

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.4.34](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.34)

УДК 539.375

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЛ

Е.В. Ломакин^{1,2}, П.В. Тишин¹¹Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

Механические свойства многих материалов, например, бетонов, чугуна, горных пород, некоторых конструкционных графитов, огнеупорных керамик и других, как правило, пористых и с неоднородной структурой, зависят от вида напряжённого состояния. Это выражается в отсутствии единых диаграмм связи между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций для различных видов напряжённого состояния. Зависимость свойств от вида напряжённого состояния особенно проявляется у материалов, для которых характерен рост деформаций в нелинейной области деформирования. Для таких материалов, во-первых, процессы объёмного и сдвигового деформирования взаимосвязаны, что проявляется в возникновении объёмных деформаций при кручении, а во-вторых, при нелинейных определяющих соотношениях для решения задач кручения тел, изготовленных из них, не приемлемы гипотезы Сен-Венана. В качестве параметра, характеризующего вид напряжённого состояния, может быть выбрано отношение среднего напряжения к эквивалентному напряжению. В данной работе применяются тензорно линейные определяющие соотношения, учитывающие зависимость механических свойств материала от вида напряженного состояния. Приведены результаты численного решения задачи кручения трубы круглого поперечного сечения путём сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Система дифференциальных уравнений решена методом Рунге–Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага и оценкой погрешности; анализируется специфика реализации метода. Описаны результаты численного моделирования задач кручения трубы круглого сечения в пакете ANSYS – универсальном комплексе конечно-элементного анализа, для которого создана специальная библиотека программ для используемых определяющих соотношений и написан код подключения к ANSYS. Результаты расчётов демонстрируют наличие при кручении осевой деформации. Проведено сопоставление числовых данных, полученных разными методами.

Ключевые слова: вид напряженного состояния, кручение, метод Рунге–Кутты, метод конечных элементов

DEVELOPMENT OF METHODS FOR SOLVING TORSION PROBLEMS OF PHYSICALLY NONLINEAR SOLIDS

E. V. Lomakin^{1,2} and P. V. Tishin¹¹Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

The mechanical properties of many materials, such as concrete, cast iron, rocks, some structural graphites, refractory ceramics, etc., which are usually porous materials with an inhomogeneous structure, depend on the type of stress state. This manifests itself in the absence of unified diagrams of the relationship between stress and strain intensity for various types of stress state. Such dependence is typical of the materials characterized by the growth of deformation in the nonlinear region of deformation. For these materials, the processes of volumetric and shear deformation are interrelated, which is expressed in the appearance of volumetric deformations during torsion. When the linear constitutive relations are used to analyze the torsion problems of such materials, a significant error occurs. The parameter characterizing the type of stress state can be, for example, the ratio of the average stress to the stress intensity. This paper considers the linear constitutive relations, which take into account the dependence of the mechanical properties of the material on the type of stress state. The results of numerical solution of the problem of torsion of a circular pipe by reducing it to a system of ordinary differential equations are presented. The system of differential equations is solved using the 4-order Runge–Kutta method with automatic step selection and error estimation. The features of the implementation of the method are discussed. In the second part of the article, the results of numerical modeling of torsion problems of a circular pipe are described using a finite element analysis software, for which a special library that implements the considered constitutive relations is written. The features of the finite element analysis which were taken into account when writing the library code are shown. The results of the calculations demonstrate the presence of axial deformation during torsion. The results obtained by different methods are compared.

Key words: stress state type, torsion, Runge–Kutta method, FEM

1. Введение

При исследовании некоторых материалов обнаруживается, что их механические свойства зависят от вида напряжённого состояния, что выражается в зависимости диаграмм деформирования от соотношения между компонентами тензора напряжений в процессе нагружения [1–5]. Для таких материалов использование линейных определяющих соотношений для расчёта при некоторых видах нагружения, в частности при кручении, может приводить к существенным ошибкам. К подобным материалам относятся горные породы, бетон. Как правило, горные породы описываются моделью Мора–Кулона [6]. Эксперименты показывают, что определённые параметры данной модели — угол дилатации и модуль упругости — зависят от внешнего давления [7]. Существуют различные подходы, которые позволяют учитывать эти особенности, например введением дополнительных зависимостей [8].

Во многих работах производится построение определяющих соотношений, принимающих во внимание параметры состояния, скажем, поврежденность [9–12]. Особо важно, если они дают возможность компьютерного моделирования процессов деформирования горных пород [13–15].

В работах [16–19] предлагаются определяющие соотношения, содержащие зависимость механических свойств материала от вида напряжённого состояния. Некоторыми авторами [20, 21] описывается учет свойства разномодульности. Под разномодульностью обычно понимается изменение скачком наклона диаграммы деформирования при смене знака напряжений в условиях одноосного нагружения, но в реальности диаграммы деформирования гладкие. Поэтому термин относится к линейной аппроксимации слабо нелинейных диаграмм в определённом диапазоне деформаций, и к нему следует относиться как к математической аппроксимации реальных диаграмм. Такая аппроксимация предоставляет возможность иногда получать аналитические решения задач, которые могут служить основой для проверки результатов численного моделирования. Таким образом, термин «разномодульность» относится к математической идеализации гладкой в реальности диаграммы деформирования при одноосном нагружении. В то же время в экспериментах на сложное пропорциональное нагружение (двухосное сжатие [22, 23], сжатие цилиндра, находящегося под действием внешнего давления [2]) обнаруживается зависимость диаграмм деформирования от внешнего давления или от вида напряжённого состояния.

В силу сложности определяющих соотношений аналитическое решение большей части практически важных задач получить не удаётся. Данная работа имеет целью рассмотрение различных способов численного решения задач кручения физически нелинейных тел с зависящими от вида напряжённого состояния свойствами. Используемые определяющие соотношения позволяют применить несколько способов численного решения задач. Так, для одномерной задачи кручения длинной трубы с цилиндрической боковой поверхностью возможен численно-аналитический способ решения: сначала решение задачи проводится аналитическими методами с упрощениями и сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений; затем полученная система реализуется любым удобным численным методом. Минусом является то, что граничные условия удовлетворяются только в интегральной форме. При другом способе решение находится с помощью метода конечных элементов. Здесь минус — это большая вычислительная сложность при сопоставимом с численным решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений шаге расчётной сетки.

