

DOI: [10.7242/1999-6691/2022.15.1.2](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2022.15.1.2)

УДК 519.63

О ЧИСЛЕННОМ ПОДХОДЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИКИ В НЕВЫПУКЛОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.В. Рукавишников

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, Российская Федерация

Рассматривается двумерная стационарная задача, полученная в результате дискретизации по времени нелинейных уравнений Навье–Стокса в вихревой форме, описывающих течение несжимаемой вязкой жидкости в невыпуклой многоугольной области. Для того чтобы решить нелинейную задачу, строится последовательность приближенных линейных задач. Для линейных задач вводится понятие R_ν -обобщенного решения в весовых множествах, для которых справедлив весовой аналог условия Ладженской–Бабушки–Бреци. Построен метод конечных элементов с весом такой, что в нем подавляется погрешность, возникающая в окрестности угла на границе, большего π , то есть она не распространяется во внутреннюю часть расчетной области. Закон сохранения массы справедлив непосредственно в узлах сетки, а не только в (слабом) интегральном смысле. Проведены вычислительные эксперименты и сделан сравнительный анализ результатов решений в многоугольных областях с различными значениями угла, большего π . Предложенный подход имеет превосходство над классическим методом конечных элементов по порядку сходимости относительно шага сетки. Установлен набор оптимальных параметров, при которых достигается необходимый результат по порядку сходимости численного решения, при этом показатель весовой функции связан с величиной угла, а определяющие R_ν -обобщенное решение параметры от него не зависят. Порядок сходимости решения задачи предложенным приближенным методом к точному решению нелинейной задачи, в отличие от классического метода конечных элементов, не обусловлен величиной граничного угла, большего π . При применении приближенного метода не используется геометрическое гущение сетки в окрестности точки сингулярности.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, вихревая форма, итерации Пикара, невыпуклая область, весовой метод конечных элементов

A NUMERICAL APPROACH FOR SOLVING ONE NONLINEAR PROBLEM OF HYDRODYNAMICS IN A NON-CONVEX POLYGONAL DOMAIN

A.V. Rukavishnikov

Institute of Applied Mathematics, Khabarovsk Division, FEB RAS, Khabarovsk, Russian Federation

The paper considers the two-dimensional stationary problem obtained as a result of time discretization of the nonlinear Navier–Stokes equations in rotation form, which describe the incompressible viscous fluid flow in a non-convex polygonal domain. In order to solve a nonlinear problem, it is necessary to find solutions to a sequence of approximate linear problems. For linear problems, the concept of an R_ν -generalized solution in weighted sets obeying the weighted analogue of the Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi condition is introduced. A scheme of the weighted finite element method is constructed which suppresses the error arising in the neighborhood of the vertex of the reentrant angle and does not allow it to propagate into the inner part of the computational domain. The mass conservation law is valid directly at the grid nodes, and not only in the (weak) integral sense. Numerical experiments are carried out and a comparative analysis is made in polygonal domains with different values of reentrant angles. The advantage of the proposed approach over the classical finite element method is the order of convergence with respect to the grid step. A set of optimal parameters of the method is determined to obtain the required order of convergence. In this case, the exponent of the weight function depends on the value of the reentrant angle, and the parameters determining the R_ν -generalized solution are independent on its value. In contrast to the classical approach, the order of convergence of the proposed approximate method to the exact solution of a nonlinear problem does not depend on the value of the reentrant angle. The constructed approximate method can be used without geometric mesh refinement in the vicinity of the singularity point.

Key words: Navier–Stokes equations, rotation form, Picard’s iterations, non-convex domain, weighted finite element method

1. Введение

В настоящее время для математиков и инженеров особый интерес представляют решения задач, описывающих естественные физические процессы в многоугольных невыпуклых областях Ω с граничным углом ω , величина которого больше π . Вершину этого угла будем называть точкой сингулярности. Остановимся на возникающих при решении трудностях.

Существует большой класс задач, например, моделирующие электромагнитное поле уравнения Максвелла, решение которых не принадлежит пространству С.Л. Соболева $W_2^1(\Omega)(H^1(\Omega))$. Другими словами, в вариационной постановке интегралы от обеих частей функционала расходятся. Краевая задача в таком случае называется задачей с сильной сингулярностью. Есть класс задач, для которых обобщенное решение существует и принадлежит пространству С.Л. Соболева $W_2^1(\Omega)$, например, решение задачи теории упругости, но оно не принадлежит пространству С.Л. Соболева $W_2^2(\Omega)$. Краевая задача в этом случае называется задачей

со слабой сингулярностью. Согласно принципу согласованных оценок не существует классического метода конечных разностей или метода конечных элементов (МКЭ), решение которого сходилось бы к точному решению со скоростью $O(h)$, как это имеет место в выпуклых областях (где h — параметр дискретизации сетки). В реальности порядок сходимости относительно h существенно меньше единицы и уменьшается с ростом угла ω на границе. Дело в том, что погрешность, возникающая в окрестности точки сингулярности, распространяется во внутреннюю часть расчетной области, то есть туда, где решение обладает достаточной гладкостью. Такую ситуацию часто называют эффектом загрязнения (pollution effect).

Что касается задач гидродинамики, то выделим следующие подходы к исследованиям, основанные: 1) на определении функций, двойственных к сингулярной части решения, и дополнении вариационной постановки задачи вспомогательными уравнениями [1]; 2) на разделении сингулярных и регулярных составляющих решения, аппроксимации коэффициентов первых и, на основании этого, отыскании вторых [2]; 3) на выделении нескольких окрестностей точки сингулярности и введении вспомогательных билинейных форм в них [3]; 4) на сгущении сетки в окрестности точки сингулярности [4]. Известные методы позволяют получить необходимый первый порядок сходимости, но в $O(1)$ -окрестности точки сингулярности требуются изменения стандартного МКЭ.

В данной работе предлагается принципиально другая идея. Решение определяем как R_v -обобщенное в весовых пространствах или множествах (в зависимости от задачи). Подход основан на введении в интегральные тождества весовой функции, равной расстоянию от точки в δ -окрестности до точки сингулярности, и константы вне окрестности. Благодаря этому можно подавить влияние угловой сингулярности и получить сходящиеся интегралы от обеих частей тождеств. Впервые такая идея была предложена для решения эллиптических задач (см. [5]). Существование, единственность и дифференциальные свойства решения доказаны в [6, 7]. Для задачи Стокса в [8] установлен весовой аналог ЛББ-условия (условия Ладыженской–Бабушки–Бреци — неравенства, связывающего весовые множества для вектор-функций скорости и функций давления). Построены численные методы решения задачи теории упругости с угловой сингулярностью, включая случай угла, равного 2π , задачи расчета напряжений в окрестности линии контакта и задачи Никольского–Лизоркина с вырождением исходных данных [9–13].

Далее рассматривается стационарная задача течения однородной несжимаемой вязкой жидкости, полученная в результате дискретизации по времени описывающих ее уравнений Навье–Стокса в вихревой форме. Помимо наличия на границе расчетной области угла, большего π , задача имеет в постановке нелинейный член $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$, где \mathbf{v} — вектор скоростей. Это слагаемое необходимо линеаризовать и затем решать последовательность линейных задач, сходящуюся к решению исходной нелинейной задачи. Представление постановки в вихревой форме обусловлено несколькими причинами. Первая из них исходит из вычислительной линейной алгебры. Так, в [14] показано, что вспомогательные задачи типа задач Озейна и конвекции–диффузии, которые включают правильную (то есть сохраняющую эллиптичность) линеаризацию нелинейных членов в вихревой форме, и могут быть решены быстрее, чем при линеаризации нелинейных членов в конвективной форме. Вторая причина — трудности численного анализа задач обтекания при наличии силы Кориолиса. В вихревой форме дополнительный член имеет вид $\mathbf{w} \times \mathbf{v}$, здесь \mathbf{w} — аппроксимация вектора \mathbf{v} , при этом $\nabla \mathbf{w} = 0$; при конвективной форме он выглядит так же, но теперь $\nabla \mathbf{w} \neq 0$. Как показано в [15], задача диффузии с таким членом не нуждается в какой-либо глобальной стабилизации, в отличие от случая, когда добавляется член в конвективной форме $(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, где \mathbf{a} — аппроксимация вектора \mathbf{v} . Третья причина — при применении линеаризованного члена в вихревой форме требуется приблизительно в два раза меньше вычислительных ресурсов в сравнении с применением в соответствующей конвективной форме, что весьма существенно при использовании сеток с мелким шагом.

