

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.4.37](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.37)

УДК 532.5

РАССЕЯНИЕ ФОНОНОВ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ НА ДИСКРЕТНЫХ БРИЗЕРАХ В ЦЕПОЧКЕ ФЕРМИ–ПАСТА–УЛАМА–ЦИНГОУ

С.В. Дмитриев^{1,2}, А.Ю. Моркина^{2,3}, Е.А. Корзникова^{2,3}, О.Б. Наймарк⁴, А.С. Никитюк⁴, М. Baggioli^{5,6}¹Институт математики с вычислительным центром РАН, Уфа, Российская Федерация²Институт физики молекул и кристаллов РАН, Уфа, Российская Федерация³Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Российская Федерация⁴Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация⁵Квантовый центр Вильчека, Школа физики и астрономии, Шанхай, Китай⁶Шанхайский исследовательский центр квантовых наук, Шанхай, Китай

В конденсированных средах существует два традиционно обсуждаемых вида дисперсионных соотношений: бесщелевые фононные и с энергетической или частотной щелью. В различных областях физики конденсированного состояния имеет место третий тип дисперсионных соотношений, которые соответствуют щелевым эффектам в k -пространстве – Gapped Momentum States (GMS). Возрастающий интерес к GMS-состояниям связан с важными следствиями для динамических и термодинамических свойств систем (для гидродинамической турбулентности, пластичности, разрушения). Как правило, GMS возникают в подходе Максвелла–Френкеля применительно к вязкоупругим свойствам жидкости и твердого тела, когда щели могут непрерывно изменяться от энергетического к импульсному пространству. Настоящая работа является первой из цикла исследований, посвященных анализу дисперсионных эффектов, связанных с ангармоничностью потенциала, возникновением коллективных мод бризерного типа, так называемых дискретных бризеров, и их влиянием на макроскопические свойства нелинейных решеток, например, на теплопроводность. При изучении связи дискретных бризеров и макроскопических свойств нелинейных решеток важно знать, как фононы взаимодействуют с дискретными бризерами. Рассеяние фононных волновых пакетов малой амплитуды на неподвижных дискретных бризерах в цепочке β -Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou (β -FPUT) исследовано численно для их различных амплитуд. Установлено, что при достаточно больших амплитудах дискретные бризеры отражают коротковолновые фононы, но остаются прозрачными для длинноволновых фононов. Увеличение амплитуды бризеров расширяет область отражения в коротковолновой части первой зоны Бриллюэна. Эти результаты свидетельствуют о том, что в цепи β -FPUT дискретные бризеры влияют на теплопроводность не существенно, поскольку тепло передается в основном длинноволновыми фононами.

Ключевые слова: дисперсионные соотношения, щелевые эффекты, дискретные бризеры, цепочка β -Ферми–Паст–Улама–Цингоу

SCATTERING OF SMALL-AMPLITUDE PHONONS ON DISCRETE BREATHERS IN FERMI–PASTA–ULAM–TSINGOU CHAIN

S. V. Dmitriev^{1,2}, A. Y. Morkina^{2,3}, E. A. Korznikova^{2,3}, O. B. Naimark⁴, A. S. Nikitiuk⁴ and M. Baggioli^{5,6}¹Institute of Mathematics with Computing Centre RAS, Ufa, Russian Federation²Institute of Molecule and Crystal Physics RAS, Ufa, Russian Federation³Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Russian Federation⁴Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation⁵Wilczek Quantum Center, School of Physics and Astronomy, Shanghai, China⁶Shanghai Research Center for Quantum Sciences, Shanghai, China

There are two traditionally discussed dispersion relations (DR) in condensed media: gapless phonon DR and DR with an energy or frequency gap. The third type of DR is of interest in various fields of condensed matter physics: states corresponding to gap effects in k -space (Gapped Momentum States – GMS). The growing interest in GMS is associated with important consequences for the dynamic and thermodynamic properties of the system (hydrodynamic turbulence, plasticity, fracture). Traditionally, GMS arise in the Maxwell–Frenkel approach as applied to the viscoelastic properties of liquids and solids, when the DR-gaps can continuously vary from energy to momentum space. This work is the first in a series of studies devoted to the analysis of dispersion effects associated with the anharmonicity of the potential and the emergence of collective breather-type modes, the so-called discrete breathers (DBs), and their influence on the macroscopic properties of nonlinear lattices, for example, on the heat conductivity. Recently, the influence of discrete breathers (DBs) on the macroscopic properties of nonlinear lattices, for example, on thermal conductivity has been investigated. When solving this problem, it is important to know how phonons interact with DBs. The scattering of phonon wave packets of small amplitude by standing DBs in the β -Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou (β -FPUT) chain is studied numerically for different amplitudes of DBs. It is found that DBs of sufficiently large amplitudes reflect short-wavelength phonons, but remain transparent for long-wavelength phonons. An increase in the DB amplitude expands the reflection region in the short-wavelength part of the first Brillouin zone. These results suggest that DBs in the β -FPUT chain do not strongly affect the thermal conductivity, since heat is transferred mainly by long-wavelength phonons, which are weakly affected by DBs.

Key words: dispersion relations, gap effects, discrete breathers, β -Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou chain

1. Введение

Дискретные бризеры (ДБ) представляют собой пространственно локализованные колебательные моды большой амплитуды в бездефектных нелинейных решетках. ДБ были открыты математиками более трех

десятилетий назад [1–3]. Авторами работ [4, 5] ДБ экспериментально обнаружены в массивах сверхпроводящих джозефсоновских переходов [6, 7], в искусственных дискретных нелинейных системах [8–15], электрических [16, 17] и кристаллических [18–25] решетках.

Экспериментальное наблюдение ДБ в кристаллах — сложная задача [18–25], и для их исследования используются численные методы [26–37]. Связь между ДБ и делокализованными нелинейными колебательными модами продемонстрирована в работах [38–40]. Одной из основных целей изучения ДБ, например, в кристаллах [41], является оценка их влияния на макроскопические свойства. Экспериментально выяснено [19, 20], что присутствие ДБ сказывается на теплоемкости и тепловом расширении α -урана. Для нелинейных цепочек воздействие ДБ на теплопроводность [42, 43], теплоемкость [44], константу теплового расширения и постоянную упругости также анализировалось в работе [45].

При изучении роли ДБ такого свойства как теплопроводность, важно знать, как фононы рассеиваются на ДБ. В [42] показано, что с повышением температуры наблюдается переход от баллистической [46] к нормальной теплопроводности, и этот переход объясняется возбуждением ДБ при высоких температурах; ДБ эффективно рассеивают фононы и снижают теплопроводность.