В работе разобраны некоторые теоретические аспекты применяемых численных методик: описан алгоритм решения системы дифференциальных уравнений методом Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага и оценкой погрешности; предложен метод обхода проблемы неопределённости якобиана, определяющего соотношения в нуле; написана библиотека к пакету ANSYS, а также программа для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, использующая функции системы Matlab. Проведена верификация полученных результатов.

2. Определяющие соотношения и постановки задач кручения

Уравнения связи между напряжениями и деформациями для испытывающего кручение изотропного тела могут быть получены на основе соответствующего представления потенциальной функции [16, 17]:

$$\Phi = (1/2)(1 + \zeta(\xi))(A + B\xi^2)\sigma_0^2, \quad (1)$$

где $\zeta(\xi) = (1 + \kappa(\xi))(A + B\xi^2)^{-1}$, $\xi = \sigma/\sigma_0$ — параметр вида напряжённого состояния, $\sigma = (1/3)\sigma_{ii}$ — гидростатическая компонента напряжений, $\sigma_0 = \sqrt{(3/2)S_{ij}S_{ij}}$ — эквивалентное напряжение, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Параметр ξ характеризует вид напряжённого состояния в среднем, так как σ есть среднее нормальное напряжение в точке среды, а σ_0 — среднее касательное напряжение в этой же точке [20]. При $\zeta(\xi) = 0$ выражение (1) совпадает с потенциалом линейно-упругого тела, для которого $A = \frac{2(1+\nu)}{3E}$, $B = \frac{3(1-2\nu)}{E}$.

На основе (1) получается зависимость между деформациями и напряжениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = (3/2)\omega(\xi)S_{ij} + (1/3)\Omega(\xi)\sigma\delta_{ij}, \\ \omega(\xi) &= (-1/2)(A + B\xi^2)\zeta'(\xi)\xi + A(1 + \zeta(\xi)), \\ \Omega(\xi) &= (1/2)(A + B\xi^2)\zeta'(\xi)/\xi + B(1 + \zeta(\xi)). \end{aligned} \quad (2)$$

Функции $\omega(\xi)$ и $\Omega(\xi)$ связаны соотношениями:

$$\omega(\xi) + \xi^2 \Omega(\xi) = (A + B\xi^2)(1 + \zeta(\xi)), \quad \omega'(\xi) + \xi^2 \Omega'(\xi) = 0. \quad (3)$$

Введя параметр $\gamma = \varepsilon/\varepsilon_0$, можно разрешить соотношения (2) относительно напряжений: $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$ — объёмная деформация в случае малых деформаций, $\varepsilon_0 = \sqrt{(2/3)e_{ij}e_{ij}}$ — эквивалентная деформация, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\varepsilon\delta_{ij}$, а также определить зависимость между параметрами γ и ξ :

$$\gamma = \xi[\Omega(\xi)/\omega(\xi)]. \quad (4)$$

На основании (3) и (4) соотношения (1) и (2) представляются в виде:

$$\begin{aligned} U &= (1/2)(1 + \eta(\gamma))\left(\frac{1}{A} + \frac{\gamma^2}{B}\right)\varepsilon_0^2, \\ \sigma_{ij} &= (2/3)\psi(\gamma)e_{ij} + \Psi(\gamma)\varepsilon\delta_{ij}, \\ \psi(\gamma) &= (-1/2)\left(\frac{1}{A} + \frac{\gamma^2}{B}\right)\eta'(\gamma)\gamma + \frac{1}{A}(1 + \eta(\gamma)), \\ \Psi(\gamma) &= (1/2)\left(\frac{1}{A} + \frac{\gamma^2}{B}\right)\eta'(\gamma)\gamma^{-1} + \frac{1}{B}(1 + \eta(\gamma)). \end{aligned} \quad (5)$$

В случае, если принять линейную аппроксимацию для функции $\omega(\xi) = A + C\xi$, определяющие соотношения (5) примут вид:

$$\sigma_{ij} = \left((2/3)(B - C\gamma)e_{ij} + (A - C/\gamma)\varepsilon\delta_{ij}\right)(AB - C^2)^{-1}, \quad (6)$$

где $\gamma = \varepsilon/\varepsilon_0$ — параметр вида деформированного состояния, $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - (1/3)\varepsilon\delta_{ij}$ — девиатор деформаций, $\varepsilon = \varepsilon_{ii}$ — объёмная деформация, C — параметр, характеризующий степень чувствительности свойств материала к виду напряжённого состояния материала; при $C=0$ определяющие соотношения сводятся к закону Гука.

В работе получено решение задачи о нестеснённом кручении толстостенной трубы из материала со свойствами, зависящими от вида напряжённого состояния. Рассмотрены условия на границах: в торцевых сечениях трубы действует крутящий момент; осевое усилие отсутствует; боковая цилиндрическая поверхность свободна от напряжений.

После перехода к безразмерному виду параметры задачи становятся следующими: радиусы внутренний $a/a = 1$ и внешний $r_* = b/a = 2$; напряжения умножены на A ; угол закручивания торцевого сечения α отнесен к радиусу a .

3. Решение задачи кручения сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Классическая постановка задач кручения цилиндрических тел, основанная на гипотезах Сен-Венана, не подходит для материалов, чувствительных к виду напряжённого состояния вследствие взаимосвязи объёмного и сдвигового деформирования [18]. Поэтому для построения решений задач кручения необходимо рассматривать более общие представления перемещений в цилиндрических телах для случаев, когда деформации не зависят от продольной координаты. Такие представления сформулированы в [17] на основе анализа уравнений совместности деформаций и справедливы для различных материалов с любыми механическими свойствами.