Задача с угловой сингулярностью возникает, например, в задаче потока со ступенькой [16] (backward-facing step flow) или в задаче сжатого потока [17] (contraction flow problem). Для численной реализации задачи на основании R_v -обобщенного решения построен МКЭ с весом. Проведена серия вычислительных экспериментов для различных значений угла, большего π , как с помощью классического МКЭ, так и предложенного МКЭ с весом. Выявлено преимущество метода с весом в сравнении с классическим, а именно установлено, что порядок сходимости не зависит от величины угла и равен $O(h)$ в норме пространства С.Л. Соболева $W_{2,v}^1(\Omega)$. Установлен набор оптимальных параметров подхода на основе МКЭ с весом для решения стационарных уравнений Навье–Стокса. Предложенный метод не использует сгущение сетки в окрестности точки сингулярности и прост в реализации.

2. Постановка задачи и получение R_v -обобщенного решения

Пусть $\Omega = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1, x_2)\} \subset \mathbf{R}^2$ — многоугольная область с границей $\Gamma, \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Рассмотрим нелинейную задачу, полученную в результате дискретизации по времени уравнений Навье–Стокса

в вихревой форме для несжимаемой жидкости. Зная силы \mathbf{f} в Ω и \mathbf{g} на Γ , значение коэффициента вязкости θ и параметр дискретизации по времени $\alpha > 0$, можно найти поле скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$ и поле давления Бернулли $P = P(\mathbf{x})$, то есть решить систему дифференциальных уравнений

$$-\nabla \cdot (\theta \nabla \mathbf{u}) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \alpha \mathbf{u} + \nabla P = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

удовлетворяющих граничным условиям:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3)$$

Пусть $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j}$ — некоторые векторные поля, c — скалярное поле, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ — матрицы. Тогда $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^2 a_i b_i$, $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$. Введем $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{j}$ — оператор Гамильтона, $\nabla c = \frac{\partial c}{\partial x_1} \mathbf{i} + \frac{\partial c}{\partial x_2} \mathbf{j}$ — градиент поля c , $\nabla \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}$ — (плоский) ротор поля \mathbf{a} , $\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}$ — дивергенцию поля \mathbf{a} , $(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \mathbf{a}$ — оператор Лапласа поля \mathbf{a} и произведение $(\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right) a_2 \mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) a_1 \mathbf{j}$, а также $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ — меру \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ — ее норму, $D^k := \frac{\partial^{k_1}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}}$, $|k| = k_1 + k_2$, где k_1 и k_2 — неотрицательные целые числа.

Вихревая форма стационарных уравнений Навье–Стокса получается из классической конвективной формы (в переменных «скорость–кинематическое давление») с учетом следующего тождества:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \quad (4)$$

Полагая в (4) $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и $P = p + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, заключаем, что

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \nabla P, \quad (5)$$

где левая часть равенства (5) представляет собой слагаемые уравнений в конвективной форме, а правая — в вихревой форме (см. (1)–(3)).

Задача (1)–(3) является нелинейной ввиду присутствия выражения $(\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}$ в левой части уравнения (1). Для разрешения системы его необходимо линеаризовать. Самым подходящим для этого способом может служить итерационная процедура Пикара [18]: на n -й итерации решаем задачу с линейным членом $(\nabla \times \mathbf{u}^{n-1}) \times \mathbf{u}^n$, используя значение \mathbf{u}^{n-1} , вычисленное на предыдущей итерации. Хорошо известно [18], что если норма функции \mathbf{f} ограничена, а коэффициент θ не столь мал, то существует решение задачи (1)–(3) $\mathbf{u}^n \rightarrow \mathbf{u}$ и $P^n \rightarrow P$ при $n \rightarrow \infty$ для любого начального приближения \mathbf{u}^0 , удовлетворяющего условиям (2) и (3). Начальное приближение P^0 задавать не нужно. Можно положить $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ в Ω , и на первой итерации процесса вычислений решать задачу Стокса. На каждой итерации линеаризованной системы остаются в силе законы сохранения импульса и массы. Таким образом, для того чтобы получить решение системы (1)–(3) необходимо на n -й итерации Пикара ($n = 1, 2, \dots$) уметь решать задачу следующего вида: находить $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (v_1(\mathbf{x}), v_2(\mathbf{x}))$ и $q = q(\mathbf{x})$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$-\nabla \cdot (\theta \nabla \mathbf{v}) + \mathbf{w}^{n-1} \times \mathbf{v} + \alpha \mathbf{v} + \nabla q = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (8)$$

где $\mathbf{w}^{n-1} = \nabla \times \mathbf{v}^{n-1} = \left(\frac{\partial v_2^{n-1}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^{n-1}}{\partial x_2} \right) \mathbf{k}$, $\mathbf{v}^{n-1} = (v_1^{n-1}, v_2^{n-1})$ — известный с предыдущей итерации Пикара

вектор, $\nabla \cdot \mathbf{v}^{n-1} = 0$ в Ω и $\mathbf{w}^{n-1} \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_1^{n-1}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2^{n-1}}{\partial x_2} \right) v_2 \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_2^{n-1}}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1^{n-1}}{\partial x_2} \right) v_1 \mathbf{j}$.

Особенностью рассмотрения задачи (1)–(3) является то, что область Ω представляет собой невыпуклый многоугольник с одним углом ω , величина которого на границе больше π . Не ограничивая общности, будем полагать, что вершина этого угла совпадает с началом координат $(0, 0)$.

Хорошо известно, что решение (\mathbf{v}, q) является аналитическим в $\bar{\Omega} \setminus (0, 0)$ и в полярных координатах имеет следующую асимптотику в окрестности угла ω [19]: $v_i \sim r^\lambda$ и $q \sim r^{\lambda-1}$, где λ — наименьший положительный корень уравнения

$$\sin(\lambda\omega) + \lambda \sin \omega = 0; \quad (9)$$

в частности, если ω принимает значение $5\pi/4$, то $\lambda \approx 0,674$. Следовательно, $v_i \notin W_2^2(\Omega)$ и $q \notin W_2^1(\Omega)$. Таким образом, в соответствии с принципом согласованных оценок, любой конечно-разностный или конечно-элементный метод не может дать по порядку точности решения лучший результат (см. [20]), чем

$$h^{-\lambda} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^h\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}^h)\|_{L_2(\Omega)} = O(h^\lambda), \quad (10)$$

где \mathbf{v}^h — приближение решения к \mathbf{v} на сетке с шагом порядка h . Отметим, что λ в (9) и (10) совпадают. Для сравнения, если Ω — выпуклая область, то $v_i \in W_2^2(\Omega)$, и порядок сходимости λ в соответствующей формуле (10) достигает единицы, то есть присутствие угла, равного на границе $5\pi/4$ ухудшает порядок сходимости во всей области в полтора раза. Таким образом, погрешность, возникающая в окрестности точки сингулярности, неизбежно распространяется во внутреннюю часть области Ω , где решение обладает достаточной гладкостью. Такая ситуация наблюдается, например, в задаче потока со ступенькой (backward-facing step flow) (см. [16]) или в задаче сжатого потока (contraction flow problem) (см. [17]). Один из способов повышения порядка точности до единицы, а значит, уменьшения погрешности, — это использование геометрического сгущения сетки в окрестности точки сингулярности. Теоретическая оценка данного способа известна, но при исходной сетке с небольшим шагом (порядка $5 \cdot 10^{-4}$) ее последующее сгущение в окрестности точки сингулярности должно иметь еще меньший шаг, и метод перестает работать корректно, то есть на практике порядок сходимости уменьшается (см., например, [21]).

