

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.4.39](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.39)

УДК 532.5.013.4.536.25+519.

НАДКРИТИЧЕСКИЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ТАЛОЙ ВОДЫ В ОТКРЫТОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ЗАДАНЫМ ВЕРТИКАЛЬНЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

В.А. Шарифулин¹, Т.П. Любимова²¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия

Исследуется влияние интенсивности подогрева, выражаемой числом Грасгофа, на надкритические режимы тепловой конвекции талой воды в горизонтальной прямоугольной полости с аспектным отношением, равным двум. На боковых твердых границах выполняются условия теплоизоляции, а на нижней твердой и верхней свободной (горизонтальной и недеформируемой) гранях задан постоянный вертикальный поток тепла. При условии, когда средняя по полости температура близка к температуре инверсии плотности воды, в полости возможно состояние механического равновесия, в котором поверх неустойчиво стратифицированного слоя расположен устойчиво стратифицированный. Для двух случаев положения горизонтальной границы между этими слоями рассмотрена структура стационарной плоской надкритической тепловой конвекции. Расчеты проведены конечно-разностным методом на квадратной сетке с 128 узлами по горизонтальной координате и 64 – по вертикальной. Вычисления показали, что при равной толщине неустойчиво и устойчиво стратифицированных слоев надкритическая конвекция в области примерно до шести надкритичностей имеет в горизонтальном направлении двухячейную структуру с двумя (большим снизу и более слабым сверху) вихрями в каждой из ячеек. Эта двухячейная структура при увеличении надкритичности гистерезисным образом переходит в четырехячейную. Для случая, когда толщина устойчиво стратифицированного слоя в три раза меньше толщины неустойчиво стратифицированного, надкритическое конвективное течение имеет вид вытянутой по горизонтали одновихревой ячейки. С увеличением числа Грасгофа до, примерно, стократной надкритичности течение остается в целом одновихревым и не испытывает бифуркаций.

Ключевые слова: гистерезис и бифуркации, тепловая инверсия плотности, постоянный тепловой поток, конечно-разностный метод

SUPERCRITICAL CONVECTIVE FLOWS OF MELT WATER IN AN OPEN HORIZONTAL RECTANGULAR CAVITY WITH A PRESCRIBED VERTICAL HEAT FLUX

V.A. Sharifulin¹ and T.P. Liubimova²¹Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

The influence of the intensity of heating, expressed by the Grashof number, on supercritical regimes of thermal convection of melt water in a horizontal rectangular cavity with an aspect ratio of two is investigated. On the lateral solid boundaries, the thermal insulation conditions are satisfied, and a constant vertical heat flux is set on the lower solid and upper free horizontal and non-deformable edges. Under conditions when the cavity-average temperature is close to the temperature of water density inversion in the cavity, a state of mechanical equilibrium is possible, when a stably stratified layer is located on top of an unstable stratified layer. For two cases of the position of the horizontal boundary between these layers, the structure of stationary planar supercritical thermal convection is investigated. The calculations were carried out by the finite-difference method on a square grid with 128 nodes along the horizontal coordinate and 64 along the vertical one. Calculations have shown that, with an equal thickness of unstable and stably stratified layers, supercritical convection in the region up to about six supercriticalities has a two-cell structure in the horizontal direction with two (large at the bottom and weaker at the top) vortices in each of the cells. With an increase in supercriticality, this two-cell structure turns into a four-cell structure in a hysteresis manner. For the case when the thickness of the stably stratified layer is three times less than the thickness of the unstable stratified layer, the supercritical convective flow has the general form of a single-vortex cell elongated horizontally. With an increase in the Grashof number up to about a hundredfold supercriticality, it remains generally single-vortex and does not experience bifurcations.

Key words: hysteresis and bifurcations, thermal density inversion, constant heat flux, finite difference method

1. Введение

Возникновение конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости с температурной инверсией плотности и свободных недеформируемых границах исследовалось в [1]. Рассмотрен случай изотермических границ, обнаружено жесткое возбуждение конвекции. Нелинейную зависимость плотности воды от температуры автор работы Г. Веронис предложил аппроксимировать простой квадратичной формулой, которая в современных обозначениях имеет вид:

$$\rho = \rho_m \left(1 - \alpha_2 |T - T_i|^2 \right), \quad (1)$$

где ρ_m — плотность при $T = T_i$, T_i — температура инверсии плотности, $\alpha_2 = 0,8 \cdot 10^{-5} (\text{°C})^{-2}$ — эмпирический параметр. Такая зависимость с высокой степенью точности описывает поведение чистой воды при нормальном давлении в интервале температур от 0 до 8 °С, температура инверсии при этом составляет $T_i = 4$ °С.

В [2] численно (конечно-разностным методом) исследован случай заданного постоянного теплового потока на нижней границе. Критические числа Релея оказались меньше, чем найденные по линейной теории.

Изучение линейной устойчивости механического равновесия слоя с твердыми границами проводилось в [3–6]. Показано, что задача устойчивости равновесия слоя жидкости с инверсией плотности при условии твердых изотермических границ математически эквивалентна задаче устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. При этом отношение скоростей вращения внутреннего и внешнего цилиндров играет роль, аналогичную роли отношения глубины устойчиво стратифицированной части слоя к его полной толщине. Получена простая алгебраическая формула, связывающая число Тейлора и число Релея. В [3] рассмотрены случаи фиксированной температуры и фиксированного теплового потока на границах. Теоретическое и экспериментальное исследования влияния инверсии плотности на возникновение конвекции в горизонтальном слое воды с твердыми изотермическими границами осуществлено в [4]. Как аналитические, так и экспериментальные результаты показали, что наличие инверсии плотности приводит к стабилизации равновесия слоя. В [5] численно изучалось влияние положения точки инверсии плотности внутри слоя на критическое значение числа Релея и интенсивность надкритических конвективных течений с прямоугольной (в проекции на горизонтальную плоскость) формой ячеек. Для определения условий возникновения конвекции в горизонтальном слое воды вблизи точки экстремума плотности в работе [6] использовалось уравнение состояния $\rho = \rho_m (1 - \alpha |T - T_i|^\gamma)$, основанное на измерениях изменения плотности как чистой, так и соленой воды. Воде с различной соленостью соответствовали разные значения параметров α и γ . Установлено, что эффекты, связанные с наличием инверсии плотности, играют стабилизирующую роль.

Устойчивость слоя воды, образовавшегося в результате плавления льда, нагреваемого сверху постоянным радиационным потоком (на верхней границе задан тепловой поток) исследовалась в [7]. Нижняя граница слоя жидкости имела температуру плавления 0 °С. Температурная зависимость плотности полагалась кубической. Теоретически и экспериментально показано, что критическое число Релея зависит от температуры свободной поверхности T_2 , если $T_2 < 8$ °С, и не зависит от T_2 при $T_2 > 8$ °С.

Линейный анализ устойчивости равновесия проведен в [8] с учетом термокапиллярного эффекта и тепловых условий третьего рода на верхней свободной границе; нижняя граница считалась твердой и изотермической. Принятая в этой работе аппроксимация температурной зависимости плотности в виде кубического полинома дала возможность рассмотреть задачу в более широком температурном интервале, чем при квадратичной зависимости.