Цель данной работы — анализ взаимодействия фононов с ДБ в классической одномерной динамической системе, называемой цепочкой β -Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou (β -FPUT) [47]. Учет в постановке «симметричного ангармонизма» позволяет избежать «эффекта» теплового расширения, обусловленного связью механических и тепловых колебаний [48, 49]. Главным является изучение влияния ДБ разной амплитуды на распространение фононов малой амплитуды в цепочке β -FPUT. Проблема взаимодействия фононных ДБ ранее рассматривалась в [50, 51] и в последних работах авторов [52, 53]. ДБ можно классифицировать по типу ангармонизма: для ангармонизма мягкого типа частота ДБ уменьшается, для ангармонизма жесткого типа увеличивается с ростом амплитуды. Для цепочки с настраиваемым типом ангармонизма показано, что в случае ангармонизма жесткого типа ДБ прозрачны для длинноволновых фононов и отражают коротковолновые фононы, а для ангармонизма мягкого типа наблюдается обратный эффект. В работе [53] объектом изучения была цепочка с гармонической связью и ангармоническим «on-site» потенциалом. В настоящей работе исследуется динамика в цепочке β -FPUT, без «on-site» потенциала, когда фононный спектр не имеет щели и, следовательно, могут существовать только ДБ с ангармонизмом жесткого типа, так как их частота должна быть выше фононного спектра. Анализ нелинейной динамики ДБ в β -FPUT модели проведен в работе [54].

В статье изложена математическая β -FPUT модель, обсуждаются свойства ДБ в цепочке β -FPUT, изучено взаимодействие фононов с ДБ и проведен анализ результатов.

2. Модель и ее математическая формулировка

Динамика частиц цепочки β -FPUT [47] массой m описывается гамильтонианом

$$H = K + P = \sum_n K_n + \sum_n P_n, \quad (1)$$

где K и P — кинетическая и потенциальная энергии цепи соответственно. Кинетическая, потенциальная и полная энергии частиц равны:

$$K_n = \frac{m\dot{u}_n^2}{2}, \quad (2)$$

$$P_n = \frac{k}{4}(u_n - u_{n-1})^2 + \frac{\beta}{8}(u_n - u_{n-1})^4 + \frac{k}{4}(u_{n+1} - u_n)^2 + \frac{\beta}{8}(u_{n+1} - u_n)^4, \quad (3)$$

$$H_n = K_n + P_n. \quad (4)$$

Здесь: $u_n(t)$ — неизвестная функция времени t , представляет собой смещение (амплитуду) n -й частицы из ее положения в решетке, а $\dot{u}_n \equiv du_n/dt$ — ее скорость. Каждая частица взаимодействует со своими ближайшими соседями через потенциал, который включает гармонические и ангармонические члены с коэффициентами k и β соответственно.

При использовании принципа Гамильтона следующие уравнения движения могут быть получены из уравнений (1)–(3):

$$m\ddot{u}_n = k(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}) - \beta(u_n - u_{n-1})^3 + \beta(u_{n+1} - u_n)^3. \quad (5)$$

Без ограничения общности полагаем, что шаг решетки $h=1$, $m=1$, $k=1$, а также $\beta=1$. Исследуем взаимодействие фононов малой амплитуды с ДБ различной амплитуды.

Рассмотрим цепочку из $N=2^{12}=2048$ частиц с поглощающими граничными условиями, такими, чтобы любое излучение от ДБ не влияло на ее динамику. Фононы малой амплитуды $u_n \sim \exp\left[i\left(2\pi qn/N - \omega_q t\right)\right]$ с волновым числом $q=0, 1, \dots, N/2$ и частотой ω_q подчиняются дисперсионному соотношению:

$$\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi q}{N}, \quad (6)$$

которое может быть получено путем подстановки фононного решения в линеаризованное уравнение (5) с $\beta=0$.

Отметим, что максимальная частота фононов составляет $\omega_q^{\max}=2$, что соответствует $q=N/2$. Групповая скорость фононов равна

$$v_g = \frac{d\omega_q}{dq} = \frac{2\pi}{N} \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \frac{\pi q}{N}. \quad (7)$$

Уравнения движения (5) решаются численно с помощью симплектического метода Штормера шестого порядка [55] с шагом по времени $\tau=10^{-3}\sqrt{m/k}$. Полная энергия цепочки далее в расчетах сохраняется с относительной погрешностью не более 10^{-7} .

3. Свойства дискретных бризеров

Для получения решения системы уравнений (5) в виде дискретных бризеров (ДБ) используется следующее представление начальных условий:

$$u_n(0) = \frac{(-1)^n A}{\operatorname{ch}[\alpha(nh-x)]}, \quad (8)$$

$$\dot{u}_n(0) = 0,$$

где A — амплитуда, α — обратная ширина (степень локализации), а x — положение. Если $x=lh$, где l — целое число, то ДБ локализуется на частице (локальный ДБ или «on-site» ДБ). Для $x=(l+0,5)h$ ДБ локализован в середине связи (нелокальный ДБ или «in-site» ДБ).

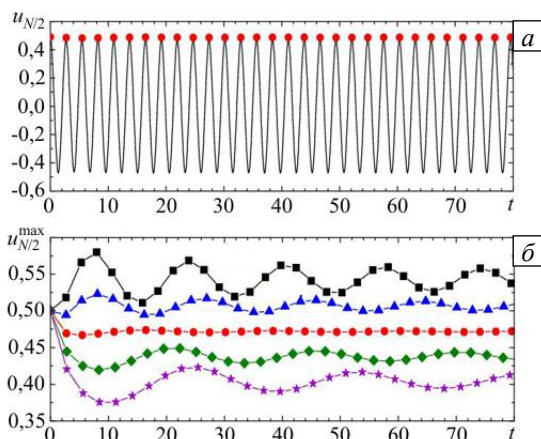


Рис. 1. Смещение центральной частицы как функция времени для локализованного ДБ при $A=0,5$, $x=N/2$ и $\alpha=0,95$, где точками отмечены амплитуда ДБ $A_{ДБ}$ (а); максимальные точки кривой $u_{N/2}(t)$ для разных значений α : 0,75 (линия ■), 0,85 (▲), 0,95 (●), 1,05 (◆), и 1,15 (★) (б)

Для выбранных в представлении (8) параметров A и x обратная ширина ДБ находится так, чтобы амплитуда их колебаний $A_{ДБ}$ была постоянной во времени.

Пример подбора параметра α представлен на рисунке 1 для локального ДБ, размещенного в середине цепочки ($x=N/2=1024$), при $A=0,5$. На рисунке 1а смещение центральной частицы ДБ показано как функция времени для $\alpha=0,95$. Точками отмечены максимальные значения $u_{N/2}(t)$, то есть амплитуда $A_{ДБ}$. На рисунке 1б амплитуда ДБ представлена как функция времени для различных значений α . Можно видеть, что для $\alpha=0,95$, после переходного периода в несколько периодов ДБ, амплитуда ДБ становится не зависящей от времени: $A_{ДБ}=0,472$. Видно, что даже при наилучшем выборе α амплитуда ДБ меньше чем A , потому что система уравнений (8) не является для бризеров точным решением. Часть начальной энергии системы излучается в виде

волновых пакетов малой амплитуды, удаляющихся от ДБ и поглощаемых на границах цепочки. При этом ДБ остается в середине цепочки.