В следующем разделе будет построен приближенный метод решения задачи (6)–(8), а значит, и нелинейной задачи (1)–(3), с помощью которого достигается необходимый порядок сходимости приближенного решения к точному без геометрического сгущения сетки в окрестности особой точки. Для этого в настоящем разделе определим R_ν -обобщенное решение задачи (6)–(8). В [5] впервые такое решение представлено для класса задач, в которых нельзя получить классическое обобщенное решение $u(\mathbf{x})$. В вариационной постановке этих задач интегралы от обеих частей функционала расходятся, то есть решение $u(\mathbf{x})$ не принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega)(H^1(\Omega))$ или, другими словами,

не существует постоянной C такой, что $\left(\int_{\Omega} \sum_{|k| \leq 1} |D^k u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} < C$. Подобная ситуация возникает,

например, при решении системы уравнений Максвелла в области с углом на границе, большим π , и, как отмечено ранее, соответствующая краевая задача называется задачей с сильной сингулярностью.

Идея R_ν -обобщенного решения основана на введении в интегральное тождество весовой функции $\rho(\mathbf{x})$ в некоторой положительной степени ν , причем $\rho(\mathbf{x}) = \{\|\mathbf{x}\|, \text{ если } \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \delta \text{ если } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta\}$, где $\Omega_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \|\mathbf{x}\| \leq \delta\}$. Тогда, благодаря показателю ν и величине δ -окрестности точки сингулярности с координатами $(0, 0)$ можно подавить влияние угловой сингулярности и добиться ограниченности интегралов от обеих частей тождества. Таким образом, R_ν -обобщенное решение будет принадлежать

весовому пространству или множеству (в зависимости от класса рассматриваемых задач). В дальнейшем оказалось, что использование понятия R_v -обобщенного решения целесообразно не только для задач с сильной сингулярностью, но и для задач со слабой сингулярностью, то есть задач, решение которых принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$, но не принадлежит пространству $W_2^2(\Omega)$. К ним, например, относятся задачи теории упругости [22] и задача Стокса [8].

Для определения R_v -обобщенного решения задачи (6)–(8) введем необходимые множества обобщенных функций. Через $W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$ обозначим множество функций $s(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} 1) & \left| D^k s(\mathbf{x}) \right| \leq C_1 (\delta \rho^{-1}(\mathbf{x}))^{k+\beta-\varepsilon}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \quad k = 0, 1, \\ 2) & 0 < C_2 \leq \left\| \rho^\beta s \right\|_{L_2(\Omega, \Omega_\delta)}, \end{aligned}$$

и имеющих ограниченную норму $\|s\|_{W_{2,\beta}^1(\Omega)} := \left(\sum_{|k| \leq 1} \left\| \rho^\beta |D^k s| \right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$ пространства $W_{2,\beta}^1(\Omega)$, при этом $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от k и $s(\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, не зависящий от δ , β , k и $s(\mathbf{x})$.

Пусть $W_{2,\beta}^{1,0}(\Omega, \delta) \subset W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$ такое, что $W_{2,\beta}^{1,0}(\Omega, \delta) = \{s \in C^\infty(\bar{\Omega}) : s = 0 \text{ на } \Gamma, \text{ удовлетворяет условиям 1) и 2)}\}$ с ограниченной нормой пространства $W_{2,\beta}^1(\Omega)$. $W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta) = \{s : \text{если существует } z \in W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta) \text{ такое, что } z = s \text{ на } \Gamma\}$ с нормой $\|s\|_{W_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta)} := \inf_{z=s \text{ на } \Gamma} \|z\|_{W_{2,\beta}^1(\Omega)}$. Через $L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ обозначим множество функций $s(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условиям: 1) при $k=0$ и 2) с ограниченной нормой $s_{L_{2,\beta}(\Omega)} := \rho^\beta s_{L_2(\Omega)}$ пространства $L_{2,\beta}(\Omega)$. $L_{2,\beta}^0(\Omega, \delta)$ — подмножество $L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ такое, что $s \in L_{2,\beta}^0(\Omega, \delta)$, если $s \in L_{2,\beta}(\Omega, \delta)$ и $\int_\Omega \rho^\beta(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Жирным шрифтом будем выделять пространства векторных полей, например, если $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ и $s_i \in W_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$, то $\mathbf{s} \in \mathbf{W}_{2,\beta}^1(\Omega, \delta)$ с ограниченной векторной нормой

$$\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{W}_{2,\beta}^1(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^2 s_{i, W_{2,\beta}^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

О п р е д е л е н и е 1. R_v -обобщенным решением задачи (6)–(8) назовем пару функций $\mathbf{v}_v \in \mathbf{W}_{2,v}^1(\Omega, \delta)$, где \mathbf{v}_v почти всюду удовлетворяет условию (8), и $q_v \in L_{2,v}^0(\Omega, \delta)$, для которой справедливы интегральные тождества:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[\theta \nabla \mathbf{v}_v : \nabla (\rho^{2v} \mathbf{s}) + (\mathbf{w}^{n-1} \times \mathbf{v}_v + \alpha \mathbf{v}_v) \cdot (\rho^{2v} \mathbf{s}) - q_v \nabla \cdot (\rho^{2v} \mathbf{s}) \right] d\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot (\rho^{2v} \mathbf{s}) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbf{W}_{2,v}^{1,0}(\Omega, \delta), \\ - \int_\Omega (\rho^{2v} z) \nabla \cdot \mathbf{v}_v d\mathbf{x} &= 0, \quad \forall z \in L_{2,v}^0(\Omega, \delta), \end{aligned}$$

при заданных $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{w}^{n-1}) \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta) \times \mathbf{W}_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta) \times \mathbf{L}_\infty(\Omega)$, $v \geq \beta \geq 0$.

3. Построение приближенного метода решения задачи

Построим метод конечных элементов с весом для последовательного нахождения решения системы (6)–(8), опираясь на понятие R_v -обобщенного решения. Для этой цели выполним триангуляцию T_h , определим совокупности узлов для компонент решения и введем для них пару конечномерных пространств, для которой выполняется закон сохранения массы не в слабом (интегральном) смысле, а в сильном, то есть в узлах аппроксимации. Дополним базисные функции весовыми функциями в некоторых степенях для подавления погрешности в окрестности точки сингулярности. Для этого исходную область поделим на треугольники T_i со стороной порядка h , с учетом классических правил триангуляции [21]. Затем каждый из треугольников представим в виде трех треугольников K_{i_j} с вершинами в центре масс основного треугольника. Каждый из K_{i_j} будем называть конечным элементом, а их объединение обозначим через $\Omega_h = \cup_{K_{i_j} \in T_h} K_{i_j}$.

Далее, найдем совокупности узлов для компонент поля скоростей и поля давления. Для компонент поля скоростей множество вершин конечных элементов R_l и середин их сторон S_k , лежащих внутри Ω , обозначим через S_Ω , а на границе — через S_Γ , объединение же внутренних и граничных узлов — через S , а количество — через $|S|$. Причем общую вершину (или середину стороны) двух соседних конечных элементов считаем одним узлом. Для поля давления назовем как Z множество узлов Z_s , совпадающих с узлами R_l в соответствующем конечном элементе K_l . Причем Z_s и Z_j , имеющие те же координаты, что и узлы R_l , но являющиеся вершинами двух соседних элементов, при нахождении поля давления считаем разными узлами. Обозначим через $|Z|$ количество узлов множества Z .