Влияние конечной теплопроводности массивов исследовалось в [3]. Анализ случая двух твердых массивов, показал, что при наличии температурной инверсии плотности конечная теплопроводность массивов, как и в отсутствие инверсии, ведет к дестабилизации. Качественная зависимость критического числа Релея от толщины устойчиво стратифицированного слоя $R = 1 - z_i$ (для учета влияния инверсии плотности использовалась безразмерная координата точки инверсии плотности z_i) не зависела от граничных условий. Совместный эффект как от максимума плотности, так и от конечной теплопроводности массивов, при больших отрицательных R ($z_i \gg 1$) приводил к дестабилизации величины числа Релея относительно буссинесковского предела $Ra_c = 1708$, а при увеличении R (уменьшении z_i) наблюдалась ее стабилизация.

В [9] путем расчетов спектральным методом на суперкомпьютере МГУ (г. Москва) изучались особенности развитой проникающей конвекции с максимумом плотности в середине горизонтального слоя воды, находящегося между свободными недеформируемыми плоскостями. Надкритическое течение полагалось периодическим, и для выбранной длины ячейки периодичности показано существование двух основных ветвей гистерезиса, на которых решения отличаются характерным масштабом. Через квазипериодические режимы и перемежаемость в течении описан переход к хаосу.

Задача конвекции воды, плотность которой квадратично зависит от температуры и давления, рассмотрена в [10]. Определены пределы применимости для конвекции в озере Байкал формулы Верониса (1). С этой целью методом линеаризации исследовался характер равновесного состояния горизонтального слоя воды толщиной до 1000 м со свободной границей по отношению к малым возмущениям. Обнаружено, что состояние механического равновесия слоя воды является неустойчивым. Построены нейтральные кривые и найдены критические числа Релея. Проведено сравнение с результатами решения аналогичной задачи для предельного случая, когда плотность определяется по формуле (1). Показано,

что применимость выражения Верониса ограничена глубиной слоя до 150 м, тогда как средняя глубина Байкала составляет 750 м.

В работе [11], соавторами которой являются и авторы настоящей работы, выявлено, что в единственной известной работе [3], посвященной анализу конвекции в горизонтальном слое жидкости со свободной верхней и твердой нижней границами и заданным тепловым потоком на обеих границах, при выводе линеаризованных уравнений для амплитуд возмущений потеряны два слагаемых. В результате решения далее корректно сформулированной задачи линейной устойчивости показано, что тепловые условия, соответствующие фиксированному тепловому потоку, способствуют существованию длинноволновых возмущений. Длинноволновые возмущения возможны не всегда, а лишь при достаточно толстом неустойчиво стратифицированном слое, а именно при $z_i > 5/9$ (здесь z_i — обезразмеренная по высоте всего слоя толщина неустойчиво стратифицированного подслоя). При $z_i > 0,61$ длинноволновые возмущения наиболее опасны. В области $z_i < 0,61$ наиболее опасными являются ячеистые возмущения. Определены границы устойчивости для обоих типов возмущений.

В [12] найдена форма критических возмущений в постановке работы [11]. Длинноволновые возмущения имеют вид плоскопараллельного течения, состоящего из двух или более встречных потоков. Форма ячеистых возмущений — это бесконечный набор одинаковых ячеек с плоскими вертикальными границами. В нижней части каждой ячейки располагается интенсивный вихрь, охватывающий область неустойчивой стратификации и проникающий в область устойчивой стратификации. При достаточно малых значениях z_i над этим вихрем может образовываться один или несколько все более слабых вихрей.

Исследования неустойчивости и структуры критических возмущений, проведенные в [11, 12] можно рассматривать как первые шаги в постижении более глобальной проблемы — установлению структуры и режимов конвекции в вытянутых горизонтальных открытых прямоугольных полостях с различными аспектными отношениями L (отношением горизонтального размера к высоте) при заданном вертикальном потоке тепла на горизонтальных гранях.

Анализ литературы показал, что в полостях, заполненных жидкостью с линейной зависимостью плотности от температуры, характерная длинноволновая природа неустойчивости, выясненная в рамках линейной теории устойчивости для бесконечного слоя [13], то есть для $L = \infty$, ярко проявляется уже в умеренно вытянутых полостях: с $L = 4$, $L = 3$ и даже $L = 2$ [14, 15]. В таких полостях надкритическое движение в широком интервале надкритичностей имеет вид одного крупномасштабного вытянутого вихря. При увеличении L критическое число Релея стремится к значению, определенному методами линейной теории устойчивости для бесконечного слоя. В значительно вытянутой полости ($L = 5$) только первое надкритическое движение является крупномасштабным; далее с увеличением надкритичности оно испытывает ряд гистерезисных переходов к ячеистой форме конвекции.

Таким образом, длинноволновая природа неустойчивости в жидкости без тепловой инверсии плотности имеет место уже в умеренно вытянутой полости (с аспектным отношением $L = 2$). В более вытянутых полостях она тоже присутствует, но в сильно вытянутой полости ($L = 5$) быстро становится неустойчивой, и режим конвекции меняется на ячеистый.

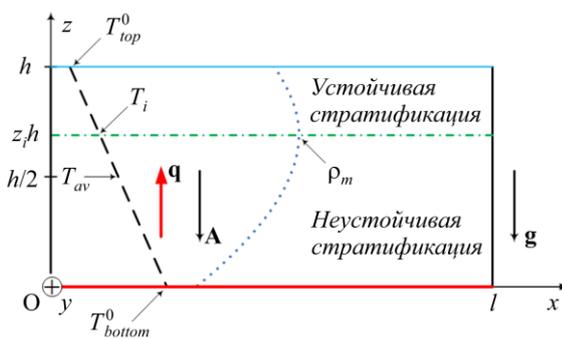


Рис. 1. Геометрия задачи; равновесное распределение температуры $T^0(z)$ показано штриховой линией, распределение плотности в состоянии механического равновесия $\rho^0(z)$ — пунктиром; штрихпунктирная линия — граница между зонами устойчивой и неустойчивой стратификации; \mathbf{q} — вектор теплового потока; \mathbf{A} — градиент температуры; \mathbf{g} — вектор силы тяжести

Анализ работ [11, 12, 14, 15] позволяет предположить, что длинноволновая природа неустойчивости в слое талой воды, то есть в жидкости с инверсией плотности, будет обнаруживаться в умеренно вытянутой полости с аспектным отношением $L = 2$.

Поэтому целью настоящей работы является исследование конечно-разностным методом устойчивости механического равновесия и надкритических режимов конвекции жидкости с тепловой инверсией плотности в горизонтальной полости с аспектным отношением $L = 2$ для двух характерных значений положения точки инверсии $z_i = 0,5$ и $z_i = 0,75$. Выбор значений z_i связан с тем, что при первом значении в бесконечном слое природа неустойчивости ячеистая, а при втором — длинноволновая.