Перемещения в цилиндрических координатах r, θ, z с учетом симметрии задачи (независимости от координатного угла θ) могут быть представлены как функции радиуса и продольной координаты [17]:

$$u_r = \phi_1(r, z), \quad u_\theta = \phi_2(r, z), \quad u_z = \phi_3(r, z). \quad (7)$$

Вследствие независимости от z граничных условий, а также того, что труба считается достаточно длинной, имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

Компоненты тензора деформаций связываются с введенными в (7) функциями формулами:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial \phi_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\phi_1}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \frac{\phi_2}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi_3}{\partial r} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi_2}{\partial z}.$$

Определим характер зависимости функций ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 от продольной координаты z .

Из уравнений совместности деформаций следует:

$$- \partial \varepsilon_{zz} / \partial r = 0;$$

$$- \text{в совокупности с условием } \partial \varepsilon_{zz} / \partial z = 0 \text{ — } \varepsilon_{zz} = \beta, \quad \phi_3(r, z) = f_3(r) + \beta z;$$

$$- \text{в совокупности с условием } \partial \varepsilon_{rz} / \partial z = 0 \text{ и с учётом выражения для } \phi_3 \text{ — } \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0, \quad \phi_1 = k_1(r)z + f_1(r),$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 0 \Rightarrow k_1(r) = 0.$$

Тогда может быть найдена функция ϕ_2 , поскольку $\frac{\partial \varepsilon_{\theta z}}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial z^2} = 0$. Таким образом, $\phi_2 = k_2(r)z + f_2(r)$.

При этом

$$\frac{\partial \varepsilon_{r\theta}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right) = 0,$$

$$k_2'(r) - \frac{k_2'(r)}{r} = 0,$$

$$k_2 = \alpha r.$$

В результате, выражения для перемещений (7) преобразуются к виду:

$$u_r = f_1(r), \quad u_\theta = \alpha r z + f_2(r), \quad u_z = \beta z + f_3(r).$$

В данных выражениях, в отличие от (7), зависимости от продольной координаты z представляются в явном виде.

Найдем связь между функциями $f_1(r), f_2(r), f_3(r)$. Выразим через них компоненты тензора деформаций:

$$\varepsilon_{rr} = f_1'(r), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{f_1(r)}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \beta,$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(f_2'(r) - \frac{f_2(r)}{r} \right), \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} f_3'(r), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \alpha r.$$

Поскольку теперь деформации зависят только от r , то напряжения, согласно определяющим соотношениям, тоже зависят только от r . При этом уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{d\sigma_{r\theta}}{dr} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0, \quad \frac{d\sigma_{rz}}{dr} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (9)$$

После интегрирования второго и третьего уравнений из (9) получаем:

$$\sigma_{r\theta} = C_1/r^2, \quad \sigma_{rz} = C_2/r.$$

В общем случае граничные условия $T_i = \sigma_{ij} n_j$ на цилиндрической поверхности имеют вид:

$$T_1 = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta = 0, \quad T_2 = \sigma_{rr} \sin \theta + \sigma_{r\theta} \cos \theta = 0, \quad T_3 = \sigma_{rz} = 0.$$

Из данных условий следует, что при $r = b$ напряжения $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$, вследствие чего $C_1 = C_2 = 0$, и, значит, во всей трубе $\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$. С учётом этого из определяющих соотношений (6) находим деформации: $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = 0$ и получаем уравнения для определения функций $f_2(r)$, $f_3(r)$:

$$f_2' - f_2 r^{-1} = 0, \quad f_3' = 0. \quad (10)$$

Согласно уравнениям (10), функции $f_2 = C_3 r$, $f_3 = C_4$. Если хотя бы одна точка поперечного сечения трубы $z = 0$ закреплена, то $C_3 = C_4 = 0$. Таким образом, компоненты тензора деформаций выражаются лишь через одну функцию $f_1(r)$, которую обозначим $f(r)$. При этом становятся следующими формулы:

– для компонент тензора деформаций [17]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= f'(r), \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{f(r)}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \beta, \quad \varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{rz} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \alpha r, \\ \varepsilon &= f'(r) + f(r)/r + \beta, \quad \gamma = \varepsilon/\varepsilon_0, \\ \varepsilon_0 &= (2/3) \left[\varepsilon_r^2 + \varepsilon_{\theta\theta}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 3(\varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{\theta z}^2 + \varepsilon_{rz}^2) - (\varepsilon_{rr}\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\theta\theta}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr}\varepsilon_{zz}) \right]^{1/2} = \\ &= (2/3) \left[(f'(r))^2 + \frac{f^2(r)}{r^2} + \beta^2 + \frac{3\alpha^2 r^2}{4} - \frac{f'(r)f(r)}{r} - \frac{f(r)\beta}{r} - \beta f'(r) \right]^{1/2}; \end{aligned}$$

– для компонент тензора напряжений (см. определяющие соотношения (6))

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \left((2/3)(B - C\gamma)(f'(r) - (1/3)\varepsilon) + (A - C/\gamma)\varepsilon \right) / (AB - C^2), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \left((2/3)(B - C\gamma)(f(r)/r - (1/3)\varepsilon) + (A - C/\gamma)\varepsilon \right) / (AB - C^2), \\ \sigma_{zz} &= \left((2/3)(B - C\gamma)(\beta - (1/3)\varepsilon) + (A - C/\gamma)\varepsilon \right) / (AB - C^2). \end{aligned}$$

