-T](https://doi.org/10.1016/0021-8928(90)90125-T)

29. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Aguiar A.R. Electroelastic deformation of a piezoelectric FGM coated half-plane caused by an electrostatic potential difference applied to the strip electrode on the surface. *Multiscale Solid Mechanics*, ed. H. Altenbach, V.A. Eremeyev, L.A. Igumnov. Springer, 2021. Pp. 475-486. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54928-2_35
30. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Kislyakov E.A., Irkha V.A. Analytical expressions for the displacements of a surface of piezoelectric FGM-coated half-plane with a strip electrode. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2021, vol. 33, pp. 1555-1566. <https://doi.org/10.1007/s00161-021-00991-8>
31. Ayzikovich S.M., Aleksandrov V.M. Osesimmetrichnaya zadacha o vdavlivanii krugovogo shtampa v uprugoye neodnorodnoye po glubine poluprostranstvo [Axisymmetric problem of indentation of a circular die into an elastic half-space that is nonuniform with respect to depth]. *Izv. AN SSSR. MTT – Mech. Solid.*, 1984, no. 2, pp. 73-82.
32. Melkumyan S.A., Ulitko A.F. Axisymmetric contact problem of electroelasticity for a half-space. *Soviet Applied Mechanics*, 1987, vol. 23, pp. 836-843. <https://doi.org/10.1007/BF00887786>
33. Vasiliev A.S. Compliance functions of electromagnetoelastic piezoelectric and piezomagnetic half-plane and half-space with functionally graded or layered coatings. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki – Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 3, pp. 475-496. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1739>
34. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Indentation of an axisymmetric punch into an elastic transversely-isotropic half-space with functionally graded transversely-isotropic coating. *Mater. Phys. Mech.*, 2016, vol. 28, pp. 11-15.
35. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Sadyrin E.V., Aizikovich S.M. Simplified analytical solution of the contact problem on indentation of a coated half-space by a conical punch. *Mathematics*, 2020, vol. 8, 983. <https://doi.org/10.3390/math8060983>

Поступила в редакцию 08.11.2021; после доработки 07.12.2021; принята к опубликованию 14.12.2021

Сведения об авторах

Волков Сергей Сергеевич, ктн, снс, Научно-образовательный центр «Материалы», Донской государственный технический университет (НОЦ «Материалы» ДГТУ), 344001, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; e-mail: fenix_rsu@mail.ru

Васильев Андрей Сергеевич, кфмн, внс, НОЦ «Материалы» ДГТУ; e-mail: andre.vasiliev@gmail.com

Айзикович Сергей Михайлович, дфмн, снс, зав.лаб., НОЦ «Материалы» ДГТУ; e-mail: saizikovich@gmail.com