2. Постановка задачи и метод решения

Рассмотрим горизонтальную прямоугольную полость высотой h и шириной l (Рис. 1), заполненную водой и находящуюся в однородном поле силы тяжести \mathbf{g} . На обеих горизонтальных границах $z = 0; h$

задан фиксированный вертикальный тепловой поток \mathbf{q} , боковые границы $x=0; l$ теплоизолированы. Зависимость плотности от температуры принимается квадратичной (1).

Прямоугольная правая декартова система координат $(Oxyz)$ определена так, что ось Ox проходит по более нагретой горизонтальной границе, а ось Oz — по левой теплоизолированной вертикальной. Верхняя граница полагается свободной, а все остальные границы твердые.

Для описания движения жидкости применим уравнения свободной тепловой конвекции жидкости с температурной инверсией плотности в приближении Буссинеска [11]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_m} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \alpha_2 \mathbf{g} (T - T_i)^2, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \chi \Delta T, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Здесь p — добавка к гидростатическому распределению давления в неподвижной жидкости. Коэффициенты кинематической вязкости — ν , и температуропроводности — χ , считаем постоянными. Термокапиллярным эффектом, эффектами испарения и излучения на верхней свободной границе пренебрегаем. Оценки, полученные в [10], показывают, что в условиях открытых водоемов (прудов, озер) приближение Буссинеска может быть использовано для глубин порядка сотни метров.

Запишем граничные условия:

– на теплоизолированных вертикальных стенках

$$x=0, l: \quad v=0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0; \quad (5)$$

– на твердой нижней и свободной верхней горизонтальных гранях

$$z=0: \quad v=0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -A; \quad (6)$$

$$z=h: \quad v_z=0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -A. \quad (7)$$

Из содержащихся в (5)–(7) условий для температуры (на горизонтальных границах полости задан постоянный вертикальный градиент температуры, а боковые стенки теплоизолированы) следует, что поступающее в полость через нижнюю границу в единицу времени количество теплоты равно потоку тепла через верхнюю границу. Поэтому средняя температура жидкости в слое T_{av} не зависит от интенсивности конвекции и обуславливается только начальным распределением температуры в жидкости.

Задача (2)–(7) имеет решение, соответствующее состоянию механического равновесия:

$$\mathbf{v}^0 = 0, \quad (8)$$

$$T^0 = -Az + T_{av} + \frac{Ah}{2}, \quad (9)$$

$$p^0 = -\frac{1}{3} \alpha_2 g \rho_m A^3 h^3 \left(\frac{T_{av} + Ah/2 - T_i}{Ah} - \frac{z}{h} \right)^3 + \text{const}. \quad (10)$$

Согласно (9), в состоянии механического равновесия температура на горизонтальных границах постоянна и определяется из выражений:

$$T_{bottom}^0 = T_{av} + \frac{Ah}{2}, \quad (11)$$

$$T_{top}^0 = T_{av} - \frac{Ah}{2}. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$z_i = \frac{T_{bottom}^0 - T_i}{T_{bottom}^0 - T_{top}^0}. \quad (13)$$

Подставляя сюда (11), (12) получаем:

$$z_i = \frac{T_{av} + Ah/2 - T_i}{Ah}. \quad (14)$$

Отсюда видно, что z_i является безразмерным параметром и в зависимости от соотношения средней температуры жидкости и температуры инверсии может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

С учетом (14) выражение (9) для равновесного распределения температуры переписывается в виде:

$$T^0 = T_i + Ah(z_i - z/h). \quad (15)$$

После подстановки (15) в (1) имеем распределение плотности в состоянии механического равновесия:

$$\rho^0 = \rho_m \left(1 - \alpha_2 A^2 h^2 \left(\frac{z}{h} - z_i \right)^2 \right). \quad (16)$$

Продифференцировав это соотношение по z , получаем:

$$\frac{d\rho^0}{dz} = 2\rho_m \alpha_2 A^2 h (z/h - z_i). \quad (17)$$

Как видно из формулы (17), при $z_i \leq 0$ во всем слое $d\rho^0/dz < 0$, то есть в покоящейся жидкости реализуется устойчивая стратификация. При $0 < z_i < 1$ устойчиво стратифицирована лишь верхняя часть слоя $z_i h < z < h$, а прилегающий к дну полости слой $0 < z < z_i h$ стратифицирован неустойчиво (Рис. 1). В этом случае z_i имеет ясный физический смысл безразмерной толщины неустойчиво стратифицированного слоя и является безразмерной координатой границы между устойчиво и неустойчиво стратифицированными слоями. Из (17) также следует, что при $z_i \geq 1$ весь слой жидкости стратифицирован неустойчиво.

Для средней температуры T_{av} и z_i выполняется соотношение:

$$T_{av} - T_i = Ah(z_i - 1/2). \quad (18)$$

Таким образом, z_i , указывающее на положение точки инверсии в равновесном распределении температуры в жидкости, связано простой формулой с положительно определенной средней температурой жидкости, являющейся параметром задачи. Поэтому z_i также есть параметр задачи, принимающий как положительные, так и отрицательные значения.

Введем в рассмотрение векторные потенциалы:

$$\Phi = \text{rot} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v} = \text{rot} \Psi. \quad (19)$$

Будем полагать, что надкритическое течение плоское: равна нулю y -компонента скорости и все переменные не зависят от y -координаты. Поэтому у векторных потенциалов Φ и Ψ отличными от нуля будут только y -компоненты, имеющие в плоском случае смысл завихренности и функции тока:

$$\Phi = (0, \varphi, 0), \quad \Psi = (0, \psi, 0). \quad (20)$$

Также введем в анализ отклонение температуры от температуры инверсии:

$$\tilde{T} = T - T_i. \quad (21)$$

Тогда, после осуществления операции rot по отношению к (2) и использования (19), (20), можно получить систему уравнений тепловой конвекции в переменных ψ , φ , \tilde{T} :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \Delta \varphi - \text{Gr} \tilde{T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \tilde{T}, \quad (23)$$

$$\Delta \psi + \varphi = 0. \quad (24)$$

Знак тильда у \tilde{T} далее опускаем.

Уравнения (22)–(24) записаны в безразмерном виде. Для этого введены следующие единицы измерения: времени — h^2/ν , расстояния — h , температуры — Ah , скорости — ν/h , функции тока — ν , завихренности — ν/h^2 , а также безразмерные комплексы: $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; критерий подобия Gr , который является аналогом числа Грасгофа и определяется через физические константы задачи как

$$\text{Gr} = \frac{2g\alpha_2 A^2 h^5}{\nu^2}. \quad (25)$$

Также введем в рассмотрение аналог числа Релея Ra , связанный с Gr и Pr соотношением:

$$\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr} = \frac{2g\alpha_2 A^2 h^5}{\nu\chi}. \quad (26)$$

Компоненты скорости выразим через функцию тока:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (27)$$

Тогда условия на твердой нижней и свободной верхней горизонтальных границах принимают вид:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \\ z = 1: \quad \psi = \varphi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = -1, \end{aligned} \quad (28)$$

а граничные условия на твердых боковых границах в новых переменных (в безразмерной форме) будут следующими:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \\ x = L: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $L = l/h$ — аспектное отношение.