После подстановки полученных выражений в уравнения равновесия, приходим к нелинейному дифференциальному уравнению для определения функции $f(r)$:

$$\begin{aligned} \left(A + \frac{4}{9}B - \frac{4}{9}C\gamma \right) f'' - \frac{4}{9}Cf'\gamma' - \frac{\left(A - \frac{2}{9}B \right) (f'r - f)}{r^2} + \frac{2}{9}C \left[\frac{f}{r}\gamma' + \frac{(rf' - f)\gamma}{r} \right] + \frac{2}{9}C\beta\gamma' - \\ - \frac{C}{\gamma} \left(f'' + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) + \frac{C\gamma'}{\gamma^2} \left(f' + \frac{f}{r} + \beta \right) + \frac{2}{3r}(B - C\gamma) \left(f' - \frac{f}{r} \right) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где функция $\gamma'(r)$ представляется в виде:

$$\gamma' = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(f'' + \frac{f'r - f}{r^2} \right) - \frac{2}{9\varepsilon_0^3} \left(f' + \frac{f}{r} + \beta \right) \left[2f''f' + \frac{2ff'}{r^2} - \frac{2f^2}{r^3} - \frac{ff''}{r} - \frac{rf' - f}{r^2} (f' + \beta) + \frac{3\alpha^2 r}{2} - \beta f'' \right]. \quad (12)$$

Дифференциальное уравнение (11) с учётом (12) и формул для компонент тензора деформаций разрешимо относительно старшей производной, поэтому его можно представить в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Введем подстановку $y_1 = f(r)$, тогда система преобразуется к виду:

$$y_2 = y_1', \quad y_2' = -\frac{SS_1 + S_5 + S_6}{S_7 + S_8 + S_9},$$

где

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -\frac{C}{9} \left(4y_2 - \frac{2y_1}{r} - \frac{9k}{\gamma} - 2\beta \right), \\
 S_2 &= \frac{y_2 r - y_1}{kr^2}, \quad S_3 = \frac{2\gamma}{9k^2}, \quad S = S_2 - S_3 S_4, \\
 S_4 &= \frac{(2y_1 - y_2 r - \beta r)(y_2 r - y_1)}{r^3} + \frac{3\alpha^2 r}{2}, \\
 k &= \frac{2}{3} \left(y_2^2 + \frac{y_1^2}{r^2} + \beta^2 + \frac{3\alpha^2 r^2}{4} - \frac{y_2 y_1}{r} - \frac{y_1 \beta}{r} - \beta y_2 \right)^{1/2}, \\
 S_5 &= \frac{\left(-\frac{C}{\gamma} + A - \frac{2}{9} B + \frac{2C\gamma}{9} \right) (y_2 r - y_1)}{r}, \\
 S_6 &= \frac{2(B - C\gamma)(y_2 r - y_1)}{2r^2}, \quad \lambda = \frac{4C \left(k + \frac{\gamma\beta}{9} \right)}{9k^2 r}, \\
 S_7 &= A + \frac{4}{9} B - \frac{4C\gamma}{9} - (2y_2 r - y_1)\lambda, \\
 S_8 &= 2C \left[\frac{\beta}{9k} + \frac{2(2y_2 r - y_1)^2 \gamma}{(9kr)^2} \right], \\
 S_9 &= 2C \left[\beta r \left(\frac{1}{k} + \frac{2\beta\gamma}{9} \right) - \frac{\gamma(2y_2 r - y_1)}{9k^2 r} \right].
 \end{aligned}$$

Система уравнений не изменится при переходе к безразмерным переменным: $\bar{r} = r/a$, $\bar{y}_1 = y_1/a$, $\bar{\alpha} = \alpha a$ и безразмерным напряжениям $\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} A$. В дальнейшем надчёркивания в обозначениях переменных опускаем.

Граничные условия для задачи кручения трубы имеют вид:

$$\sigma_{rr}|_{r=1} = 0, \quad \sigma_{rr}|_{r=r^*} = 0.$$

Значения крутящего момента и осевой силы находятся в ходе решения по формулам:

$$M = 2\pi \int_1^{r^*} \sigma_{\theta z} r^2 dr, \quad F_z = 2\pi \int_1^{r^*} \sigma_{zz} r dr.$$

Параметр β , характеризующий осевую деформацию, можно вычислить из условия равенства нулю осевой силы [17].

Для численного решения задачи в дифференциальной постановке и определения двух необходимых условий в одной точке использовался метод стрельбы и метод Рунге–Кутты с автоматическим выбором шага интегрирования и оценкой погрешности [21–23]. Для решения задачи выбраны следующие значения параметров: $B/A = 5/3$, $C/A = 0,6$, $\alpha = 0,015$, $r_* = b/a = 2$.

Воспользуемся уравнениями метода Рунге–Кутты 4-го порядка с теми коэффициентами, которые приведены в [23]. Рассмотрим задачу Коши:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (13)$$

Приближенное значение в последующих точках при шаге h вычисляется по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned}$$

Чтобы оценить погрешность вычислений и эффективность выбор шага интегрирования, воспользуемся методом горизонтального выбора шага. Посчитаем значения интеграла в точке за один и за два шага с учётом погрешности метода, затем найдём их разность:

$$\Delta = (I_1 - I_{22}) / (1 - 1/2^s),$$

где I_1 — значение интеграла, посчитанное за один шаг, I_{22} — значение интеграла за два шага, s — порядок метода (в рассматриваемом случае $s = 4$). Тогда главный член погрешности будет равен: $\Delta = Ch^{s+1}$, где C — константа.

Выбираем новый шаг h_{new} таким образом, чтобы погрешность на нём составила $Ch_{new}^{s+1} = \epsilon$:

$$(h/h_{new})^{s+1} = \Delta/\epsilon = \chi.$$

Следующий шаг определяем как

$$h_{new} = 0,95h/\chi^{1/(s+1)}.$$

Глобальную погрешность вычисляем по формуле:

$$\delta_{k+1} = \delta_k \exp\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \mu dx\right) + r_k,$$

где $(x_{k+1} - x_k)$ — величина $k+1$ -го шага, δ_k — значение глобальной погрешности к k -му шагу, r_k — локальная погрешность на k -м шаге, μ — максимальное сингулярное число — максимальное собственное значение матрицы $(J + J^T)/2$, где J — якобиан системы (13).