На рисунке 2 показаны свойства локального (on-site) и межлокального (inter-site) ДБ соответственно. В качестве функций, зависящих от параметра A согласно системе уравнений (8), выступают: амплитуда ДБ $A_{ДБ}$ (Рис. 2а, б (1)), обратная ширина ДБ α (Рис. 2а, б (2)), частота ДБ ω (Рис. 2а, б (3)) и энергия ДБ E (см. Рис. 2а, б (4)). Как упоминалось выше, амплитуда $A_{ДБ}$ всегда меньше, чем A . При малых амплитудах A обратная ширина ДБ линейно увеличивается, а при больших рост значений α замедляется. Частота ДБ выходит за границу фононного спектра (напомним, что максимальная частота фононов $\omega_q^{\max} = 2$) и увеличивается с ростом A из-за ангармонизма жесткого типа ($\beta > 0$) рассматриваемой цепочки.

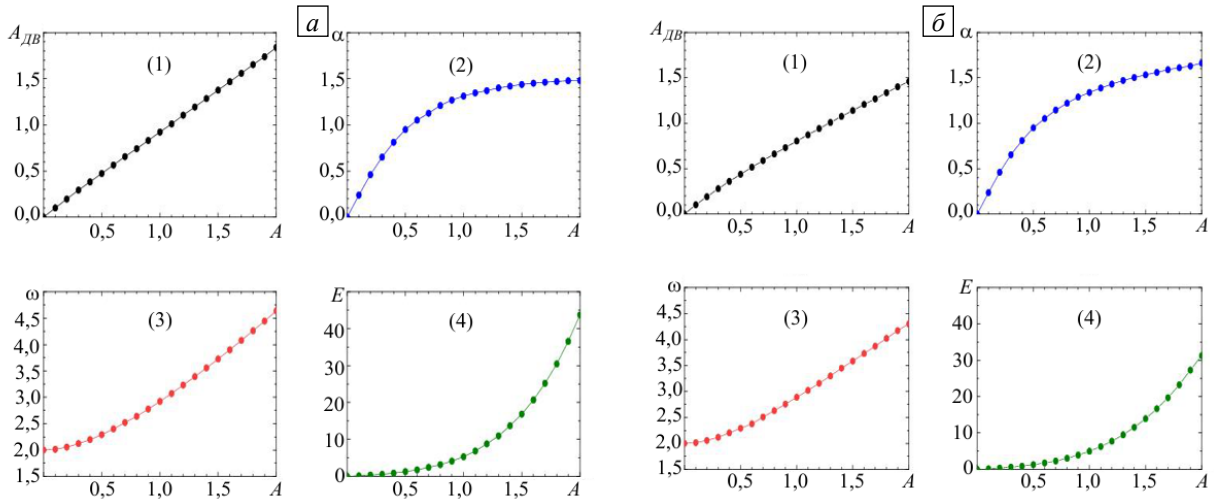


Рис. 2. Параметры локального (а) и межлокального (б) ДБ как функций амплитуды $A_{ДБ}$: амплитуда (1); обратная ширина (2); частота (3); энергия (4)

4. Рассеяние фононов на дискретных бризерах

Перейдем к численному анализу взаимодействия с ДБ малоамплитудных волновых пакетов фононов. При этом помещаем ДБ в середину цепочки ($x = N/2$) из $N = 2048$ частиц, зададим в системе уравнений (8) и реализуем возбуждение фононного волнового пакета, движущегося к середине в левой половине цепочки:

$$u_n(t) = e \sin\left(\frac{2q\pi n}{N} - \omega_q t\right), \quad 0 \leq n \leq N/2 - s, \quad (9)$$

$$u_n(t) = 0, \quad N/2 - s < n < N,$$

где e , q и ω_q — амплитуда, волновое число и частота фонона соответственно. Устанавливаем в уравнении (9) $s = 10$, чтобы изначально фононы и ДБ не перекрывали друг друга. Рассмотрены фононы с разным волновым числом q . Напомним, что связь между q и ω_q устанавливается формулой (6). Амплитуда фононов выбрана очень малой, $e = 3 \times 10^{-4}$, чтобы минимизировать влияние фононов на дискретный бризер.

Согласно результатам, полученным Флечем и Горбачем [54], локальный ДБ нестабилен, и по этой причине рассеяние фононов изучается только на нелокальных ДБ. Фононный волновой пакет распространяется по направлению к ДБ и частично как отражается, так и проходит. Коэффициент передачи энергии определяется следующим образом:

$$e_t = E_t / E_0, \quad (10)$$

где E_t — энергия одного фонона, которая прошла через ДБ, а $E_0 = e^2 \omega_q^2 / 2$ — энергия одного фонона, отраженная ДБ.

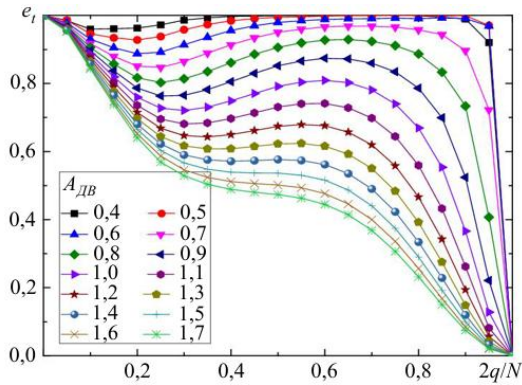


Рис. 3. Коэффициент передачи как функция нормированного волнового числа фононов для значений $A_{ДБ}$ от 0,4 до 1,7

Коэффициент передачи, как функция нормированного волнового числа фононов, показан на рисунке 3 для разных значений амплитуды ДБ. Видно, что при $A_{ДБ} < 0,5$ ДБ практически прозрачен для всех фононов в первой зоне Бриллюэна (геометрическом месте точек в обратном пространстве, которые ближе к началу обратной решетки, чем к любым другим точкам обратной решетки), так как e_t близко к единице. С увеличением $A_{ДБ}$ коэффициент пропускания уменьшается, причем наиболее заметное снижение наблюдается для коротковолновых фононов. Для не очень больших $A_{ДБ}$ локальный минимум характерен для фононов с большей длиной волны (но меньшей q), а положение минимума смещается

вправо с увеличением $A_{ДБ}$. Этот местный минимум можно объяснить резонансом длины волны фононов с шириной ДБ, которая уменьшается с ростом $A_{ДБ}$.