Состояние механического равновесия, когда жидкость покоится, в новых переменных и безразмерной форме описывается уравнениями:

$$\psi^0 = \varphi^0 = 0, \quad T^0 = z_i - z. \quad (30)$$

Выражение (18), связывающее среднюю температуру жидкости с координатой точки инверсии в покое, в безразмерных переменных переписывается в виде:

$$T_{av} = z_i - 1/2. \quad (31)$$

Таким образом, решение задачи (22)–(29) определяется числом Прандтля Pr , числом Грасгофа Gr , координатой точки инверсии z_i (или средней температурой жидкости T_{av} в полости) и аспектным отношением L .

Задача (22)–(29) решалась численно, конечно-разностным методом, все пространственные производные аппроксимировались центральными разностями на равномерной сетке. Шаг сетки полагался равным $h=1/64$. Аспектное отношение в представленных ниже расчетах равнялось двум ($L=2$). При аппроксимации по времени применялась явная схема с постоянным шагом по времени $h^2/10$.

Уравнение Пуассона (24) для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации. Граничное условие для завихренности на нижней и боковых твердых стенках получалось по формулам Тома [16]. Более подробно использованный метод описан в [17].

3. Результаты расчетов

До выполнения основных расчетов, в соответствии с приведенной выше методикой, проводилась проверка сформулированной модели и разностного метода. Для этого рассчитывалось критическое число Грасгофа на основе хорошо исследованной задачи плоской конвекции в квадратной полости (то есть при аспектном отношении $L=1$) с изотермическими горизонтальными и теплоизолированными вертикальными стенками при отсутствии инверсии плотности. Критическое число Грасгофа находилось путем экстраполяции полученной в расчетах на квадратной сетке с шагом $h=1/64$ линейной зависимости квадрата функции тока от чисел Грасгофа в сторону меньших значений и затем сравнивалось с общепринятым значением, рассчитанным методами линейной теории устойчивости. Так было установлено критическое число Грасгофа $Gr_c = 255$.

Известно, что для случая теплоизолированных боковых стенок в квадратной полости округленное до четырех значащих цифр критическое число Релея составляет $Ra_c = 2585$ [18], а соответствующее ему критическое число Грасгофа при $Pr=10$, равно 258,5. Таким образом, в результате проверочного анализа выяснилось, что вычисленное критическое число Грасгофа отличается от определенного с высокой степенью точности методами линейной теории устойчивости менее чем на 1,5%, что свидетельствует об удовлетворительной точности используемых модели и численного метода решения.

Основные расчеты проведены для полости с аспектным отношением $L=2$ при двух значениях положения точки инверсии: $z_i=0,5$ и $0,75$. Число Прандтля полагалось равным $Pr=10$. По результатам расчетов для каждого из приведенных значений z_i в области находилось критическое число Грасгофа и исследовался нелинейный надкритический режим конвекции при надкритичности, достигающей нескольких десятков.

3.1. Равная толщина устойчиво и неустойчиво стратифицированных подслоев

При равной толщине слоев ($z_i=0,5$) в состоянии механического равновесия нижний слой жидкости ($0 \leq z \leq 0,5$) неустойчиво стратифицирован. Поверх него расположен устойчиво стратифицированный слой жидкости. Для бесконечно протяженной в горизонтальном направлении полости ($L=\infty$) состояние покоя жидкости (30) становится неустойчивым по отношению к малым нормальным возмущениям при превышении числом Релея критического значения $Ra_c(\infty; 0,5) = 2,32 \cdot 10^4$ [11]. Отсюда следует, что критическое число Грасгофа для бесконечно вытянутой полости и принятого в настоящей работе значения числа Прандтля $Pr=10$ равно $Gr_c(\infty; 0,5) = Ra_c(\infty; 0,5)/Pr = 2,32 \cdot 10^3$.

Рассмотрим влияние плавного увеличения числа Грасгофа на устойчивость механического равновесия. Конечный горизонтальный размер полости, ввиду наличия твердых вертикальных стенок, тормозящих развитие возмущений, приводит, как правило, к увеличению критических чисел возникновения конвективной неустойчивости [13]. Поэтому первая серия расчетов проведена для числа Грасгофа $Gr=3000$ в надежде, что оно превысит критическое, пока неизвестное, число $Gr_{cr}(2; 0,5)$ для $L=2$. В качестве начального состояния задавались следующие распределения:

$$\psi_{i,k}^0 = 0, \quad T_{i,k}^0 = 0,5 - h \cdot k, \quad \varphi_{i,k}^0 = \varphi^c. \quad (32)$$

Начальное значение завихренности φ^c во всех узлах сетки полагалось равным 10. При меньших по модулю значениях φ^c , например при $\varphi^c = 1$, происходит, как показали расчеты, затухание возмущения (32) и установление равновесного состояния покоя (30).

На рисунке 2а приведено стационарное надкритическое решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (32) с $\phi^c = 10$. Вихревая структура надкритического течения соответствует структуре, предсказанной линейной теорией [11, 12] для бесконечного слоя, то есть имеет двухъярусный вид по вертикали, с проникновением интенсивных вихрей из нижнего неустойчиво стратифицированного яруса в верхний, устойчиво стратифицированный. Нелинейность приводит к искривлению границы между ярусами, она приобретает волнообразный вид. Похожая структура надкритических течений наблюдалась для изотермических границ в [2], а также в [19, 20] при исследовании конвекции парогазовой смеси, имеющей, как и талая вода, аномальную зависимость плотности от температуры.

В последующих расчетах, при решении с другими значениями числа Грасгофа, применялся метод продолжения по параметру. За начальное состояние принималось найденное ранее для некоторого числа Грасгофа Gr_1 стационарное состояние, затем одновременно изменялось число Грасгофа на шаг ΔGr и путем численного решения задачи с этим состоянием получалось новое стационарное состояние для числа Грасгофа $Gr_2 = Gr_1 + \Delta Gr$. Величина шага по числу Грасгофа ΔGr варьировалась от $\Delta Gr = 10$ до $\Delta Gr = 500$. Расчеты показали, что такое пошаговое наращивание значения числа Грасгофа от $Gr = 3000$ до $Gr = 14500$ приводит к плавному изменению структуры надкритического течения. В каждой из конвективных ячеек центры интенсивных вихрей нижнего (неустойчиво стратифицированного) яруса сдвигаются к твердой стенке, и в каждой из конвективных ячеек происходит отрыв вихрей от нижней твердой стенки, в каждой ячейке формируется слабый, встречный по отношению к основному, вихрь (Рис. 2б). Общее число крупных вихрей становится равным шести. Наблюдается строгое разделение течения вертикальной плоской границей на две равные ячейки (режим I).