Для компонент поля скоростей каждому узлу P_k множества S поставим в соответствие базисную функцию такую, что $\varphi_k(P_k)=1$ и $\varphi_k(P_j)=0$, $j \neq k$, при этом $\varphi_k(\mathbf{x})$ — квадратичная функция на своем носителе, то есть на замкнутой части плоскости, где значения функции отличны от нуля. Представим пространство X^h как линейную оболочку, натянутую на систему базисных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{|S|}$. Функции, принадлежащие пространству X^h , непрерывны на Ω_h , а само пространство X^h совпадает с пространством P_2 известной пары пространств $\mathbf{P}_2 - P_1$ Тейлора–Худа [23].

Для поля давления каждому узлу Z_s множества Z поставим в соответствие базисную функцию $\psi_s(\mathbf{x})$ такую, что $\psi_s(Z_s)=1$ и $\psi_s(Z_j)=0$, $j \neq s$, $\psi_s(\mathbf{x})$ — линейная функция на одном конечном элементе. Определим пространство Y^h как линейную оболочку, натянутую на систему базисных функций $\{\psi_s\}_{s=1}^{|Z|}$. Функции, принадлежащие пространству Y^h , не обладают свойством непрерывности на Ω_h , а лишь принадлежат пространству $L_2(\Omega_h)$. Пространство Y^h не будет совпадать с P_1 конечно-элементной пары Тейлора–Худа. Его размерность $|Z|$ существенно больше, но, в отличие от пары Тейлора–Худа, для пары пространств $\mathbf{X}^h - Y^h$ выполняется закон сохранения массы в сильном смысле. Такая пара пространств предложена в [24], а позднее в [25] доказана ее ЛББ-устойчивость.

Модернизируем пару пространств $\mathbf{X}^h - Y^h$ ($\mathbf{X}^h = X^h \times X^h$) следующим образом: 1) каждую базисную функцию $\varphi_i(\mathbf{x})$ пространства X^h умножим на $\rho^{-v^*}(\mathbf{x})$: $\chi_i(\mathbf{x}) = \rho^{-v^*}(\mathbf{x})\varphi_i(\mathbf{x})$, и каждую базисную функцию $\psi_j(\mathbf{x})$ пространства Y^h умножим на $\rho^{-u^*}(\mathbf{x})$: $\theta_j(\mathbf{x}) = \rho^{-u^*}(\mathbf{x})\psi_j(\mathbf{x})$; 2) их линейные оболочки образуют конечно-элементные пространства с весом V^h и Q^h соответственно. Пара $\mathbf{V}^h - Q^h$ ($\mathbf{V}^h = V^h \times V^h$) — это пара пространств в переменных скорость–давление, $\mathbf{V}_0^h = \{\mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h : \mathbf{w}^h(P_k) = 0, \text{ если } P_k \in S_\Gamma\}$. Конечно-элементные представления поля скоростей $\mathbf{v}_v^h = (v_{v,1}^h, v_{v,2}^h)$ и поля давления q_v^h имеют соответствующий вид:

$$v_{v,1}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{|S|} c_i \chi_i(\mathbf{x}), \quad v_{v,2}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{|S|} d_i \chi_i(\mathbf{x}), \quad q_v^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{|Z|} e_j \theta_j(\mathbf{x}).$$

Об определении коэффициентов c_i , d_i и e_j скажем ниже, а $v_{1,i} = \rho^{-v^*}(P_i)c_i$, $v_{2,i} = \rho^{-v^*}(P_i)d_i$ и $q_j = \rho^{-u^*}(Z_j)e_j$ — компоненты полей скоростей и давления в узлах множеств S и Z соответственно.

О п р е д е л е н и е 2. Приближенным R_v -обобщенным решением задачи (6)–(8), согласно методу конечных элементов с весом, назовем пару функций: $\mathbf{v}_v^h \in \mathbf{V}^h$, где \mathbf{v}_v^h удовлетворяет в узлах множества S_Γ условию (8), и $q_v^h \in Q^h$, для которой справедливы интегральные тождества:

$$\int_{\Omega} [\theta \nabla \mathbf{v}_v^h : \nabla (\rho^{2v} \mathbf{s}^h) + (\mathbf{w}^{n-1} \times \mathbf{v}_v^h + \alpha \mathbf{v}_v^h) \cdot (\rho^{2v} \mathbf{s}^h) - q_v^h \nabla \cdot (\rho^{2v} \mathbf{s}^h)] d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\rho^{2v} \mathbf{s}^h) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{s}^h \in \mathbf{V}_0^h, \quad (11)$$

$$-\int_{\Omega} (\rho^{2v} z^h) \nabla \cdot \mathbf{v}_v^h d\mathbf{x} = 0, \quad \forall z^h \in Q^h, \quad (12)$$

при заданных $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{w}^{n-1}) \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega, \delta) \times \mathbf{W}_{2,\beta}^{1/2}(\Gamma, \delta) \times \mathbf{L}_{\infty}(\Omega)$, $v \geq \beta \geq 0$.

4. Результаты численных экспериментов на модельных задачах

Проведем численное моделирование нелинейной задачи (1)–(3). На каждой итерации Пикара находим приближенное решение задачи (6)–(8) в постановке (11), (12). Используя метод Галеркина, из (11), (12) получим систему линейных алгебраических уравнений. Метод нахождения ее решения основан на неполном алгоритме Узавы с блочным переобуславливанием матрицы системы (см. [8]). Решение задачи (1)–(3) в области с углом на границе, большим π , в полярных координатах (r, φ) , как отмечалось в разделе 2, является сингулярным и имеет вид:

$$u_1(r, \varphi) = r^{\lambda_k} \Phi_{1,k}(\varphi), \quad u_2(r, \varphi) = r^{\lambda_k} \Phi_{2,k}(\varphi), \quad P(r, \varphi) = r^{\lambda_k-1} \Phi_{3,k}(\varphi), \quad (13)$$

где показатель λ_k есть наименьший положительный корень уравнения (9), зависящий от значения ω_k угла ω . Показатель λ уменьшается с ростом ω_k , а следовательно, согласно оценке (10), уменьшается скорость сходимости к точному решению задачи классического приближенного решения.

Рассмотрим области с тремя различными ω_k , большими π : $\omega_1 = 3\pi/2$, для него $\lambda_1 = 0,54445$; $\omega_2 = 5\pi/4$ — $\lambda_2 = 0,67358$; $\omega_3 = 9\pi/8$ — $\lambda_3 = 0,80077$. Продемонстрируем преимущество предложенного МКЭ с весом над классическим МКЭ, полагая $v = v^* = \mu^* = 0$ без применения сгущения сетки в окрестности угла ω . Будем полагать, что невыпуклые многоугольные области Ω_k , при этом $k = 1, 2, 3$, заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_1 &= \bar{\Omega}_0 \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, -1 \leq x_2 \leq 0\}, \\ \bar{\Omega}_2 &= \bar{\Omega}_0 \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, x_1 \leq x_2 \leq 0\}, \\ \bar{\Omega}_3 &= \bar{\Omega}_0 \cup \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 0, 0,5x_1 \leq x_2 \leq 0\}, \end{aligned}$$

где $\bar{\Omega}_0 = \{(x_1, x_2) : -1 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$.

Триангуляция $\bar{\Omega}_l$, $l = 0, 1, 2$, построена следующим образом: 1) прямые $x_1^{(i)} = -1 + ih$ и $x_2^{(j)} = -1 + jh$, $i, j = 0, 1, \dots, N$; $N \cdot h = 2$ разбивают квадрат $\{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}$ на N^2 элементарных квадратов со стороной h ; 2) каждый элементарный квадрат диагональю (соединяем верхнюю правую и нижнюю левую вершины) делим на два треугольника, получаем множество из $2N^2$ треугольников; 3) находим пересечения $\bar{\Omega}_l$, $l = 0, 1, 2$, с этим множеством. Триангуляция $\bar{\Omega}_3$ отличается лишь тем, что при ее построении в случае $j = 0, 1, \dots, N/2$ используются прямые $x_2^{(j)}$, отстоящие друг от друга на расстояние $h/2$, а не h .