Значение среднего интегрального коэффициента передачи

$$I_t = \frac{2}{N} \int_0^{N/2} \varepsilon_t dq, \tag{11}$$

изображено на рисунке 4 в зависимости от амплитуды ДБ линией с точками. Еще раз отметим, что при амплитуде $A_{ДБ} < 0,5$ ДБ практически не влияет на поток фононов, так как I_t близок к единице. При $A_{ДБ} > 0,5$ ДБ начинают заметно отражать коротковолновые фононы, и значения I_t уменьшаются с увеличением $A_{ДБ}$.

Плотность энергии фононов составляет:

$$E = \frac{1}{2} e^2 \omega_q^2. \tag{12}$$

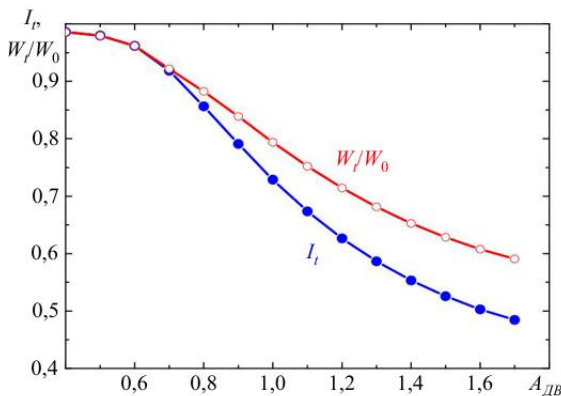


Рис. 4. Интегральный коэффициент I_t (точки) и W_t/W_0 (кружки) как функции амплитуды ДБ

В тепловом равновесии по определению все фононные моды имеют одинаковую плотность энергии. Фонон переносит энергию с групповой скоростью, определяемой формулой (7). Все фононы движутся в положительном направлении ($q > 0$) и переносят энергию, равную

$$W_0 \int_0^{N/2} E v_g dq = 2E \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{13}$$

Если ДБ находится в цепи, только часть энергии будет проходить через него, и эту часть можно рассчитать как

$$W_t = \int_0^{N/2} e_t(q) E v_g dq. \tag{14}$$

Энергия (14) зависит от амплитуды ДБ, поскольку от нее зависит $e_t(q)$.

Энергия W_t оценивалась численно. Согласно рисунку 3, выбирались $e_t(q)$ для различных амплитуд ДБ и рассчитывалось отношение W_t/W_0 , представляемое на рисунке 4 кружками, соединенными линией. Данная кривая лежит выше кривой $I_t(A_{ДБ})$, так как она характеризует интегральное влияние ДБ на перенос энергии фононами с учетом того, что коротковолновые фононы имеют меньшую групповую

скорость. Например, при $A_{дб} = 1,7$ средний интегральный коэффициент передачи энергии равен $I_t = 0,48$, а отношение проходящей через ДБ энергии к переносимой фононами составляет $W_t/W_0 = 0,59$.

5. Заключение

В работе численно проанализировано рассеяние фононов малой амплитуды на дискретных бризерах в цепочке β -Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou (β -FPUT) с ангармонизмом жесткого типа ($\beta > 0$). Как и в случае цепочки ангармонизма жесткого типа с локальным потенциалом, исследованной в [53], ДБ в цепочке β -FPUT в основном отражают коротковолновые фононы и практически прозрачны для длинноволновых фононов. Это контрастирует с цепочкой ангармонизма мягкого типа с локальным потенциалом, для которой наблюдалась противоположная тенденция [53].

ДБ рассеивает коротковолновые фононы только в том случае, если его амплитуда больше порогового значения; в рассматриваемой цепочке рассеяние имеет место при $A_{дб} > 0,5$. Этот факт объясняет относительно резкий переход от баллистической теплопроводности к нормальной с повышением температуры в нелинейной цепочке (см. [42]). При низких температурах возбуждаются только ДБ малой амплитуды; они слабо взаимодействуют с фононами и не сказываются на характере баллистической теплопроводности. При достаточно высокой температуре возбуждаются ДБ большой амплитуды, которые изменяют теплопроводность на свойственную нормальным условиям, то есть действуют как дефекты, рассеивающие фононы.

В цепочке β -FPUT влияние ДБ на теплопроводность должно быть относительно небольшим, поскольку ДБ рассеивают главным образом коротковолновые фононы, которые имеют низкую групповую скорость и, следовательно, вносят незначительный вклад в теплопроводность. Полученные в данной работе результаты подтверждают, что термонаселенные ДБ могут снижать теплопроводность при высоких температурах за счет рассеяния фононов [42]. В последующих работах будет обсуждаться случай не очень малых амплитуд фононов, когда, возможно, будут наблюдаться новые интересные эффекты, например, такие, как излучение энергии дискретным бризером, ускорение подвижного ДБ фононами, влияние эффектов в диссипативных системах с энергетической или частотной щелью, а также в k -пространстве (Gapped Momentum States). Было бы также интересно рассмотреть в будущем, могут ли сильные ангармоничности в этой модели вызывать типичные для жидкостей свойства, такие как линейная по частоте колебательная плотность состояний [56], и/или аномальные стекловидные свойства, например, аномалию пика бозона при низких энергиях [57].

Исследование влияния дискретных бризеров на динамику нелинейных цепочек для анализа мостикового рассеяния фононов малой амплитуды на дискретных бризерах с ангармонизмом жесткого типа Наймарком О.Б. (концептуализация, написание рукописи), Baggioli М. (концептуализация, обсуждение), Моркиной А.Ю. (численное моделирование), Никитюком А.С. (численное моделирование) выполнено при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/562. Baggioli Matteo (концептуализация, обсуждения) выражает признательность за поддержку Шанхайской городской администрации науки и технологий (Shanghai Municipal Science and Technology), грант № 2019SHZDZX01. Часть работы Дмитриева С.В. (постановка задачи, написание рукописи), Корзниковой Е.А. и Моркиной А.Ю. (численное моделирование) выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-12-00229).