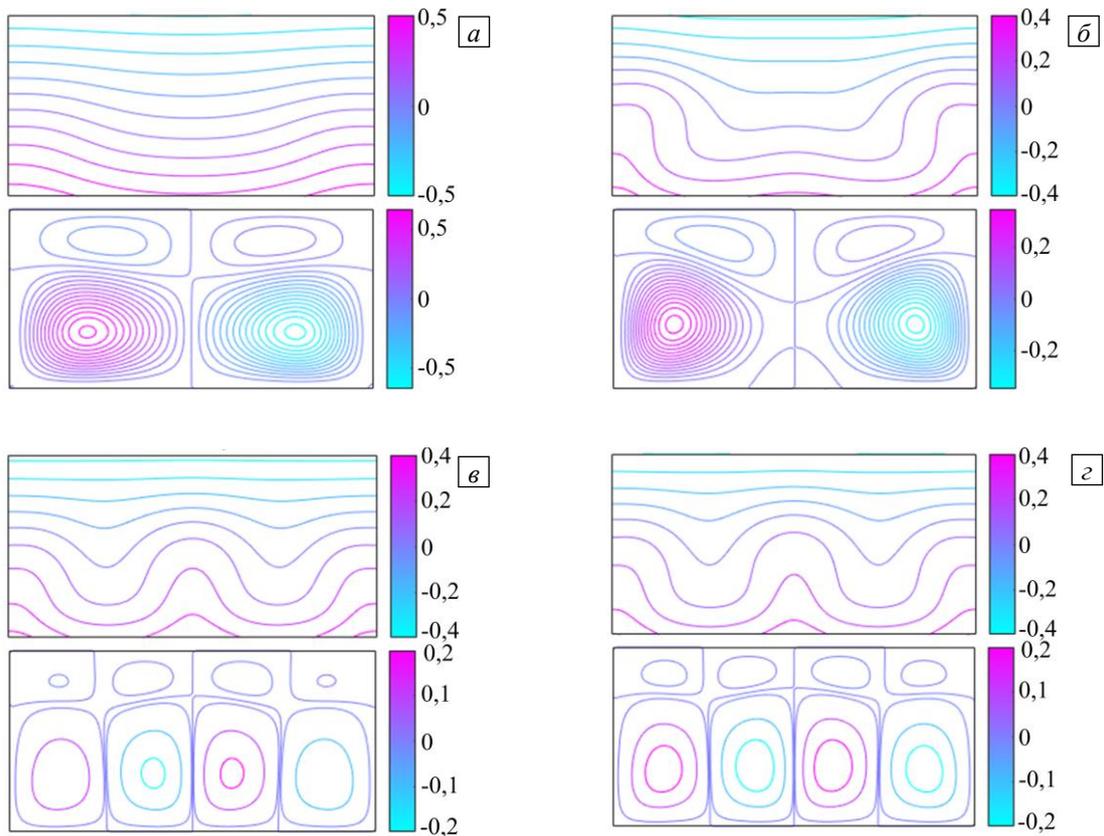


Рис. 2. Изотермы и линии тока режимов I (а, б) и II (в, г) надкритического конвективного течения при $z_i = 0,5$ для различных значений числа Грасгофа; режим I: $Gr = 3000$ (а), $Gr = 14500$ (б); режим II: $Gr = 14700$ (в), $Gr = 20000$ (г)

Дальнейшее увеличение числа Грасгофа вызывает бифуркацию, заключающуюся в удвоении числа конвективных ячеек по горизонтальной координате (Рис. 2б). Такое стационарное состояние достигается путем увеличения последнего значения числа Грасгофа ($Gr = 14500$) из режима I на $\Delta Gr = 200$. Наблюдается формирование стационарной вихревой структуры (режим II), представленной на рисунке 2в. Интенсивность конвективного течения в прилегающих к твердым вертикальным стенкам ячейках заметно слабее. Дальнейшее увеличение числа Грасгофа приводит к выравниванию интенсивностей соседних

вихрей как в нижнем, так и в верхнем ярусе (Рис. 2з). На рисунке 2з представлено стационарное состояние для $Gr = 20000$. При уменьшении числа Грасгофа (при $Gr = 13000$) имеет место переход к предыдущему режиму I с двумя равными ячейками. Переход между режимами — от I к II и обратно — осуществляется гистерезисным образом.

Для количественной характеристики изменения интенсивности надкритических движений с ростом числа Грасгофа воспользуемся зависимостью от Gr максимального по модулю значения функции тока в полости — $\psi_m(Gr)$, и удельной кинетической энергией конвективного движения — $E(Gr)$, определяемой из выражения:

$$E(Gr) = \frac{1}{2L} \int_0^L \int_0^L v^2 dz dx = \frac{1}{2L} \int_0^L \int_0^L \psi \phi dz dx. \quad (33)$$

Рассчитанные зависимости $\psi_m(Gr)$ и $E(Gr)$ для диапазона чисел Грасгофа $0 \leq Gr \leq 20000$ представлены на рисунке 3. При числах Грасгофа $2600 \leq Gr \leq 10000$ кинетическая энергия стационарных решений зависит от числа Грасгофа линейно (зависимость методом наименьших квадратов):

$$E = 2,66 \cdot 10^{-5} \cdot (Gr - 2,56 \cdot 10^3). \quad (34)$$

Экстраполируя эту зависимость на нуль, получаем критическое значение числа Грасгофа $Gr_c(2;0,5) = 2,56 \cdot 10^3$. Расчеты вблизи этого значения показали, что при $Gr=2500$ малое начальное возмущение затухает, а при $Gr=2600$ оно растет вплоть до момента начала установления стационарного режима, похожего на представленный на рисунке 2а. Учитывая, что в описанных выше тестовых расчетах с известным значением критического числа Грасгофа использованный метод показал точность не менее 1,5%, можно заключить, что экстраполированное значение критического числа Грасгофа будет отличаться от истинного менее чем на 2%. В этом же диапазоне чисел Грасгофа ($2600 \leq Gr \leq 10000$) выполняется корневой закон для максимального по модулю значения функции тока:

$$\psi_m = 3,46 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{Gr - 2,56 \cdot 10^3}. \quad (35)$$

Зависимости (34) и (35) изображены на рисунке 3 штриховыми линиями.

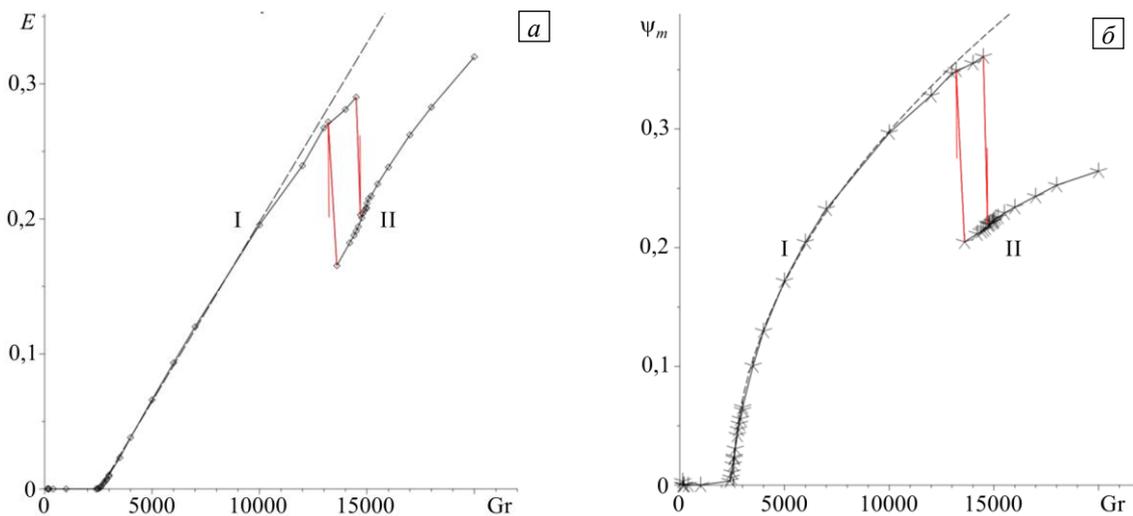


Рис. 3. Зависимости от числа Грасгофа кинетической энергии (а) и максимальной функции тока (б) в режимах I и II стационарного надкритического конвективного движения в полости для случая $z_i = 0,5$

Проверочный расчет на конечно-разностной сетке из квадратных ячеек с шагом $h = 1/128$ для значения числа Грасгофа $Gr = 20000$ показал, что картина течения до деталей соответствует представленной далее на рисунке 4з, а значение кинетической энергии отличается от полученного на сетке с шагом $h = 1/64$ менее чем на 0,07%.