В (13) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{1,k}(\varphi) &= \cos \varphi \Theta_k'(\varphi) + (1 + \lambda_k) \sin \varphi \Theta_k(\varphi), \\ \Phi_{2,k}(\varphi) &= \sin \varphi \Theta_k'(\varphi) - (1 - \lambda_k) \cos \varphi \Theta_k(\varphi), \\ \Phi_{3,k}(\varphi) &= (\lambda_k - 1)^{-1} \left(\Theta_k''(\varphi) + (\lambda_k + 1)^2 \Theta_k'(\varphi) \right), \end{aligned}$$

где $\Theta_k(\varphi) = \left((1 + \lambda_k)^{-1} \sin((1 + \lambda_k)\varphi) - (1 - \lambda_k)^{-1} \sin((1 - \lambda_k)\varphi) \right) \cos(\lambda_k \omega_k) + \cos((1 - \lambda_k)\varphi) - \cos((1 + \lambda_k)\varphi)$,

$\Theta_k'(\varphi)$ и $\Theta_k''(\varphi)$ — ее первая и третья производные по переменной φ соответственно.

Тестовые примеры взяты из [26] и описывают типичное поведение решения в окрестности точки сингулярности. В вычислительных экспериментах используем сетки с различным числом отрезков разбиения N . Через $\Xi_{N,G}$ обозначим величину относительной погрешности приближенного обобщенного решения \mathbf{u}^h (поле скоростей) по классическому МКЭ ($v = v^* = \mu^* = 0$) в норме пространства $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, то есть $\left(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)} \right) / \mathbf{u}_{\mathbf{W}_2^1(\Omega)}$, а через Ξ_{N,R_v} обозначим величину относительной погрешности приближенного R_v -обобщенного решения \mathbf{u}_v^h (поле скоростей) по МКЭ с весом в норме пространства

$\mathbf{W}_{2,v}^1(\Omega)$, то есть $(\mathbf{u}_v^h - \mathbf{u}_{\mathbf{W}_{2,v}^1(\Omega)}^h) / \mathbf{u}_{\mathbf{W}_{2,v}^1(\Omega)}^h$. Далее, через $Err_{N,G}$ и Err_{N,R_v} обозначим отношения погрешностей, полученных на сетках с числом отрезков разбиения N и $2N$: $Err_{N,G} = \Xi_{N,G} / \Xi_{2N,G}$ и $Err_{N,R_v} = \Xi_{N,R_v} / \Xi_{2N,R_v}$ соответственно. Данные величины представлены в таблице 1 для разных значений угла ω . Таблица 2 содержит погрешности обоих методов (классического и с весом) в узлах множества S_Ω , а именно $|u_i^h(P_k) - u_i(P_k)|$ и $|u_{i,h}^h(P_k) - u_i(P_k)|$, $P_k \in S_\Omega$. Определена доля (в процентном отношении к общему числу) тех узлов, в которых погрешность не превосходит заданной величины Δ . Для последней в таблице 2 приведены значения $5 \cdot 10^{-7}$ и 10^{-6} .

На рисунках 1–4 в графическом виде представлены распределения погрешностей обоих методов для компонент поля скоростей в невыпуклых областях Ω_1 и Ω_2 , отличающихся величиной граничного угла ω .

Таблица 1. Относительные погрешности поля скоростей при решении классическим МКЭ – $\Xi_{N,G}$,

и предложенным МКЭ с весом – Ξ_{N,R_v} , при разных значениях граничного угла ω и различном числе отрезков разбиения N

	ν	δ	ν^*	$N = 200$	$Err_{200,G}$	$N = 400$	$Err_{400,G}$	$N = 800$
$\omega = 3\pi/2$								
$\Xi_{N,G}$	0	–	0	$2,968 \cdot 10^{-2}$	1,446	$2,052 \cdot 10^{-2}$	1,457	$1,408 \cdot 10^{-2}$
Ξ_{N,R_v}	2,0	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,35	$1,234 \cdot 10^{-2}$	2,020	$6,108 \cdot 10^{-3}$	1,992	$3,065 \cdot 10^{-3}$
	2,0	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,45	$1,768 \cdot 10^{-2}$	1,983	$8,914 \cdot 10^{-3}$	2,028	$4,394 \cdot 10^{-3}$
	1,9	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,35	$1,199 \cdot 10^{-2}$	1,995	$6,010 \cdot 10^{-3}$	1,987	$3,024 \cdot 10^{-3}$
	1,9	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,45	$1,598 \cdot 10^{-2}$	1,978	$8,077 \cdot 10^{-3}$	2,010	$4,018 \cdot 10^{-3}$
$\omega = 5\pi/4$								
$\Xi_{N,G}$	0	–	0	$1,117 \cdot 10^{-2}$	1,590	$7,024 \cdot 10^{-3}$	1,594	$4,405 \cdot 10^{-3}$
Ξ_{N,R_v}	1,9	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,25	$5,590 \cdot 10^{-3}$	2,006	$2,786 \cdot 10^{-3}$	2,011	$1,385 \cdot 10^{-3}$
	1,9	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,35	$7,973 \cdot 10^{-3}$	1,994	$3,998 \cdot 10^{-3}$	2,007	$1,992 \cdot 10^{-3}$
	1,8	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,25	$5,069 \cdot 10^{-3}$	1,996	$2,539 \cdot 10^{-3}$	1,991	$1,275 \cdot 10^{-3}$
	1,8	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,35	$7,287 \cdot 10^{-3}$	1,998	$3,646 \cdot 10^{-3}$	1,988	$1,834 \cdot 10^{-3}$
$\omega = 9\pi/8$								
$\Xi_{N,G}$	0	–	0	$3,239 \cdot 10^{-3}$	1,743	$1,858 \cdot 10^{-3}$	1,743	$1,066 \cdot 10^{-3}$
Ξ_{N,R_v}	1,8	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,15	$2,100 \cdot 10^{-3}$	2,011	$1,044 \cdot 10^{-3}$	1,996	$5,229 \cdot 10^{-4}$
	1,8	$1,23 \cdot 10^{-2}$	0,25	$3,166 \cdot 10^{-3}$	1,982	$1,597 \cdot 10^{-3}$	2,026	$7,882 \cdot 10^{-4}$
	1,7	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,15	$2,020 \cdot 10^{-3}$	2,005	$1,007 \cdot 10^{-3}$	2,007	$5,015 \cdot 10^{-4}$
	1,7	$1,27 \cdot 10^{-2}$	0,25	$3,220 \cdot 10^{-3}$	2,008	$1,603 \cdot 10^{-3}$	1,996	$8,030 \cdot 10^{-4}$

Таблица 2. Количество узлов, в которых погрешность не превосходит заданную величину Δ

ω	Δ	Обобщенное решение ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0$)			R_v -обобщенное решение ($\nu = 1,9; \delta = 1,23 \cdot 10^{-2}$)		
		$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$
$3\pi/2$	$5 \cdot 10^{-7}$	3,68	7,59	11,88	7,04	29,83	52,71
	10^{-6}	7,37	11,35	17,84	13,21	49,17	68,87
$5\pi/4$	$5 \cdot 10^{-7}$	9,25	34,47	46,78	20,01	47,22	78,89
	10^{-6}	20,02	41,57	60,31	31,35	59,74	90,93
$9\pi/8$	$5 \cdot 10^{-7}$	21,40	55,54	80,81	29,46	64,17	89,64
	10^{-6}	29,50	76,67	90,23	38,28	87,22	93,66