Литература

1. Долгов А.С. О локализации колебаний в нелинейной кристаллической структуре // ФТТ. 1986. Т. 28, № 6. С. 1641-1644.
2. Sievers A.J., Takeno S. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61. P. 970-973. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.970>
3. Page J.B. Asymptotic solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 41. P. 7835-7838. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.41.7835>
4. Flach S., Willis C.R. Discrete breathers // Phys. Rep. 1998. Vol. 295. P. 181-264. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(97\)00068-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00068-9)
5. Flach S., Gorbach A.V. Discrete breathers – Advances in theory and applications // Phys. Rep. 2008. Vol. 467. P. 1-116. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.05.002>
6. Trias E., Mazo J.J., Orlando T.P. Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 741-744. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.741>
7. Binder P., Abraimov D., Ustinov A.V., Flach S., Zolotaryuk Y. Observation of breathers in Josephson ladders // Phys. Rev. Lett. 2000. Vol. 84. P. 745-748. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.745>
8. Russell F.M., Zolotaryuk Y., Eilbeck J.C., Dauxois T. Moving breathers in a chain of magnetic pendulums // Phys. Rev. B. 1997. Vol. 55. P. 6304-6308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.6304>

9. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplewski D.A., Craighead H.G.* Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90. 044102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.044102>
10. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Craighead H.G.* Optical manipulation of intrinsic localized vibrational energy in cantilever arrays // *EPL*. 2004. Vol. 66. P. 318-323. <https://doi.org/10.1209/epl/i2003-10224-x>
11. *Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J.* Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78. P. 137-157. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.137>
12. *Cuevas J., English L.Q., Kevrekidis P.G., Anderson M.* Discrete breathers in a forced-damped array of coupled pendula: Modeling, computation, and experiment // *Phys. Rev. Lett.* 2009. Vol. 102. 224101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.224101>
13. *Chong C., Porter M.A., Kevrekidis P.G., Daraio C.* Nonlinear coherent structures in granular crystals // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2017. Vol. 29. 413003. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa7672>
14. *Vorotnikov K., Starosvetsky Y., Theocharis G., Kevrekidis P.G.* Wave propagation in a strongly nonlinear locally resonant granular crystal // *Phys. Nonlinear Phenom.* 2018. Vol. 365. P. 27-41. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.10.007>
15. *Watanabe Y., Nishida T., Doi Y., Sugimoto N.* Experimental demonstration of excitation and propagation of intrinsic localized modes in a mass-spring chain // *Phys. Lett. A*. 2018. Vol. 382. P. 1957-1961. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2018.04.055>
16. *Palmero F., English L.Q., Chen X.-L., Li W., Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P.G.* Experimental and numerical observation of dark and bright breathers in the band gap of a diatomic electrical lattice // *Phys. Rev. E*. 2019. Vol. 99. 032206. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.032206>
17. *Gomez-Rojas A., Halevi P.* Discrete breathers in an electric lattice with an impurity: Birth, interaction, and death // *Phys. Rev. E*. 2018. Vol. 97. 022225. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.022225>
18. *Manley M.E., Yethiraj M., Sinn H., Volz H.M., Alatas A., Lashley J.C., Hulst W.L., Lander G.H., Smith J.* Formation of a new dynamical mode in α -uranium observed by inelastic X-ray and neutron scattering // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. 125501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.125501>
19. *Mihaila B., Opeil C.P., Drymiotis F.R., Smith J.L., Cooley J.C., Manley M.E., Migliori A., Mielke C., Lookman T., Saxena A., Bishop A.R., Blagoev K.B., Thoma D.J., Lashley J.C., Lang B.E., Boerio-Goates J., Woodfield B.F., Schmiedeshoff G.M.* Pinning frequencies of the collective modes in α -uranium // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Vol. 96. 076401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.076401>
20. *Manley M.E., Yethiraj M., Sinn H., Volz H.M., Alatas A., Lashley J.C., Hulst W.L., Lander G.H., Thoma D.J., Smith J.L.* Intrinsically localized vibrations and the mechanical properties of α -uranium // *J. Alloy. Comp.* 2007. Vol. 444-445. P. 129-132. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2006.09.137>
21. *Manley M.E., Alatas A., Trouw F., Leu B.M., Lynn J.W., Chen Y., Hulst W.L.* Intrinsic nature of thermally activated dynamical modes in α -U: Nonequilibrium mode creation by X-ray and neutron scattering // *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 77. 214305. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.214305>
22. *Manley M.E., Lynn J.W., Chen Y., Lander G.H.* Intrinsically localized mode in α -U as a precursor to a solid-state phase transition // *Phys. Rev. B*. 2008. Vol. 77. 052301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.052301>
23. *Manley M.E., Sievers A.J., Lynn J.W., Kiselev S.A., Agladze N.I., Chen Y., Lobet A., Alatas A.* Intrinsic localized modes observed in the high-temperature vibrational spectrum of NaI // *Phys. Rev. B*. 2009. Vol. 79. 134304. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.134304>
24. *Manley M.E., Abernathy D.L., Agladze N.I., Sievers A.J.* Symmetry-breaking dynamical pattern and localization observed in the equilibrium vibrational spectrum of NaI // *Sci. Rep.* 2011. Vol. 1. 4. <https://doi.org/10.1038/srep00004>
25. *Manley M.E., Hellman O., Shulumba N., May A.F., Stonaha P.J., Lynn J.W., Garlea V.O., Alatas A., Hermann R.P., Budai J.D., Wang H., Sales B.C., Minnich A.J.* Intrinsic anharmonic localization in thermoelectric PbSe // *Nat. Commun.* 2019. Vol. 10. 1928. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-09921-4>
26. *Дмитриев С.В., Корзникова Е.А., Баимова Ю.А., Веларде М.Г.* Дискретные бризеры в кристаллах // *УФН*. 2016. Т. 186. С. 471-488. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.02.037729>
27. *Dmitriev S.V.* Discrete breathers in crystals: Energy localization and transport // *J. Micromech. Mol. Phys.* 2016. Vol. 1. 1630001. <https://doi.org/10.1142/S2424913016300012>
28. *Korzniikova E.A., Fomin S.Y., Soboleva E.G., Dmitriev S.V.* Highly symmetric discrete breather in a two-dimensional Morse crystal // *JETP Lett.* 2016. Vol. 103. P. 277-281. <https://doi.org/10.1134/S0021364016040081>
29. *Murzaev R.T., Babicheva R.I., Zhou K., Korzniikova E.A., Fomin S.Yu., Dubinko V.I., Dmitriev S.V.* Discrete breathers in alpha-uranium // *Eur. Phys. J. B*. 2016. Vol. 89. 168. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70142-3>
30. *Doi Y., Yoshimura K.* Symmetric potential lattice and smooth propagation of tail-free discrete breathers // *Phys. Rev. Lett.* 2016. Vol. 117. 014101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.014101>
31. *Murzaev R.T., Bachurin D.V., Korzniikova E.A., Dmitriev S.V.* Localized vibrational modes in diamond // *Phys. Lett. A*. 2017. Vol. 381. P. 1003-1008. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.01.014>
32. *Evazzade I., Lobzenko I.P., Korzniikova E.A., Ovid'ko I.A., Roknabadi M.R., Dmitriev S.V.* Energy transfer in strained graphene assisted by discrete breathers excited by external ac driving // *Phys. Rev. B*. 2017. Vol. 95. 035423. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.035423>
33. *Barani E., Korzniikova E.A., Chetverikov A.P., Zhou K., Dmitriev S.V.* Gap discrete breathers in strained boron nitride // *Phys. Lett. A*. 2017. Vol. 381. P. 3553-3557. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.057>
34. *Zakharov P.V., Korzniikova E.A., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G., Zhou K.* Surface discrete breathers in Pt₃Al intermetallic alloy // *Surf. Sci.* 2019. Vol. 679. P. 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.susc.2018.08.011>
35. *Riviere A., Lepri S., Colognesi D., Piazza F.* Wavelet imaging of transient energy localization in nonlinear systems at thermal equilibrium: The case study of NaI crystals at high temperature // *Phys. Rev. B*. 2019. Vol. 99. 024307. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.024307>
36. *Shelkan A., Klopov M., Hizhnyakov V.* Enhanced mobility of high-frequency discrete breathers in a monatomic chain with odd anharmonicity // *Phys. Lett. A*. 2019. Vol. 383. P. 1893-1896. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.03.025>