3.2. Тонкий устойчиво стратифицированный подслоем поверх толстого неустойчиво стратифицированного подслоя

Рассмотрим случай, когда в полости реализуется состояние механического равновесия при нижнем слое, состоящем из трех четвертей жидкости в полости ($0 \leq z \leq 0,75$), неустойчиво стратифицированном, и поверх него расположен слой, вдвое тоньше и устойчиво стратифицированный. При бесконечной протяженности полости в горизонтальном направлении ($L = \infty$) состояние покоя жидкости (30) при $z_i > 0,61$ становится неустойчивым по отношению к длинноволновым возмущениям при превышении числом Рейля своего критического значения, определяемого по формуле[11]:

$$Ra_c(\infty; z_i) = \frac{320}{z_i - 5/9}. \tag{36}$$

Из (36) следует, что критическое число Грасгофа для бесконечно вытянутой полости и принятого в настоящей работе значения числа Прандтля $Pr = 10$ составляет: $Gr_c(\infty; 0,75) = 165$. Как правило, конечный размер слоя по горизонтали приводит к увеличению критического значения числа Грасгофа. Поэтому первая серия расчетов проведена для числа Грасгофа $Gr = 300$ в надежде, что оно превысит критическое (пока неизвестное) число $Gr_c(2; 0,75)$. Как и в рассмотренном выше случае $z_i = 0,5$, в качестве начального состояния зададим распределения (32) с регулируемым начальным возмущением φ^c .

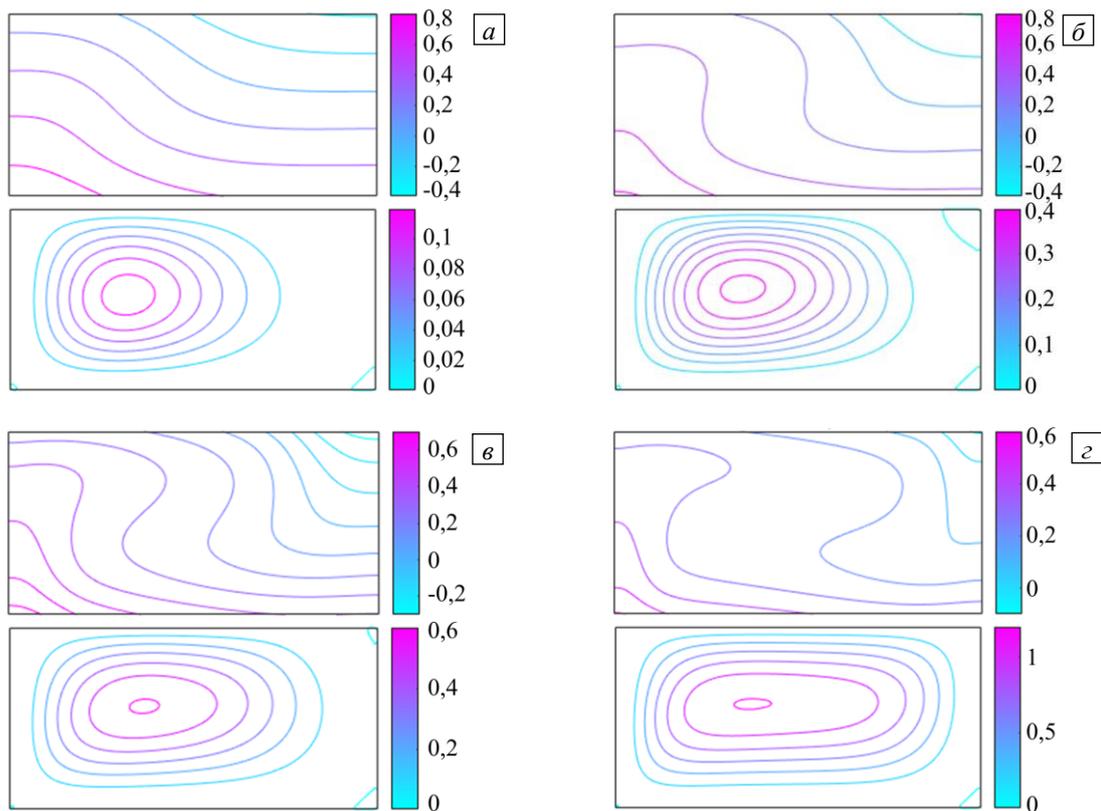


Рис. 4. Изотермы (верхний прямоугольник) и линии тока (нижний прямоугольник) надкритического конвективного течения при $z_i = 0,75$ для различных значений числа Грасгофа: 300 (а), 1000 (б), 2000 (в), 20000 (г)

На рисунке 4а представлено стационарное решение, полученное в результате численного расчета эволюции начального состояния (32) для указанного числа Грасгофа с начальным возмущением $\varphi^c = 10$. Расчеты при существенно меньших по модулю значениях φ^c , например при $\varphi^c = 1$, приводили к затуханию возмущенного состояния (32). Как видно из рисунка, надкритическое течение является одновихревым и заполняет всю полость, что говорит о длинноволновой природе неустойчивости.