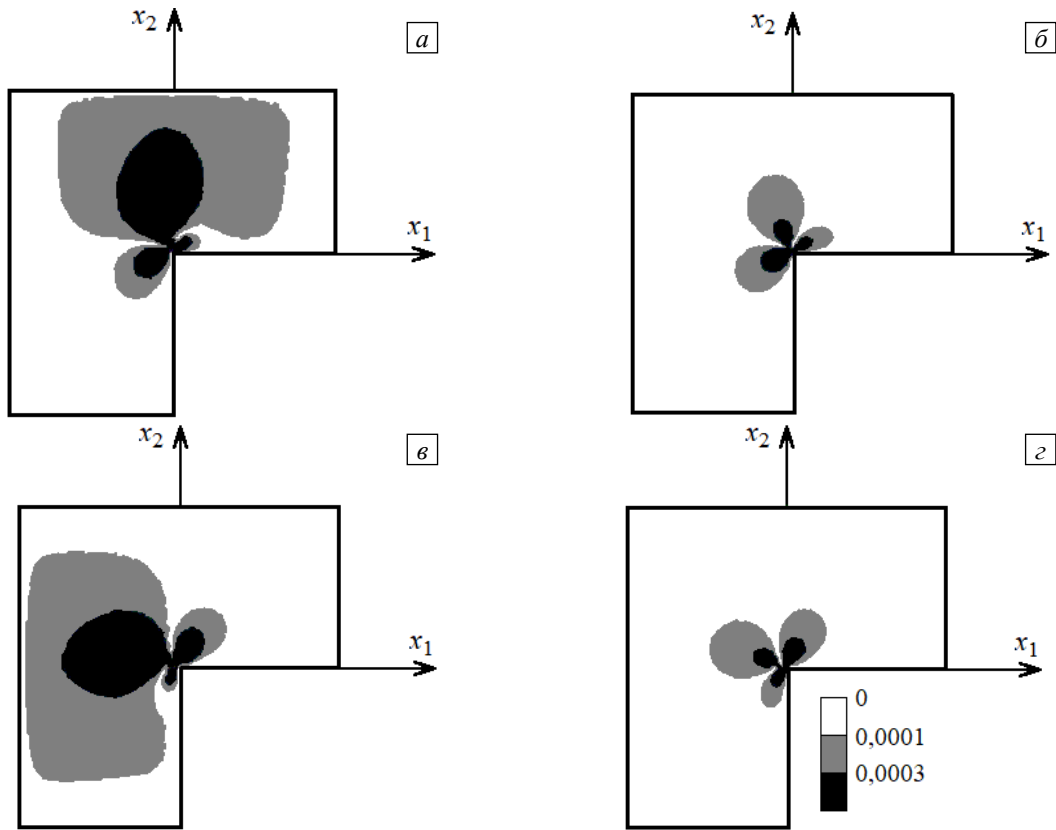


Рис. 1. Погрешности обобщенного решения в области Ω_1 ($\omega=3\pi/2$) при $v=v^*=\mu^*=0$ и различных значениях шага сетки h : для первой компоненты поля скоростей $h=0,01$ (а), $h=0,005$ (б) для второй $h=0,01$ (в), $h=0,005$ (г)

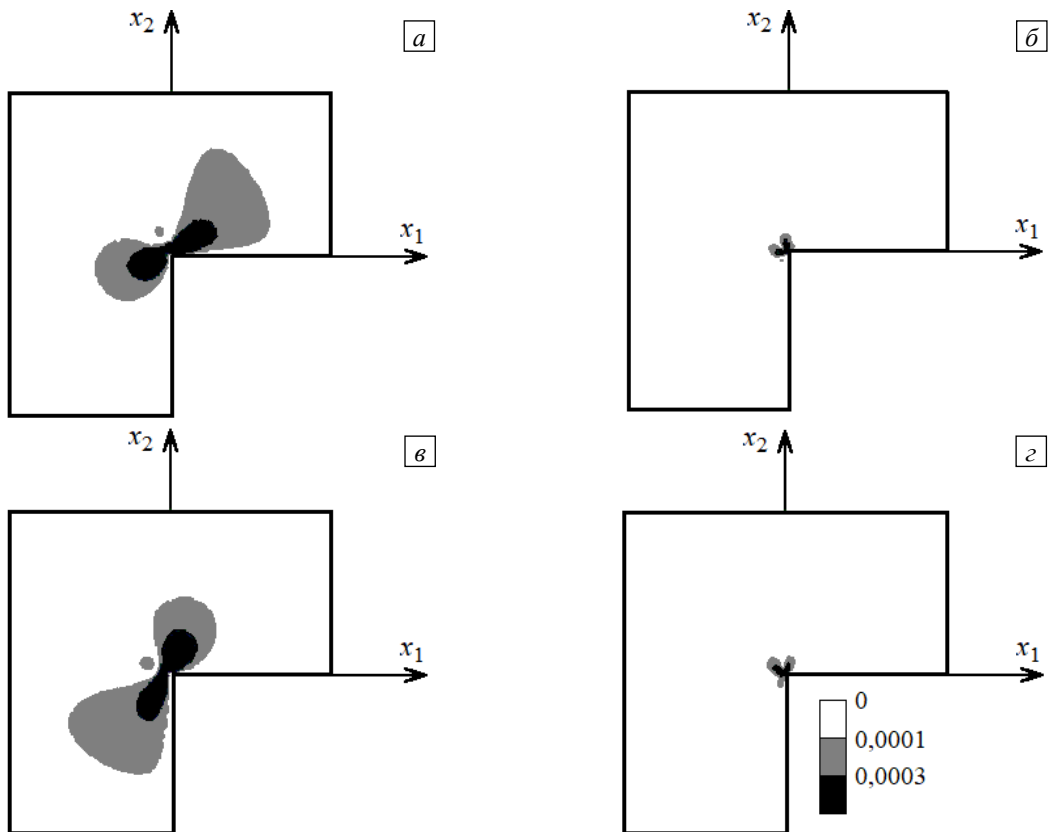


Рис. 2. Погрешности R_v -обобщенного решения в области Ω_1 ($\omega=3\pi/2$) при $v=1,9$, $v^*=\mu^*=0,3$, $\delta=0,0124$ и различных значениях шага сетки h : для первой компоненты поля скоростей $h=0,01$ (а), $h=0,005$ (б); для второй $h=0,01$ (в), $h=0,005$ (г)