37. Doi Y., Yoshimura K. Construction of nonlinear lattice with potential symmetry for smooth propagation of discrete breather // *Nonlinearity*. 2020. Vol. 33. P. 5142-5175. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab9498>
38. Babicheva R.I., Semenov A.S., Soboleva E.G., Kudreyko A.A., Zhou K., Dmitriev S.V. Discrete breathers in a triangular β -Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou lattice // *Phys. Rev. E*. 2021. Vol. 103. 052202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.052202>
39. Korznikova E.A., Bachurin D.V., Fomin S.Yu., Chetverikov A.P., Dmitriev S.V. Instability of vibrational modes in hexagonal lattice // *Eur. Phys. J. B*. 2017. Vol. 90. 23. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70595-2>
40. He J.-H., Hou W.-F., Qie N., Gepreel K.A., Shirazi A. H., Mohammad-Sedighi H. Hamiltonian-based frequency-amplitude formulation for nonlinear oscillators // *Facta Universitatis: Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 19. P. 199-208. <https://doi.org/10.22190/FUME201205002H>
41. Manley M.E. Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties // *Acta Mater*. 2010. Vol. 58. P. 2926-2935. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.01.021>
42. Xiong D., Saadatmand D., Dmitriev S.V. Crossover from ballistic to normal heat transport in the ϕ^4 lattice: If nonconservation of momentum is the reason, what is the mechanism? // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96. 042109. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042109>
43. Wang J., Dmitriev S.V., Xiong D. Thermal transport in long-range interacting Fermi-Pasta-Ulam chains // *Phys. Rev. Research*. 2020. Vol. 2. 013179. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.013179>
44. Singh M., Morkina A.Y., Korznikova E.A., Dubinko V.I., Terentiev D.A., Xiong D., Naimark O.B., Gani V.A., Dmitriev S.V. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain // *J. Nonlinear Sci*. 2021. Vol. 31. 12. <https://doi.org/10.1007/s00332-020-09663-4>
45. Korznikova E.A., Morkina A.Y., Singh M., Krivtsov A.M., Kuzkin V.A., Gani V.A., Bebikhov Y.V., Dmitriev S.V. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain // *Eur. Phys. J. B*. 2020. Vol. 93. 123. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2020-10173-7>
46. Benenti G., Lepri S., Livi R. Anomalous heat transport in classical many-body systems: Overview and perspectives // *Front. Phys*. 2020. Vol. 8. 292. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00292>
47. Fermi E. Collected papers. Vol. 2. United States, 1939-1954. Chicago: University of Chicago Press, 1965. 1083 p.
48. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions // *J. Micromech. Mol. Phys*. 2018. Vol. 3. 1850004. <https://doi.org/10.1142/S2424913018500042>
49. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Ballistic resonance and thermalization in the Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou chain at finite temperature // *Phys. Rev. E*. 2020. Vol. 101. 042209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.042209>
50. Kim S.W., Kim S. Fano resonances in translationally invariant nonlinear chains // *Phys. Rev. B*. 2001. Vol. 63. 212301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.212301>
51. Flach S., Miroshnichenko A.E., Fistul M.V. Wave scattering by discrete breathers // *Chaos*. 2003. Vol. 13. P. 596-609. <https://doi.org/10.1063/1.1561627>
52. Evazzade I., Roknabadi M.R., Behdani M., Moosavi F., Xiong D., Zhou K., Dmitriev S.V. Interaction of longitudinal phonons with discrete breather in strained graphene // *Eur. Phys. J. B*. 2018. Vol. 91. 163. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2018-90055-3>
53. Hadipour F., Saadatmand D., Ashhadi M., Moradi Marjaneh A., Evazzade I., Askari A., Dmitriev S.V. Interaction of phonons with discrete breathers in one-dimensional chain with tunable type of anharmonicity // *Phys. Lett. A*. 2020. Vol. 384. 126100. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.126100>
54. Flach S., Gorbach A. Discrete breathers in Fermi-Pasta-Ulam lattices // *Chaos*. 2005. Vol. 15. 015112. <https://doi.org/10.1063/1.1839151>
55. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука, 1975. 632 с.
56. Zaccone A., Baggioli M. Universal law for the vibrational density of states of liquids // *PNAS*. 2021. Vol. 118. e2022303118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2022303118>
57. Baggioli M., Zaccone A. Universal origin of Boson peak vibrational anomalies in ordered crystals and in amorphous materials // *Phys. Rev. Lett*. 2019. Vol. 122. 145501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.145501>

References

1. Dolgov A.S. On localization of oscillations in nonlinear crystal structure. *Sov. Phys. Solid State*, 1986, vol. 28, pp. 907-909.
2. Sievers A.J., Takeno S. Intrinsic localized modes in anharmonic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 1988, vol. 61, pp. 970-973. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.970>
3. Page J.B. Asymptotic solutions for localized vibrational modes in strongly anharmonic periodic systems. *Phys. Rev. B*, 1990, vol. 41, pp. 7835-7838. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.41.7835>
4. Flach S., Willis C.R. Discrete breathers. *Phys. Rep.*, 1998, vol. 295, pp. 181-264. [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(97\)00068-9](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00068-9)
5. Flach S., Gorbach A.V. Discrete breathers – Advances in theory and applications. *Phys. Rep.*, 2008, vol. 467, pp. 1-116. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.05.002>
6. Trias E., Mazo J.J., Orlando T.P. Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 84, pp. 741-744. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.741>
7. Binder P., Abaimov D., Ustinov A.V., Flach S., Zolotaryuk Y. Observation of breathers in Josephson ladders. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 84, pp. 745-748. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.745>
8. Russell F.M., Zolotaryuk Y., Eilbeck J.C., Dauxois T. Moving breathers in a chain of magnetic pendulums. *Phys. Rev. B*, 1997, vol. 55, pp. 6304-6308. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.55.6304>
9. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Czaplowski D.A., Craighead H.G. Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, vol. 90, 044102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.90.044102>

10. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J., Ilic B., Craighead H.G. Optical manipulation of intrinsic localized vibrational energy in cantilever arrays. *EPL*, 2004, vol. 66, pp. 318-323. <https://doi.org/10.1209/epl/i2003-10224-x>
11. Sato M., Hubbard B.E., Sievers A.J. Nonlinear energy localization and its manipulation in micromechanical oscillator arrays. *Rev. Mod. Phys.*, 2006, vol. 78, pp. 137-157. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.137>
12. Cuevas J., English L.Q., Kevrekidis P.G., Anderson M. Discrete breathers in a forced-damped array of coupled pendula: Modeling, computation, and experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 2009, vol. 102, 224101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.224101>
13. Chong C., Porter M.A., Kevrekidis P.G., Daraio C. Nonlinear coherent structures in granular crystals. *J. Phys.: Condens. Matter.*, 2017, vol. 29, 413003. <https://doi.org/10.1088/1361-648X/aa7672>
14. Vorotnikov K., Starosvetsky Y., Theocharis G., Kevrekidis P.G. Wave propagation in a strongly nonlinear locally resonant granular crystal. *Phys. Nonlinear Phenom.*, 2018, vol. 365, pp. 27-41. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2017.10.007>
15. Watanabe Y., Nishida T., Doi Y., Sugimoto N. Experimental demonstration of excitation and propagation of intrinsic localized modes in a mass-spring chain. *Phys. Lett. A*, 2018, vol. 382, pp. 1957-1961. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2018.04.055>
16. Palmero F., English L.Q., Chen X.-L., Li W., Cuevas-Maraver J., Kevrekidis P.G. Experimental and numerical observation of dark and bright breathers in the band gap of a diatomic electrical lattice. *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 99, 032206. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.032206>
17. Gomez-Rojas A., Halevi P. Discrete breathers in an electric lattice with an impurity: Birth, interaction, and death. *Phys. Rev. E*, 2018, vol. 97, 022225. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.022225>
18. Manley M.E., Yethiraj M., Sinn H., Volz H.M., Alatas A., Lashley J.C., Hulst W.L., Lander G.H., Smith J. Formation of a new dynamical mode in α -uranium observed by inelastic X-ray and neutron scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, 125501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.125501>
19. Mihaila B., Opeil C.P., Drymiotis F.R., Smith J.L., Cooley J.C., Manley M.E., Migliori A., Mielke C., Lookman T., Saxena A., Bishop A.R., Blagoev K.B., Thoma D.J., Lashley J.C., Lang B.E., Boerio-Goates J., Woodfield B.F., Schmiedeshoff G.M. Pinning frequencies of the collective modes in α -uranium. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, 076401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.076401>
20. Manley M.E., Yethiraj M., Sinn H., Volz H.M., Alatas A., Lashley J.C., Hulst W.L., Lander G.H., Thoma D.J., Smith J.L. Intrinsically localized vibrations and the mechanical properties of α -uranium. *J. Alloy. Comp.*, 2007, vol. 444-445, pp. 129-132. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2006.09.137>
21. Manley M.E., Alatas A., Trouw F., Leu B.M., Lynn J.W., Chen Y., Hulst W.L. Intrinsic nature of thermally activated dynamical modes in α -U: Nonequilibrium mode creation by X-ray and neutron scattering. *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 77, 214305. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.214305>
22. Manley M.E., Lynn J.W., Chen Y., Lander G.H. Intrinsically localized mode in α -U as a precursor to a solid-state phase transition. *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 77, 052301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.052301>
23. Manley M.E., Sievers A.J., Lynn J.W., Kiselev S.A., Agladze N.I., Chen Y., Llobet A., Alatas A. Intrinsic localized modes observed in the high-temperature vibrational spectrum of NaI. *Phys. Rev. B*, 2009, vol. 79, 134304. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.134304>
24. Manley M.E., Abernathy D.L., Agladze N.I., Sievers A.J. Symmetry-breaking dynamical pattern and localization observed in the equilibrium vibrational spectrum of NaI. *Sci. Rep.*, 2011, vol. 1, 4. <https://doi.org/10.1038/srep00004>
25. Manley M.E., Hellman O., Shulumba N., May A.F., Stonaha P.J., Lynn J.W., Garlea V.O., Alatas A., Hermann R.P., Budai J.D., Wang H., Sales B.C., Minnich A.J. Intrinsic anharmonic localization in thermoelectric PbSe. *Nat. Commun.*, 2019, vol. 10, 1928. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-09921-4>
26. Dmitriev S.V., Korznikova E.A., Baimova J.A., Velarde M.G. Discrete breathers in crystals. *Phys.-Usp.*, 2016, vol. 59, pp. 446-461. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.02.037729>
27. Dmitriev S.V. Discrete breathers in crystals: Energy localization and transport. *J. Micromech. Mol. Phys.*, 2016, vol. 1, 1630001. <https://doi.org/10.1142/S2424913016300012>
28. Korznikova E.A., Fomin S.Y., Soboleva E.G., Dmitriev S.V. Highly symmetric discrete breather in a two-dimensional Morse crystal. *JETP Lett.*, 2016, vol. 103, pp. 277-281. <https://doi.org/10.1134/S0021364016040081>
29. Murzaev R.T., Babicheva R.I., Zhou K., Korznikova E.A., Fomin S.Yu., Dubinko V.I., Dmitriev S.V. Discrete breathers in alpha-uranium. *Eur. Phys. J. B*, 2016, vol. 89, 168. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70142-3>
30. Doi Y., Yoshimura K. Symmetric potential lattice and smooth propagation of tail-free discrete breathers. *Phys. Rev. Lett.*, 2016, vol. 117, 014101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.014101>
31. Murzaev R.T., Bachurin D.V., Korznikova E.A., Dmitriev S.V. Localized vibrational modes in diamond. *Phys. Lett. A*, 2017, vol. 381, pp. 1003-1008. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.01.014>
32. Evazzade I., Lobzenko I.P., Korznikova E.A., Ovid'ko I.A., Roknabadi M.R., Dmitriev S.V. Energy transfer in strained graphene assisted by discrete breathers excited by external ac driving. *Phys. Rev. B*, 2017, vol. 95, 035423. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.035423>
33. Barani E., Korznikova E.A., Chetverikov A.P., Zhou K., Dmitriev S.V. Gap discrete breathers in strained boron nitride. *Phys. Lett. A*, 2017, vol. 381, pp. 3553-3557. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.057>
34. Zakharov P.V., Korznikova E.A., Dmitriev S.V., Ekomasov E.G., Zhou K. Surface discrete breathers in Pt₃Al intermetallic alloy. *Surf. Sci.*, 2019, vol. 679, pp. 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.susc.2018.08.011>
35. Riviere A., Lepri S., Colognesi D., Piazza F. Wavelet imaging of transient energy localization in nonlinear systems at thermal equilibrium: The case study of NaI crystals at high temperature. *Phys. Rev. B*, 2019, vol. 99, 024307. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.024307>
36. Shelkan A., Klopov M., Hizhnyakov V. Enhanced mobility of high-frequency discrete breathers in a monatomic chain with odd anharmonicity. *Phys. Lett. A*, 2019, vol. 383, pp. 1893-1896. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.03.025>
37. Doi Y., Yoshimura K. Construction of nonlinear lattice with potential symmetry for smooth propagation of discrete breather. *Nonlinearity*, 2020, vol. 33, pp. 5142-5175. <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab9498>