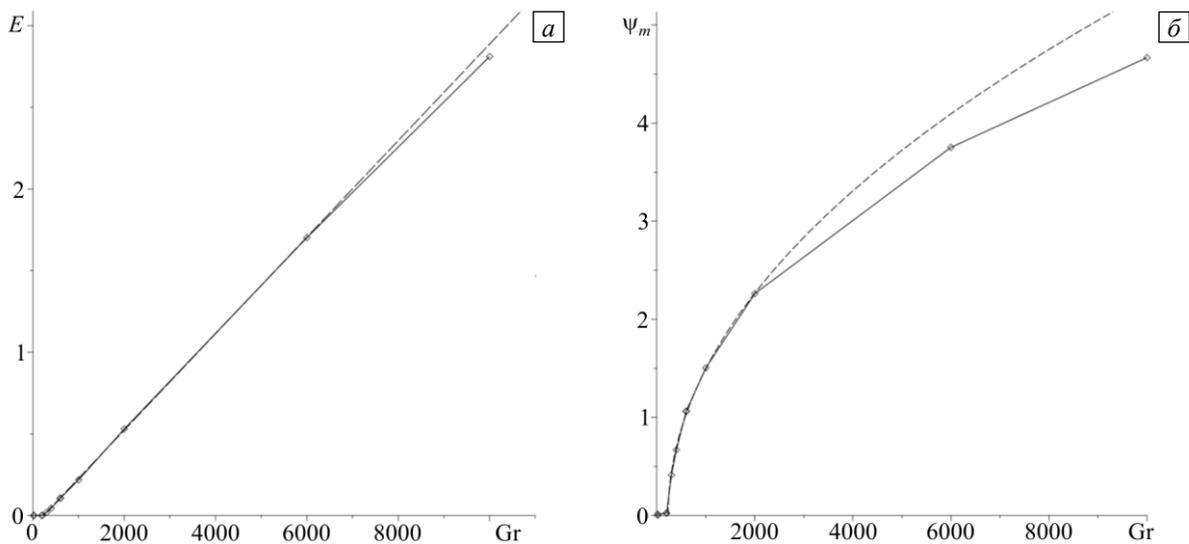


Рис. 5. Зависимости от числа Грасгофа кинетической энергии (а) и максимальной функции тока (б) стационарного надкритического конвективного движения в полости для случая $z_i = 0,75$

Расчеты, показали, что пошаговое увеличение числа Грасгофа от $Gr = 300$ до $Gr = 20000$ не приводит к качественному изменению структуры надкритического течения. Оно остается одновихревым, что подтверждает его длинноволновую природу (см. Рис 4б–г). Нессиметричность течения обусловлена началом формирования восходящего течения в конвективном пограничном слое около левой вертикальной стенки; в результате центр вихря смещается. Полученные в расчетах методом наименьших квадратов зависимости $\psi_m(Gr)$ и $E(Gr)$ для диапазона чисел Грасгофа $0 \leq Gr \leq 10000$ представлены на рисунке 5. В области чисел Грасгофа $250 \leq Gr \leq 2500$ кинетическая энергия стационарных решений зависит от числа Грасгофа линейно:

$$E = 2,96 \cdot 10^{-4} \cdot (Gr - 2,30 \cdot 10^2). \quad (37)$$

Экстраполируя зависимость (37) на нуль, находим критическое значение числа Грасгофа $Gr_c(2; 0,75) = 2,30 \cdot 10^2$. Расчеты вблизи этого значения показали, что начальное малое возмущение для $Gr = 200$ затухает, а при $Gr = 250$ нарастает до установления стационарного режима, показанного на рисунке 4а для $Gr = 300$. Учитывая приведенную выше точность тестовых расчетов задачи для условий с известным значением критического числа Грасгофа, можно полагать, что экстраполированное значение критического числа Грасгофа отличается от истинного менее чем на 2%. В этом же диапазоне чисел Грасгофа выполняется корневой закон для максимальной по модулю функции тока:

$$\psi_m = 1,46 \cdot 10^{-2} \cdot \sqrt{Gr - 2,30 \cdot 10^2}. \quad (38)$$

Проверочный расчет на квадратной сетке с шагом $h = 1/128$ для значения числа Грасгофа $Gr = 20000$ показал, что картина течения до деталей соответствует представленной на рисунке 4г, а максимальное значение кинетической энергии отличается от полученного на сетке с шагом $h = 1/64$ менее чем на 0,04%.

4. Заключение

Расчеты показали, что в умеренно вытянутой горизонтальной полости с аспектным отношением $L = 2$ для случая $z_i = 0,5$, когда толщина неустойчиво стратифицированного слоя $1 - z_i$ равна толщине устойчиво стратифицированного слоя z_i , надкритическое течение демонстрирует по горизонтальной координате двухячеистую структуру. Вертикальная структура ячеек имеет сложный двухярусный характер, изменяющийся с увеличением интенсивности подогрева. При $z_i = 0,75$ структура надкритического течения простая, одновихревая, плавно деформирующаяся с ростом интенсивности подогрева.

При равной толщине устойчиво и неустойчиво стратифицированных слоев ($z_i = 0,5$) двухячеистое надкритическое течение в области примерно шестикратной надкритичности гистерезисным образом

переходит в четырехячеечное течение. Когда же толщина устойчиво стратифицированного слоя $1 - z_i$ в три раза меньше толщины неустойчиво стратифицированного $z_i = 0,75$, надкритическое конвективное течение в целом приобретает вид вытянутой по горизонтали одноячейковой ячейки. С увеличением числа Грасгофа до значения, отвечающего примерно стократной надкритичности, течение остается одноячейковым и не испытывает бифуркаций.

Отметим, что с увеличением интенсивности теплопередачи через слой в центральной области полости вблизи поверхности и дна формируется выраженное плоскопараллельное течение (см. Рис. 4z). Поэтому в дальнейшем необходимо оценить устойчивость этого плоскопараллельного течения по отношению к плоским ячеистым возмущениям.

Расчеты показали, что при числах Грасгофа, превышающих 20000 на 10÷20%, возникают колебательные режимы конвекции, для рассмотрения и классификации которых планируется проведение дополнительных исследований, в которых предполагается учет термокапиллярного эффекта на свободной границе. Возможно, он может привести к возникновению нового механизма ячеистой неустойчивости.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках совместного российско-германского проекта 20-51-12010 ННИО_а и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № FSNM-2020-0026).