В результате вычислительных экспериментов установлено, что максимальная глобальная погрешность решения не превышает $1 \cdot 10^{-6}$. Распределения компонент тензоров деформаций и напряжений по толщине трубы представлены на рисунке 1. Рисунок 1а демонстрирует, что в трубе возникают сопоставимые

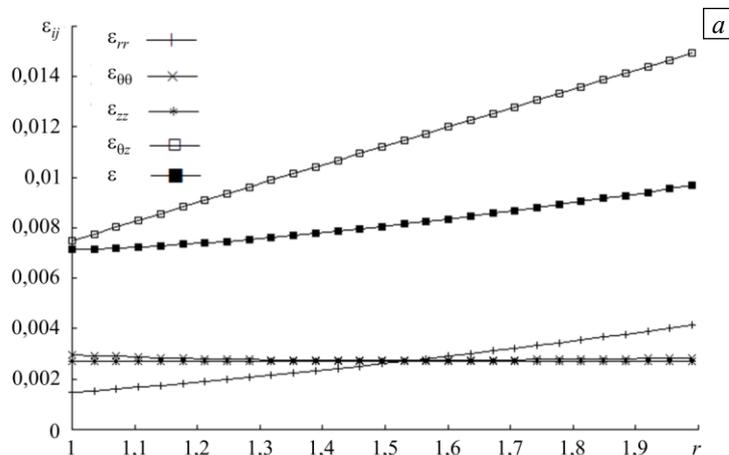


Рис. 1. Распределения компонент тензоров деформаций (а) и напряжений (б) по толщине для задачи кручения трубы при расчёте методом сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений; напряжения безразмерные (умножены на параметр A)

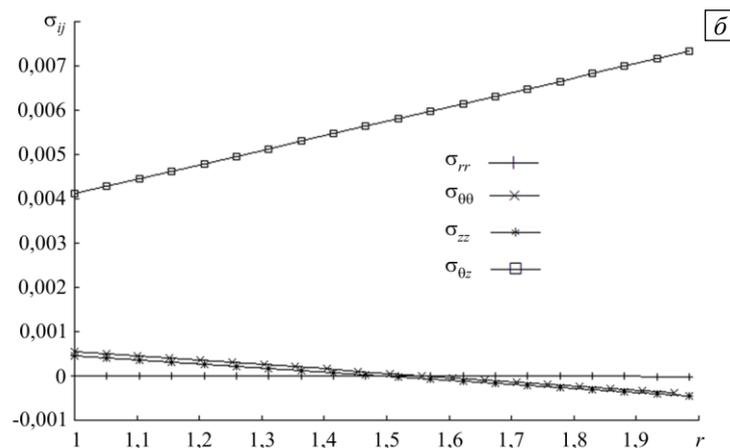


Рис. 1. Продолжение

по величине объёмная и сдвиговая деформации. Кроме того, результаты расчёта показывают, что кручение сопровождается осевой деформацией. Также из анализа кривых напряжений (Рис. 1б) можно заключить, что учёт физической нелинейности при кручении приводит к существенному отличию от случая линейной упругости: в классическом решении ненулевой является только одна касательная компонента тензора напряжений.

4. Решение задачи кручения с помощью метода конечных элементов

Для получения численного решения задачи кручения использовался пакет конечно-элементного анализа ANSYS. Для того чтобы внедрить в пакет определяющие соотношения требуется написание на основе USERMAT собственной реализующей функции [28, 29] и соответствующего кода подключения на языке ANSYS APDL. В рамках данной работы для этих целей написана специальная библиотека на языке FORTRAN 77.

Итак, согласно методу конечных элементов, решение задачи сводится к решению системы алгебраических уравнений:

$$[K]\{u\} = F^a,$$

$[K]$ — матрица коэффициентов, $\{u\}$ — вектор неизвестных степеней свободы, который понимается как вектор перемещений, F^a — вектор приложенных напряжений. В случае, когда алгебраические соотношения являются нелинейными, прямые способы решения системы, например, метод Гаусса, неприемлемы. В системе ANSYS применяется итерационный метод Ньютона–Рафсона:

$$\begin{aligned} [K_i^T]\{\Delta u_i\} &= \{F^a\} - \{F_i^{int}\}, \\ \{u_{i+1}\} &= \{u_i\} + \{\Delta u_i\}, \end{aligned}$$

где $[K_i^T]$ — якобиан (матрица частных производных), i — индекс, обозначающий текущую итерацию, $\{F_i^{int}\}$ — вектор внутренних напряжений, вызванных внутренними деформациями к i -й итерации.

Суть метода сводится к последовательному применению следующих шагов:

1. Выбираем $\{u_i\}$. Обычно за $\{u_i\}$ принимается сошедшее решение с предыдущего шага. На первом шаге полагаем $\{u_0\} = \{0\}$.
2. Вычисляем обновлённый якобиан и вектор внутренних напряжений по заданному $\{u_i\}$.
3. Находим разность относительно значения на первом шаге $\{\Delta u_i\}$.
4. Складываем $\{\Delta u_i\}$ и $\{u_i\}$, чтобы получить следующее приближение $\{u_{i+1}\}$.
5. Повторяем шаги до выполнения условий сходимости решения.

Фактически решение приближается отрезками касательных. Из этого следует, что метод не будет сходиться в случае больших вторых производных $\{F_i^{int}\}$. Кроме того, проблемы возникнут и в случае,

когда матрица $[K_i^T]$ вырождена, например, в смысле числа обусловленности, которое в общем случае находится как произведение норм исходной и обратной матриц: $\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$,

В системе ANSYS предусматриваются следующие условия сходимости метода [17]:

$$\begin{aligned} \|\{R\}\| &< \varepsilon_R R_{ref}, \\ \|\{\Delta u_i\}\| &< \varepsilon_u u_{ref}, \end{aligned}$$

где вектор $\{R\} = \{F^a\} - \{F^{inv}\}$ — вектор невязок по напряжениям, $\{\Delta u_i\}$ — приращение перемещений на i -м шаге, ε_R и ε_u — постоянные, отвечающие за точность метода. Здесь используется стандартная L_2 норма: $\|\{R\}\| = (\sum R_i^2)^{1/2}$. Обычно $R_{ref} = \|\{F^a\}\|$, $u_{ref} = \|\{u\}\|$.