38. Babicheva R.I., Semenov A.S., Soboleva E.G., Kudreyko A.A., Zhou K., Dmitriev S.V. Discrete breathers in a triangular β -Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou lattice. *Phys. Rev. E*, 2021, vol. 103, 052202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.103.052202>
39. Korznikova E.A., Bachurin D.V., Fomin S.Yu., Chetverikov A.P., Dmitriev S.V. Instability of vibrational modes in hexagonal lattice. *Eur. Phys. J. B*, 2017, vol. 90, 23. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2016-70595-2>
40. He J.-H., Hou W.-F., Qie N., Gepreel K.A., Shirazi A. H., Mohammad-Sedighi H. Hamiltonian-based frequency-amplitude formulation for nonlinear oscillators. *Facta Universitatis: Mechanical Engineering*, 2021, vol. 19, pp. 199-208. <https://doi.org/10.22190/FUME201205002H>
41. Manley M.E. Impact of intrinsic localized modes of atomic motion on materials properties. *Acta Mater.*, 2010, vol. 58, pp. 2926-2935. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2010.01.021>
42. Xiong D., Saadatmand D., Dmitriev S.V. Crossover from ballistic to normal heat transport in the ϕ^4 lattice: If nonconservation of momentum is the reason, what is the mechanism? *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 96, 042109. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.042109>
43. Wang J., Dmitriev S.V., Xiong D. Thermal transport in long-range interacting Fermi-Pasta-Ulam chains. *Phys. Rev. Research*, 2020, vol. 2, 013179. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.013179>
44. Singh M., Morkina A.Y., Korznikova E.A., Dubinko V.I., Terentiev D.A., Xiong D., Naimark O.B., Gani V.A., Dmitriev S.V. Effect of discrete breathers on the specific heat of a nonlinear chain. *J. Nonlinear Sci.*, 2021, vol. 31, 12. <https://doi.org/10.1007/s00332-020-09663-4>
45. Korznikova E.A., Morkina A.Y., Singh M., Krivtsov A.M., Kuzkin V.A., Gani V.A., Bebikhov Y.V., Dmitriev S.V. Effect of discrete breathers on macroscopic properties of the Fermi-Pasta-Ulam chain. *Eur. Phys. J. B*, 2020, vol. 93, 123. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2020-10173-7>
46. Benenti G., Lepri S., Livi R. Anomalous heat transport in classical many-body systems: Overview and perspectives. *Front. Phys.*, 2020, vol. 8, 292. <https://doi.org/10.3389/fphy.2020.00292>
47. Fermi E. *Collected papers. Vol. 2. United States, 1939-1954*. Chicago, University of Chicago Press, 1965. 1083 p.
48. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions. *J. Micromech. Mol. Phys.*, 2018, vol. 3, 1850004. <https://doi.org/10.1142/S2424913018500042>
49. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Ballistic resonance and thermalization in the Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou chain at finite temperature. *Phys. Rev. E*, 2020, vol. 101, 042209. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.101.042209>
50. Kim S.W., Kim S. Fano resonances in translationally invariant nonlinear chains. *Phys. Rev. B*, 2001, vol. 63, 212301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.212301>
51. Flach S., Miroshnichenko A.E., Fistul M.V. Wave scattering by discrete breathers. *Chaos*, 2003, vol. 13, pp. 596-609. <https://doi.org/10.1063/1.1561627>
52. Evazzade I., Roknabadi M.R., Behdani M., Moosavi F., Xiong D., Zhou K., Dmitriev S.V. Interaction of longitudinal phonons with discrete breather in strained graphene. *Eur. Phys. J. B*, 2018, vol. 91, 163. <https://doi.org/10.1140/epjb/e2018-90055-3>
53. Hadipour F., Saadatmand D., Ashhadi M., Moradi Marjaneh A., Evazzade I., Askari A., Dmitriev S.V. Interaction of phonons with discrete breathers in one-dimensional chain with tunable type of anharmonicity. *Phys. Lett. A*, 2020, vol. 384, 126100. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.126100>
54. Flach S., Gorbach A. Discrete breathers in Fermi-Pasta-Ulam lattices. *Chaos*, 2005, vol. 15, 015112. <https://doi.org/10.1063/1.1839151>
55. Bakhvalov N.S. *Numerical methods: analysis, algebra, ordinary differential equations*. Moscow, MIR Publishers, 1977. 663 p.
56. Zaccone A., Baggioli M. Universal law for the vibrational density of states of liquids. *PNAS*, 2021, vol. 118, e2022303118. <https://doi.org/10.1073/pnas.2022303118>
57. Baggioli M., Zaccone A. Universal origin of Boson peak vibrational anomalies in ordered crystals and in amorphous materials. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 122, 145501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.145501>

Поступила в редакцию 06.10.2021; после доработки 17.11.2021; принята к опубликованию 18.11.2021

Сведения об авторах

Дмитриев Сергей Владимирович, дфмн, проф., зав.лаб., Институт физики молекул и кристаллов Уфимского федерального исследовательского центра РАН (ИФМК УФИЦ РАН), 450054, г. Уфа, пр-т Октября, д. 71; e-mail: dmitriev.sergey.v@gmail.com

Корзникова Елена Александровна, дфмн, проф., внс, Уфимский государственный авиационный технический университет (УГАТУ), 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса, д. 12; e-mail: elena.a.korznikova@gmail.com

Моркина Алина Юрьевна, магистр, УГАТУ; e-mail: alinamorkina@yandex.ru

Наймарк Олег Борисович, дфмн, проф., зав.лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: naimark@icmm.ru

Никитюк Александр Сергеевич, кфмн, нс, ИМСС УрО РАН; e-mail: nas@icmm.ru

Baggioli Matteo, Associate professor Wilczek Quantum Center, School of Physics and Astronomy, Shanghai Jiao Tong, Shanghai 200240, China 800 Dongchuan Road, Minhang District, Shanghai, P.R. China 200240; e-mail: b.matteo@sjtu.edu.cn