Литература

1. *Veronis G.* Penetrative convection // *Astrophys. J.* 1963. Vol. 137, No. 2. P. 641-663.
2. *Moore D.R., Weiss N.O.* Nonlinear penetrative convection // *J. Fluid Mech.* 1973. Vol. 61. P. 553-581. <https://doi.org/10.1017/S0022112073000868>
3. *Merker G.P., Waas P., Straub J., Grigull U.* Einsetzen der Konvektion in einer von unten gekühlten Wasserschicht bei Temperaturen unter 4° C // *Warme- und Stoffübertrag.* 1976. Vol. 9. P. 99-110. <https://doi.org/10.1007/BF01589463>
4. *Hwang L.-T., Lu W.-F., Mollendorf J.C.* The effects of the density extremum and boundary conditions on the stability of a horizontally confined water layer // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1984. Vol. 27. P. 497-510. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90023-1)
5. *Надолин К.А.* Конвекция в горизонтальном слое жидкости при инверсии удельного объема // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1989. №1. С. 43-49. (English version <https://doi.org/10.1007/BF01051475>)
6. *Mollendorf J.C., Jahn K.H.* Onset of convection in a horizontal layer of cold water // *J. Heat Transfer.* 1983. Vol. 105. P. 460-464. <https://doi.org/10.1115/1.3245607>
7. *Seki N., Fukusako S., Sugawara M.A.* Criterion of onset of free convection in a horizontal melted water layer with free surface // *J. Heat Transfer.* 1977. Vol. 99. P. 92-98. <https://doi.org/10.1115/1.3450661>
8. *Wu R.-S., Cheng K.C.* Maximum density effects on thermal instability induced by combined buoyancy and surface tension // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1976. Vol. 19. P. 559-565. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(76\)90170-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(76)90170-8)
9. *Kuznetsova D.V., Sibgatullin I.N.* Transitional regimes of penetrative convection in a plane layer // *Fluid Dyn. Res.* 2012. Vol. 44. 031410. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/44/3/031410>
10. *Бекежанова В.Б.* Исследование устойчивости равновесного состояния в модели конвекции с нелинейной зависимостью плотности от температуры и давления // *ПМТФ.* 2007. Т. 48, № 2. С. 66-74. (English version <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0026-7>)
11. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Шарифулин В.А.* Возникновение конвекции в горизонтальном слое жидкости с инверсией плотности в условиях заданного теплового потока на границах // *Изв. РАН. МЖГ.* 2012. № 4. С. 23-29. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462812040035>)
12. *Sharifulin V.A., Lyubimova T.P.* Structure of critical perturbations in a horizontal layer of melted water with the prescribed heat flux at the boundaries // *IOP Conf. Series: Mater. Sci. Eng.* 2017. Vol. 208. 012025. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012025>
13. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
14. *Sharifulin V.A., Lyubimova T.P.* Supercritical convection of water in an elongated cavity at a given vertical heat flux // *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.* 2021. Vol. 14, No. 2. P. 186-194. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-2-186-194>
15. *Sharifulin V.A., Lyubimova T.P.* A hysteresis of supercritical water convection in an open elongated cavity at a fixed vertical heat flux // *Microgravity Sci. Technol.* 2021. Vol. 33. 38. <https://doi.org/10.1007/s12217-021-09887-3>
16. *Thom A., Apelt C.J.* Field computations in engineering and physics. Van Nostrand, 1961. 165 p.
17. *Sharifulin A.N., Poludnitsin A.N.* The borders of existence of anomalous convection flow in the inclined square cylinder: Numerical determination // *St. Petersburg Polytech. Univ. J.: Phys. and Math.* 2016. Vol. 2. P. 150-156. <http://dx.doi.org/10.1016/j.spjpm.2016.05.013>
18. *Mizushima J.* Onset of the thermal convection in a finite two-dimensional box // *J. Phys. Soc. Jpn.* 1995. Vol. 64. P. 2420-2432. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.64.2420>
19. *Palymskiy I.B., Fomin P.A., Li Y.-R., Wu C.-M.* Rayleigh–Benard convection in a gas-vapor medium at the temperature close to the critical temperature // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2019. Vol. 1382. 012200. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1382/1/012200>
20. *Zhang L., Hu Y.-P., Yu J.-J., Li Y.-R.* Rayleigh–Bénard convection of a gas-vapor mixture with abnormal dependence of thermal expansion coefficient on temperature // *Int. Comm. Heat Mass Tran.* 2021. Vol. 124. 105245. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105245>

References

1. Veronis G. Penetrative convection. *Astrophys. J.*, 1963, vol. 137, no. 2, pp. 641-663.
2. Moore D.R., Weiss N.O. Nonlinear penetrative convection. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 61, pp. 553-581. <https://doi.org/10.1017/S0022112073000868>
3. Merker G.P., Waas P., Straub J., Grigull U. Einsetzen der Konvektion in einer von unten gekühlten Wasserschicht bei Temperaturen unter 4° C. *Warme- und Stoffübertrag.*, 1976, vol. 9, pp. 99-110. <https://doi.org/10.1007/BF01589463>
4. Hwang L.-T., Lu W.-F., Mollendorf J.C. The effects of the density extremum and boundary conditions on the stability of a horizontally confined water layer. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1984, vol. 27, pp. 497-510. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90023-1](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90023-1)
5. Nadolin K.A. Convection in a horizontal fluid layer with specific-volume inversion. *Fluid Dyn.*, 1989, vol. 24, pp. 35-41. <https://doi.org/10.1007/BF01051475>
6. Mollendorf J.C., Jahn K.H. Onset of convection in a horizontal layer of cold water. *J. Heat Transfer*, 1983, vol. 105, pp. 460-464. <https://doi.org/10.1115/1.3245607>
7. Seki N., Fukusako S., Sugawara M.A. Criterion of onset of free convection in a horizontal melted water layer with free surface. *J. Heat Transfer*, 1977, vol. 99, pp. 92-98. <https://doi.org/10.1115/1.3450661>
8. Wu R.-S., Cheng K.C. Maximum density effects on thermal instability induced by combined buoyancy and surface tension. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1976, vol. 19, pp. 559-565. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(76\)90170-8](https://doi.org/10.1016/0017-9310(76)90170-8)
9. Kuznetsova D.V., Sibgatullin I.N. Transitional regimes of penetrative convection in a plane layer. *Fluid Dyn. Res.*, 2012, vol. 44, 031410. <https://doi.org/10.1088/0169-5983/44/3/031410>
10. Bekezhanova V.B. Stability of the equilibrium state in a convection model with nonlinear temperature and pressure dependences of density. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, pp. 200-207. <https://doi.org/10.1007/s10808-007-0026-7>
11. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Sharifulin V.A. Onset of convection in a horizontal fluid layer in the presence of density inversion under given heat fluxes at its boundaries. *Fluid Dyn.*, 2012, vol. 47, pp. 448-453. <https://doi.org/10.1134/S0015462812040035>
12. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. Structure of critical perturbations in a horizontal layer of melted water with the prescribed heat flux at the boundaries. *IOP Conf. Series: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, 012025. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012025>
13. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective stability of incompressible fluids*. Israel Program for Scientific Translations, 1976. 337 p.
14. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. Supercritical convection of water in an elongated cavity at a given vertical heat flux. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. 186-194. <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2021-14-2-186-194>
15. Sharifulin V.A., Lyubimova T.P. A hysteresis of supercritical water convection in an open elongated cavity at a fixed vertical heat flux. *Microgravity Sci. Technol.*, 2021, vol. 33, 38. <https://doi.org/10.1007/s12217-021-09887-3>
16. Thom A., Apelt C.J. *Field computations in engineering and physics*. Van Nostrand, 1961. 165 p.
17. Sharifulin A.N., Poludnitsin A.N. The borders of existence of anomalous convection flow in the inclined square cylinder: Numerical determination. *St. Petersburg Polytech. Univ. J.: Phys. and Math.*, 2016, vol. 2, pp. 150-156. <http://dx.doi.org/10.1016/j.spjpm.2016.05.013>
18. Mizushima J. Onset of the thermal convection in a finite two-dimensional box. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1995, vol. 64, pp. 2420-2432. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.64.2420>
19. Palymskiy I.B., Fomin P.A., Li Y.-R., Wu C.-M. Rayleigh–Benard convection in a gas-vapor medium at the temperature close to the critical temperature. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1382, 012200. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1382/1/012200>
20. Zhang L., Hu Y.-P., Yu J.-J., Li Y.-R. Rayleigh–Bénard convection of a gas-vapor mixture with abnormal dependence of thermal expansion coefficient on temperature. *Int. Comm. Heat Mass Tran.*, 2021, vol. 124, 105245. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2021.105245>

Поступила в редакцию 09.07.2021; после доработки 06.12.2021; принята к опубликованию 06.12.2021

Сведения об авторах

Шарифулин Вадим Альбертович, ст. преп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29а; e-mail: vadsharif@bk.ru

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: lyubimova@mail.ru