На каждой итерации метода Ньютона–Рафсона происходит вызов функции USERMAT. На входе ей из ANSYS передаются значения тензора напряжений, деформаций и параметры состояния на начало итерации по времени, а также приращений тензора деформаций. Отвечающая решаемой задаче кручения функция USERMAT должна обновить тензоры напряжений и переменные состояния на состояние, актуальное в конце итерации. Кроме того, она должна посчитать матрицу частных производных $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{kl}$.

Следует отметить, что тензоры напряжений, деформаций и матрица частных производных напряжений $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{kl}$ хранятся в векторной или матричной формах. Для трехмерного случая принят следующий порядок компонент: 11, 22, 33, 12, 23, 13. Для смешанных компонент тензора деформаций имеем: $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$.

На нулевом шаге на вход написанной функции USERMAT приходят значения: $\varepsilon_{ij}^0 = 0$, $\Delta\varepsilon_{ij}^0 = 0$. Особенностью применяемых определяющих соотношений является то, что значения производных $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{kl}$ при нулевых деформациях не известны, и, соответственно, на нулевом шаге посчитать матрицу частных производных по определению не представляется возможным. Эту трудность можно обойти, если на нулевом шаге матрицей частных производных считать соответствующую матрицу для закона Гука (при $C=0$ с соответствующими параметрами Ламе: $\lambda = \frac{1}{B} - \frac{2}{9A}$, $\mu = \frac{1}{3A}$).

Библиотека написана на основе стандартного примера реализации функции USERMAT (закон Гука). Проведена верификация: при значении параметра $C=0$ получаемое решение соответствует решению на основе модели линейной упругости.

Выполним расчёт для задачи кручения нестеснённого осевым усилием цилиндра с внутренним радиусом 1, внешним радиусом 2, длиной 20 при $\frac{B}{A} = \frac{5}{3}$, $\frac{C}{A} = 0,6$ и угле закручивания $\alpha = 0,015$ одного из концов, другой конец жёстко закреплён. Сеточная модель расчётной области создавалась

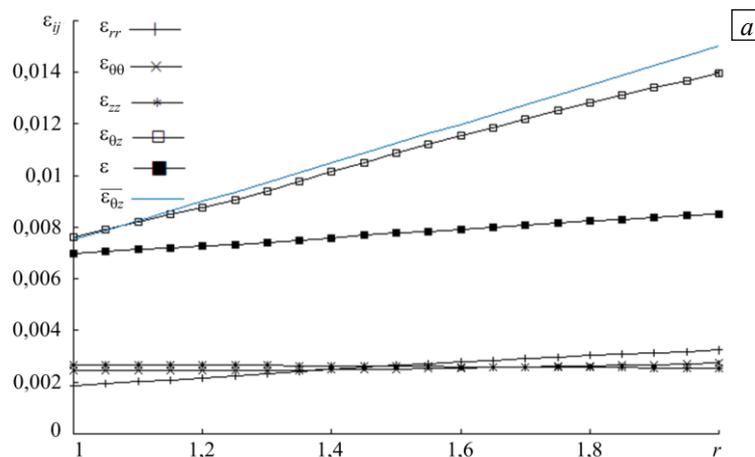


Рис. 2. Распределения компонент тензоров деформаций (а) и напряжений (б) для задачи кручения трубы при расчёте методом конечных элементов; напряжения безразмерные, умножены на параметр A ; $\bar{\varepsilon}_{\theta z}$ и $\bar{\sigma}_{\theta z}$ — смешанные компоненты тензора напряжений для случая линейной упругости

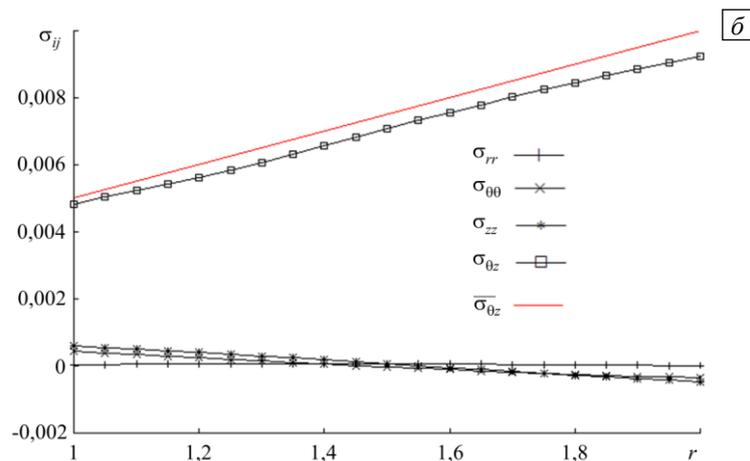


Рис. 2. Продолжение

командой «SMRTSIZE, 1». Для дискретизации использовались конечные элементы SOLID186 — объемные (трехмерные) гексаэдрические квадратичные элементы, имеющие двадцать узлов с квадратичным представлением перемещений. Результаты численного решения представлены на рисунке 2. Для сравнения также приведены распределения смешанных компонент тензора деформаций $\bar{\epsilon}_{\theta z}$ и напряжений $\bar{\sigma}_{\theta z}$ для случая линейной упругости ($C=0$), когда $\epsilon_{rr} = \epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{zz} = 0$ и $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0$.

После сравнения рисунка 1а с 2а и рисунка 1б с 2б можно сделать вывод, что результаты решения задачи нестеснённого кручения трубы, полученные разными методами, качественно и количественно практически совпадают. Некоторые различия можно объяснить тем, что при решении с помощью метода конечных элементов сетка была достаточно грубой. Также нужно отметить наличие ненулевой осевой деформации ϵ_{zz} .