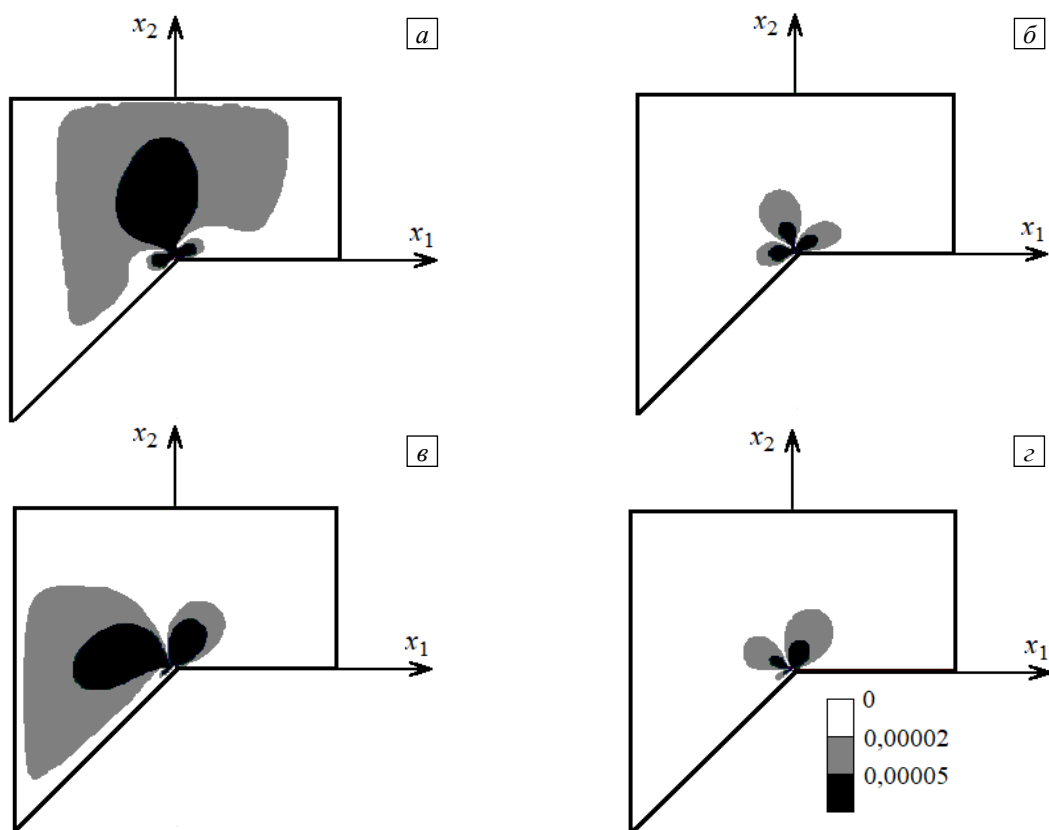


Рис. 3. Погрешности обобщенного решения в области Ω_2 ($\omega=5\pi/4$) при $v=v^*=\mu^*=0$ и различных значениях шага сетки h : для первой компоненты поля скоростей $h=0,01$ (а), $h=0,005$ (б); для второй – $h=0,01$ (в), $h=0,005$ (г)

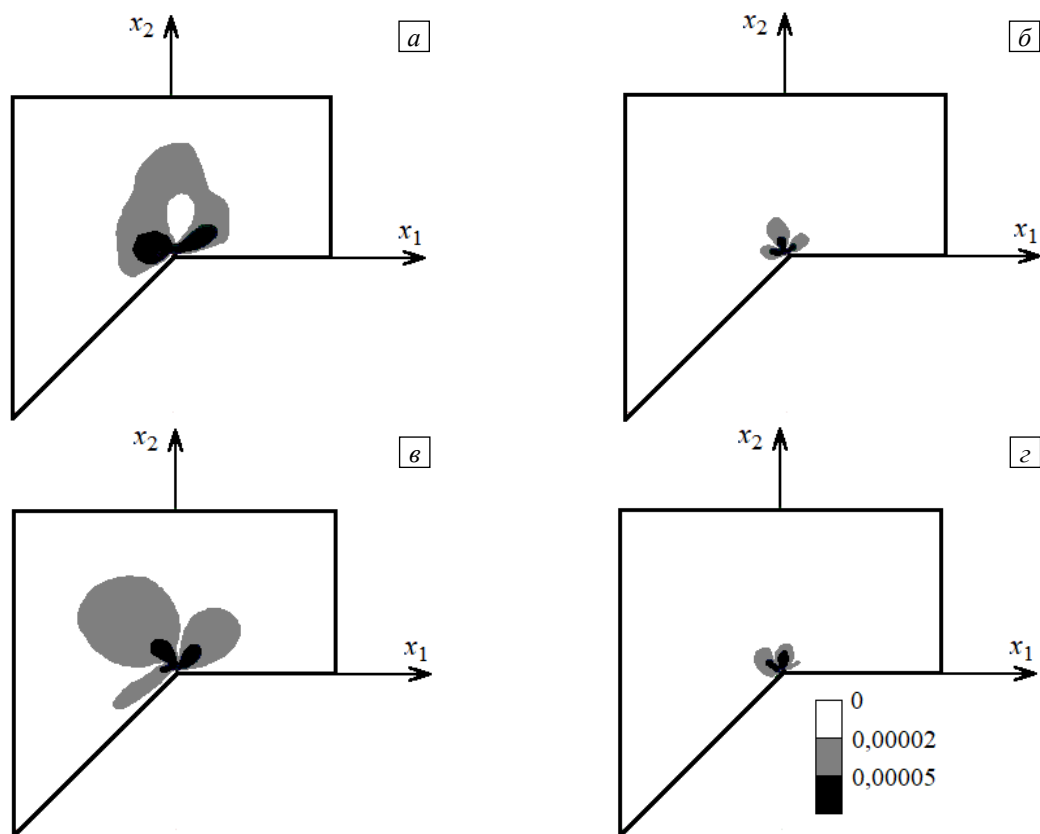


Рис. 4. Погрешности R_v -обобщенного решения в области Ω_2 ($\omega=5\pi/4$) при $v=1,9$, $v^*=\mu^*=0,15$, $\delta=0,0124$ и различных значениях шага сетки h : для первой компоненты поля скоростей $h=0,01$ (а), $h=0,005$ (б); для второй – $h=0,01$ (в), $h=0,005$ (г)

5. Заключение

Предложенный МКЭ с весом, основанный на определении R_ν -обобщенного решения, дает существенное преимущество (по порядку погрешности относительно шага сетки h) по сравнению с классическим МКЭ. При этом порядок сходимости приближенного решения к точному решению нелинейной задачи (1)–(3) не зависит от величины угла ω на границе расчетной области, большего π , и равен $O(h)$ в норме пространства $W_{2,\nu}^1(\Omega)$. Результат достигается без геометрического сгущения сетки в окрестности точки сингулярности. В то время как приближенное решение, согласно классическому МКЭ, сходится к точному решению задачи со скоростью, зависящей от величины ω и существенно меньшей, чем единица по отношению к h , а именно $O(h^{0.8})$ для угла $9\pi/8$, $O(h^{0.67})$ для угла $5\pi/4$ и $O(h^{0.54})$ для угла $3\pi/2$, порядок уменьшается с увеличением угла ω (см. Табл. 1). Свободные параметры предложенного метода (ν и δ) не зависят от величины ω , при этом первый из них необходимо брать порядка 2, а второй — порядка h . Остальные свободные параметры подхода (ν^* и μ^*) должны совпадать друг с другом, быть положительными (близкими к величине $1-\lambda_k$) и, следовательно, убывать с уменьшением ω . Метод прост в реализации и применим не только в механике жидкостей, но и для других задач механики.

Результаты получены с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Дальневосточный вычислительный ресурс» ИАПУ ДВО РАН (<https://cc.dvo.ru>).