5. Выводы

На основании проведённого численного решения задач и анализа результатов установлено, что использование предлагаемых определяющих соотношений позволяет, оставаясь в условиях теории малых деформаций, описывать эффект увеличения объёма при кручении цилиндрических и трубчатых образцов, а также изменение длины и размеров поперечного сечения. В отличие от решения для линейно упругого тела, в котором только две касательных компоненты тензора напряжений и две сдвиговых компоненты тензора деформаций отличны от нуля, для рассмотренных материалов ненулевыми являются и другие компоненты тензоров деформаций и напряжений.

Опробовано два метода решения задачи кручения трубы:

- 1) путём сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и её последующего численного решения методом Ньютона–Рафсона;
- 2) с помощью метода конечных элементов. Для предлагаемых определяющих соотношений написаны библиотека функции USERMAT и код подключения к системе конечно-элементного анализа ANSYS. Проведена верификация работы написанной библиотеки для решения задач кручения. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают, что рассмотренные определяющие соотношения способны описывать поведение широкого класса материалов: горных пород, бетонов, конструкционных графитов и других, свойства которых могут меняться в процессе нагружения.

Разработанное программное обеспечение в дальнейшем может быть использовано для решения различных, в том числе прикладных задач.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00356).

Литература

1. Леонов М.Я., Паняев В.А., Русинко К.Н. Зависимость между деформациями и напряжениями для полухрупких тел. // Инж. журнал. МГТ. 1967. № 6. С. 26-32.
2. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М.: Недра, 1979. 301 с.
3. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials // J. Mech. Phys. Solid. 1975. Vol. 23. P. 371-394. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
4. Ягн Ю.Н., Евстратов В.В. Прочность и пластичность модифицированного чугуна при различных напряженных состояниях // ДАН СССР. 1957. Т. 113, № 3. С. 573-575.

5. Фридман А.М., Ануфриев Ю.П., Барабанов В.Н. Исследование разрушения углеграфитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния // Проблемы прочности. 1973. № 1. С. 52-55. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00762872>)
6. Jaeger J.C., Cook N.G.W., Zimmerman R.W. *Fundamentals of rock mechanics*. Oxford: Blackwell, 2007. 475 p.
7. Pourhosseini O., Shabanimashcool M. Development of an elasto-plastic constitutive model for intact rocks // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2014. Vol. 66. P. 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2013.11.010>
8. Zhao X.G., Cai M. A mobilized dilation angle model for rocks // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2010. Vol. 47. P. 368-384. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2009.12.007>
9. Ren C., Yu J., Cai Y., Yao W., Lai Y., Li B. A novel constitutive model with plastic internal and damage variables for brittle rocks // *Eng. Frac. Mech.* 2021. Vol. 248. 107731. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107731>
10. Jin J., She C., Shang P. Evolution models of the strength parameters and shear dilation angle of rocks considering the plastic internal variable defined by a confining pressure function // *Bull. Eng. Geol. Environ.* 2021. Vol. 80. P. 2925-2953. <https://doi.org/10.1007/s10064-020-02040-1>
11. Zhang Q.S., Yang G.S., Ren J.X. New study of damage variable and constitutive equation of rock // *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*. 2003. Vol. 22. P. 30-34.
12. Xiao J.-Q., Ding D.-X., Jiang F.-L., Xu G. Fatigue damage variable and evolution of rock subjected to cyclic loading // *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 2010. Vol. 47. P. 461-468. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2009.11.003>
13. Vakili A. An improved unified constitutive model for rock material and guidelines for its application in numerical modelling // *Computers and Geotechnics*. 2016. Vol. 80. P. 261-282. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2016.08.020>
14. Dhuha H. Ali. Prediction of stresses around tunnel in rock during advancing TBM // *Diyala Journal of Engineering Sciences*. 2020. Vol. 13. P. 101-113. <https://doi.org/10.24237/djes.2020.13310>
15. Liu Y., Lai H. Load characteristics of tunnel lining in flooded loess strata considering loess structure // *Adv. Civil. Eng.* 2019. Vol. 2019. 3731965. <https://doi.org/10.1155/2019/3731965>
16. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1978. № 6. С. 29-34.
17. Ломакин Е.В. Кручение цилиндрических тел с изменяющимися деформационными свойствами // *Изв. РАН. МТТ*. 2008. № 3. С. 217-226. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654408030217>)
18. Ломакин Е.В. Кручение стержней с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // *Изв. РАН. МТТ*. 2002. № 4. С. 30-38.
19. Ломакин Е.В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1991. № 6. С. 66-75.
20. Адамов. А.А. Методические проблемы экспериментального обеспечения и верификации определяющих уравнений разномодульной теории упругости // *ПМТФ*. 2020. Т. 61, № 6. С. 82-90. <https://doi.org/10.15372/pmtf20200611>
21. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 320 с.
22. Hussein A., Marzouk H. Behavior of high-strength concrete under biaxial stresses // *Aci Structural Journal*. 2000. Vol. 97. P. 27-36.
23. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behaviour of concrete under biaxial stresses // *ASCE J. Eng. Mech. Div.* 1973. Vol. 99. P. 853-866. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001789>
24. Новожилов В.В. О физическом смысле инвариантов используемых в теории пластичности // *ПММ*. 1952. Т. 16, № 5. С. 615-619.
25. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином, 2008. 636 с.
26. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. М: Мир, 1990. 512 с.
27. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994. 528 с.
28. ANSYS 13. Documentation. Theory Reference. URL: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/ans_thry.html (дата обращения 07.12.2021)
29. ANSYS Mechanical APDL Programmers Reference. URL: <https://dokumen.tips/documents/ansys-mechanical-apdl-programmers-reference.html> (дата обращения 07.12.2021)

References

1. Leonov M.Ya., Panyayev V.A., Rusinko K.N. Zavisimost' mezhdru deformatsiyami i napryazheniyami dlya polukhrupkikh tel [Relationship between deformations and stresses for semi-brittle bodies]. *Inzh. zhurnal. MTT – Mechanics of Solids*, 1967, no. 6, pp. 26-32.
2. Stavrogin A.N., Protosenya A.G. *Plastichnost' gornykh porod* [Plasticity of rocks]. Moscow, Nedra, 1979. 301 p.
3. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1975, vol. 23, pp. 371-394. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(75\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(75)90001-0)
4. Yagn Yu.N., Evstratov V.V. Prochnost' i plastichnost' modifitsirovannogo chuguna pri razlichnykh napryazhennykh sostoyaniyakh [Strength and ductility of modified cast iron under various stress states]. *DAN SSSR – Soviet mathematics. Doklady*, 1957, vol. 113, no. 3, pp. 573-575.
5. Fridman T.M., Anufriev Yu.P., Barabanov V.N. Study of the feature of graphitic materials under complex stressed-state conditions. *Strength Mater.*, 1973, vol. 5, pp. 52-55. <https://doi.org/10.1007/BF00762872>
6. Jaeger J.C., Cook N.G.W., Zimmerman R.W. *Fundamentals of rock mechanics*. Oxford: Blackwell, 2007. 475 p.
7. Pourhosseini O., Shabanimashcool M. Development of an elasto-plastic constitutive model for intact rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2014, vol. 66, pp. 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2013.11.010>
8. Zhao X.G., Cai M. A mobilized dilation angle model for rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2010, vol. 47, pp. 368-384. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2009.12.007>
9. Ren C., Yu J., Cai Y., Yao W., Lai Y., Li B. A novel constitutive model with plastic internal and damage variables for brittle rocks. *Eng. Frac. Mech.*, 2021, vol. 248, 107731. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2021.107731>

10. Jin J., She C., Shang P. Evolution models of the strength parameters and shear dilation angle of rocks considering the plastic internal variable defined by a confining pressure function. *Bull. Eng. Geol. Environ.*, 2021, vol. 80, pp. 2925-2953. <https://doi.org/10.1007/s10064-020-02040-1>
11. Zhang Q.S., Yang G.S., Ren J.X. New study of damage variable and constitutive equation of rock. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2003, vol. 22, pp. 30-34.
12. Xiao J.-Q., Ding D.-X., Jiang F.-L., Xu G. Fatigue damage variable and evolution of rock subjected to cyclic loading. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2010, vol. 47, pp. 461-468. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2009.11.003>
13. Vakili A. An improved unified constitutive model for rock material and guidelines for its application in numerical modelling. *Computers and Geotechnics*, 2016, vol. 80, pp. 261-282. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2016.08.020>
14. Dhuha H. Ali. Prediction of stresses around tunnel in rock during advancing TBM. *Diyala Journal of Engineering Sciences*, 2020, vol. 13, pp. 101-113. <https://doi.org/10.24237/djes.2020.13310>
15. Liu Y., Lai H. Load characteristics of tunnel lining in flooded loess strata considering loess structure. *Adv. Civil. Eng.*, 2019, vol. 2019, 3731965. <https://doi.org/10.1155/2019/3731965>
16. Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N. Sootnosheniya teorii uprugosti dlya izotropnogo raznomodul'nogo tela [A theory of elasticity for isotropic body with different moduli in tension and compression]. *Izv. AN SSSR. MTT – Mechanics of solids*, 1978, vol. 13, no. 6, pp. 29-34.
17. Lomakin E.V. Torsion of cylindrical bodies with varying strain properties. *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, pp. 502-511. <https://doi.org/10.3103/S0025654408030217>
18. Lomakin E.V. Torsion of rods with elastic properties depending on the stress state type. *Izv. AN SSSR. MTT – Mechanics of solids*, 2002, vol. 37, no. 4, pp. 23-30.
19. Lomakin E.V. Opredelyayushchiye sootnosheniya deformatsionnoy teorii dlya dilatiruyushchikh sred [Constitutive relations of deformation theory for dilatant media]. *Izv. AN SSSR. MTT – Mechanics of solids*, 1991, no. 6, pp. 66-75.
20. Adamov A.A. Methodological problems in experimental studies and verification of the governing equations of the theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2020, vol. 61, pp. 979-985. <https://doi.org/10.1134/S0021894420060115>
21. Ambartsumyan S.A. *Raznomodul'naya teoriya uprugosti* [Multi-modulus theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1982. 320 p.
22. Hussein A., Marzouk H. Behavior of high-strength concrete under biaxial stresses. *Acta Structural Journal*, 2000, vol. 97, pp. 27-36.
23. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behaviour of concrete under biaxial stresses. *ASCE J. Eng. Mech. Div.*, 1973, vol. 99, pp. 853-866. <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0001789>
24. Novozhilov V.V. O fizicheskom smysle invarivntov ispol'zuyemykh v teorii plastichnosti [On the physical meaning of invariants used in the theory of plasticity]. *PMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1952, vol. 16, no. 5, pp. 615-619.
25. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* [Computational methods]. Moscow, Binom, 2008. 636 p.
26. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems*. Springer, 1993. 528 p.
27. Fedorenko R.P. *Vvedeniye v vychislitel'nyuyu fiziku* [An introduction to computational physics]. Moscow, Izd-vo MFTI, 1994. 528 p.
28. ANSYS 13. Documentation. Theory Reference. URL: https://www.mm.bme.hu/~gyebro/files/ans_help_v182/ans_thry/ans_thry.html (accessed 7 December 2021.07.12.2021).
29. ANSYS Mechanical APDL Programmers Reference. URL: <https://dokumen.tips/documents/ansys-mechanical-apdl-programmers-reference.html> (дата обращения 07.12.2021)

Поступила в редакцию 22.04.2021; после доработки 08.11.2021; принята к опубликованию 10.11.2021.

Сведения об авторах

Ломакин Евгений Викторович, дфмн, чл.-корр. РАН, проф., зав.каф., Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (МГУ), 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1; e-mail: lomakin@mech.math.msu.su

Тишин Павел Владимирович, асп., МГУ; e-mail: domestic92@inbox.ru