Литература

1. Jang D.K., Pyo J.H. Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities // J. Korean Soc. Ind. Appl. Math. 2019. Vol. 23. P. 115-138. <https://doi.org/10.12941/jksiam.2019.23.115>
2. Choi H.J., Kweon J.R. A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes equations on a non-convex polygon // J. Comput. Appl. Math. 2016. Vol. 292. P. 342-362. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.07.006>
3. John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U. Energy-corrected finite element methods for the Stokes system // IMA J. Numer. Anal. 2017. Vol. 37. P. 687-729. <https://doi.org/10.1093/imanum/drw008>
4. Babuska I., Strouboulis T. The finite element method and its reliability. Oxford University Press, 2001. 814 pp.
5. Рукавишников В.А. О дифференциальных свойствах R_ν -обобщенного решения задачи Дирихле // ДАН. 1989. Т. 309, № 6. С. 1318-1320.
6. Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Существование и единственность R_ν -обобщенного решения задачи Дирихле для системы Ламе с угловой сингулярностью // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 848-856. <https://doi.org/10.1134/S0374064119060104>
7. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. On the Dirichlet problem with corner singularity // Mathematics. 2020. Vol. 8. 1870. <https://doi.org/10.3390/math8111870>
8. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity // J. Comput. Appl. Math. 2018. Vol. 341. P. 144-156. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.04.014>
9. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method for elasticity problem with a crack // Comput. Struct. 2021. Vol. 243. 106400. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106400>
10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Numerical method for Dirichlet problem with degeneration of the solution on the entire boundary // Symmetry. 2019. Vol. 11. 1455. <https://doi.org/10.3390/sym11121455>
11. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Mathematical model of the pipeline with the angular joint of elements // Math. Meth. Appl. Sci. 2020. Vol. 43. P. 7550-7568. <https://doi.org/10.1002/mma.5751>
12. Рукавишников В.А., Рукавишников А.В. Метод численного решения одной стационарной задачи гидродинамики в конвективной форме в ω -образной области // Компьютерные исследования и моделирование. 2020. Т. 12, № 6. С. 1291-1306. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2020-12-6-1291-1306>
13. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Error estimate FEM for the Nikol'skij–Lizorkin problem with degeneracy // J. Comput. Appl. Math. 2022. Vol. 403. 113841. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113841>
14. Olshanskii M.A., Reusken A. Navier–Stokes equations in rotation form: A robust multigrid solver for the velocity problem // SIAM J. Sci. Comput. 2002. Vol. 23. P. 1683-1706. <https://doi.org/10.1137/S1064827500374881>
15. Codina R., Soto O. Finite element solution of the Stokes problem with dominating Coriolis force // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1997. Vol. 142. P. 215-234. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01141-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01141-3)
16. Armaly B., Durst F., Pereira J.C.F., Schoenung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow // J. Fluid. Mech. 1983. Vol. 127. P. 473-496. <https://doi.org/10.1017/S0022112083002839>
17. Boger D.V., Rama Murthy A.V. Flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction // Rheol. Acta. 1972. Vol. 11. P. 61-69. <https://doi.org/10.1007/BF01992871>
18. Benzi M., Golub G.H., Liesen J. Numerical solution of saddle point problems // Acta Numerica. 2005. Vol. 14. P. 1-137. <https://doi.org/10.1017/S0962492904000212>
19. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid. Mech. 1964. Vol. 18. P. 1-18. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000015>
20. Girault V., Raviart P.-A. Finite element methods for Navier–Stokes equations. Theory and algorithms. Springer-Verlag, 1986. 376 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61623-5>
21. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Численный анализ весового метода конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 6. С. 89-103.
22. Rukavishnikov V.A. Body of optimal parameters in the weighted finite element method for the crack problem // J. Comput. Appl. Mech. 2021. Vol. 7. P. 2159-2170. <https://doi.org/10.22055/JACM.2021.38041.3142>

23. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991. 350 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3172-1>
24. Vogelius M. An analysis of the p-version of the finite element method for nearly incompressible materials. Uniformly valid, optimal error estimates // *Numer. Math.* 1983. Vol. 41. P. 39-53. <http://doi.org/10.1007/BF01396304>
25. Qin J. On the convergence of some low order mixed finite element for incompressible fluids / PhD Dissertation in Mathematics. Pennsylvania State University, 1994. 104 p.
26. Dauge M. Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. Part I. Linearized equations // *SIAM J. Math. Anal.* 1989. Vol. 20. P. 74-97. <http://doi.org/10.1137/0520006>

References

1. Jang D.K., Pyo J.H. Algorithms to apply finite element dual singular function method for the Stokes equations including singularities. *J. Korean Soc. Ind. Appl. Math.*, 2019, vol. 23, pp. 115-138. <https://doi.org/10.12941/jksiam.2019.23.115>
2. Choi H.J., Kweon J.R. A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes equations on a non-convex polygon. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 292, pp. 342-362. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.07.006>
3. John L., Pustejovska P., Wohlmuth B., Rude U. Energy-corrected finite element methods for the Stokes system. *IMA J. Numer. Anal.*, 2017, vol. 37, pp. 687-729. <https://doi.org/10.1093/imanum/drw008>
4. Babuska I., Strouboulis T. *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, 2001. 814 pp.
5. Rukavishnikov V.A. On differentiability properties of an R_r -generalized solution of the Dirichlet problem. *Soviet Math. Dokl.*, 1990, vol. 40, pp. 653-655.
6. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Existence and uniqueness of an R_r -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, pp. 832-840. <https://doi.org/10.1134/S0012266119060107>
7. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. On the Dirichlet problem with corner singularity. *Mathematics*, 2020, vol. 8, 1870. <https://doi.org/10.3390/math8111870>
8. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Weighted finite element method for the Stokes problem with corner singularity. *J. Comput. Appl. Math.*, 2018, vol. 341, pp. 144-156. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.04.014>
9. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method for elasticity problem with a crack. *Comput. Struct.*, 2021, vol. 243, 106400. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106400>
10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov E.I. Numerical method for Dirichlet problem with degeneration of the solution on the entire boundary. *Symmetry*, 2019, vol. 11, 1455. <https://doi.org/10.3390/sym11121455>
11. Rukavishnikov V.A., Tkachenko O.P. Mathematical model of the pipeline with the angular joint of elements. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, vol. 43, pp. 7550-7568. <https://doi.org/10.1002/mma.5751>
12. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Metod chislenogo resheniya odnoy stacionarnoy zadachi gidrodinamiki v konvektivnoy forme v L-obraznoy oblasti [The method of numerical solution of the one stationary hydrodynamics problem in convective form in L-shaped domain]. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*, 2020, vol. 12, no. 6, pp. 1291-1306.
13. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Error estimate FEM for the Nikol'skiy–Lizorkin problem with degeneracy. *J. Comput. Appl. Math.*, 2022, vol. 403, 113841. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113841>
14. Olshanskii M.A., Reusken A. Navier-Stokes equations in rotation form: A robust multigrid solver for the velocity problem. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2002, vol. 23, pp. 1683-1706. <https://doi.org/10.1137/S1064827500374881>
15. Codina R., Soto O. Finite element solution of the Stokes problem with dominating Coriolis force. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1997, vol. 142, pp. 215-234. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01141-3](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01141-3)
16. Armaly B., Durst F., Pereira J.C.F., Schoenung B. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid. Mech.*, 1983, vol. 127, pp. 473-496. <https://doi.org/10.1017/S0022112083002839>
17. Boger D.V., Rama Murthy A.V. Flow of viscoelastic fluids through an abrupt contraction. *Rheol. Acta*, 1972, vol. 11, pp. 61-69. <https://doi.org/10.1007/BF01992871>
18. Benzi M., Golub G.H., Liesen J. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, 2005, vol. 14, pp. 1-137. <https://doi.org/10.1017/S0962492904000212>
19. Moffatt H.K. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid. Mech.*, 1964, vol. 18, pp. 1-18. <https://doi.org/10.1017/S0022112064000015>
20. Girault V., Raviart P.-A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*. Springer-Verlag, 1986. 376 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61623-5>
21. Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G. Numerical analysis of the weighted finite element method for the elasticity problem with singularity. *Vychislitel'nyye tekhnologii – Computational Technologies*, 2016, vol. 21, no. 6, pp. 89-103.
22. Rukavishnikov V.A. Body of optimal parameters in the weighted finite element method for the crack problem. *J. Comput. Appl. Mech.*, 2021, vol. 7, pp. 2159-2170. <https://doi.org/10.22055/JACM.2021.38041.3142>
23. Brezzi F., Fortin M. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer-Verlag, 1991. 350 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3172-1>
24. Vogelius M. An analysis of the p-version of the finite element method for nearly incompressible materials. Uniformly valid, optimal error estimates. *Numer. Math.*, 1983, vol. 41, pp. 39-53. <http://doi.org/10.1007/BF01396304>
25. Qin J. *On the convergence of some low order mixed finite element for incompressible fluids*. PhD Dissertation in Mathematics. Pennsylvania State University, 1994. 104 p.
26. Dauge M. Stationary Stokes and Navier-Stokes system on two- or three-dimensional domains with corners. Part I. Linearized equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 1989, vol. 20, pp. 74-97. <http://doi.org/10.1137/0520006>

Поступила в редакцию 20.10.2021; после доработки 21.11.2021; принята к опубликованию 23.11.2021

Сведения об авторе

Рукавишников Алексей Викторович, кфмн, доц., внс, Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН (ХО ИПМ ДВО РАН), 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, д. 54; e-mail: 78321a@mail.ru