

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.4.33](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.33)

УДК 539.3

## ДВУХУРОВНЕВАЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЙ КРИСТАЛЛИТОВ В ОТСЧЕТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ И СЛОЖНОСТИ НАГРУЖЕНИЯ НА ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

П.В. Трусов, А.С. Соколов

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация*

В современной технике детали и элементы конструкций зачастую испытывают воздействия значительных нагрузок в широких диапазонах изменения температур и скоростей деформации, подвергаются сложному нагружению. Вследствие этого к свойствам материалов, используемых для их создания, выдвигаются повышенные требования, которые необходимо учитывать при проектировании объектов разных размеров – от миниатюрных до крупногабаритных. Значительная часть конструкций, эксплуатируемых в различных отраслях промышленности, изготавливается из поликристаллических металлов и сплавов. На физико-механические свойства поликристаллических материалов в готовых изделиях влияет множество факторов: их фазовый и компонентный состав, мезо- и микроструктура (в том числе распределение ориентаций кристаллитов (зерен, субзерен), симметричные свойства последних), начальные (остаточные) напряжения, появившиеся при изготовлении объекта. Так как проведение натурных экспериментов связано со значительными материальными и временными затратами, для проектирования конструкций и отработки технологии их изготовления, как правило, применяются соответствующие математические модели, которые предоставляют возможность описывать физические процессы, происходящие внутри материала, с той или иной степенью точности. Важнейшим элементом разрабатываемых для решения указанных задач математических моделей являются определяющие соотношения (или конститутивные модели). В настоящее время наиболее перспективными являются многоуровневые модели, основанные на введении внутренних переменных и физических теориях пластичности. При построении конститутивных моделей упругопластического деформирования поликристаллов часто в целях упрощения для описания упругой составляющей деформаций кристаллитов прибегают к изотропным определяющим соотношениям. Данная работа посвящена исследованию погрешностей, возникающих при замене анизотропных упругих свойств кристаллитов соответствующими изотропными, для материалов с ОЦК, ГЦК, ГПУ решетками для различных законов распределения ориентации решеток кристаллитов в поликристаллическом агрегате в отсчетной конфигурации. С применением двухуровневой модели, основанной на физической теории упруговязкопластичности, для анализа эволюции напряженно-деформированного состояния и оценки остаточных напряжений в кристаллитах проведены численные эксперименты по нагружению образцов простым сдвигом, двумя последовательными простыми нагружениями, а также при циклическом деформировании.

*Ключевые слова:* двухуровневая физическая упруговязкопластическая модель, эквивалентный изотропный материал, остаточные мезонапряжения, кристаллографическая текстура

## THE TWO-LEVEL ELASTIC-VISCOPLASTIC MODEL: ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF CRYSTALLITE ORIENTATION DISTRIBUTION IN THE REFERENCE CONFIGURATION AND THE COMPLEXITY OF LOADING ON THE BEHAVIOR OF POLYCRYSTALLINE MATERIALS

P.V. Trusov and A.S. Sokolov

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation*

Components and structural elements used in modern technology are often exposed to significant loads in wide ranges of high and low temperature and deformation rates, high stresses and loading rates. All these factors, as well as complex loading schemes that must be considered when designing structures of different sizes - from miniature to large-scale -, put forward increased requirements for the properties of materials. A significant part of the structures used in various industries are made of polycrystalline metals and alloys. The physical and mechanical properties of polycrystalline aggregates in finished products depend on their phase and component composition, meso- and microstructure, including the orientation of crystallites (grains, subgrains), symmetry properties of subgrains, and on the initial (residual) stresses that occur during their manufacturing. Experimenting with full-scale structures requires considerable material and time expenditures, therefore mathematical modeling approaches are applied, especially for designing structures and their manufacturing processes. Mathematical modelling provides an opportunity to describe processes in any materials with this or that degree of accuracy. Constitutive relations (or constitutive models) are the most important element of the mathematical models developed for solving these problems. Currently, the most promising among these models are multilevel models based on the introduction of internal variables and crystal plasticity. When analyzing the elastic-plastic deformation of various products, the isotropic constitutive relations are often used to simplify the analysis of the elastic component of deformations. The present work is devoted to the study of errors arising when the anisotropic elastic properties of crystallites are replaced by the corresponding isotropic properties of the materials with BCC, FCC and HCP lattices for different laws of orientation distribution of crystallites in a polycrystalline aggregate in the reference configuration. Using the two-level model based on the elastic-viscoplastic crystal plasticity, a series of numerical experiments on simple shear loading, sequences of two simple loads and cyclic deformation were performed to analyze the evolution of the stress-strain state and to estimate the residual stresses in crystallites.

*Key words:* two-level physical elastic-viscoplastic model, equivalent isotropic material, residual mesoscopic stresses, crystallographic texture

### 1. Введение

Несмотря на все более широкое использование в различных отраслях промышленности композитов, металлы и сплавы остаются в числе основных конструкционных материалов. Разработка технологических

режимов обработки сплавов в последние десятилетия опирается на математическое моделирование процессов неупругого деформирования в широких диапазонах термомеханических воздействий. При этом в основу большинства моделей, ориентированных на решение практически важных задач, положены макрофеноменологические теории пластичности, упруговязкопластичности, ползучести [1–6]. Следует отметить, что теории данного класса базируются на результатах макроэкспериментов (в большинстве случаев — при одноосном нагружении), не учитывают в явном виде физические механизмы и структуру материалов на различных структурно-масштабных уровнях. В настоящее время существует большое количество экспериментальных данных и теоретических исследований, которые показывают, что процессы неупругого деформирования и свойства поликристаллических материалов на макроуровне определяются главным образом состоянием эволюционирующей мезо- и микроструктуры материала. В связи с указанными обстоятельствами все более широкое признание и распространение находят обладающие значительной универсальностью многоуровневые модели, основанные на введении внутренних переменных и физических теориях неупругости (упругопластичности, упруговязкопластичности) [7–11].

В последние 15–20 лет для улучшения физико-механических свойств изделий из металлов и сплавов актуальным в промышленном и машиностроении становится применение обработки посредством интенсивного пластического деформирования (ИПД), которое позволяет получать материалы с уникальными свойствами: субмикроструктурные, нанокристаллические, текстурированные, способные к сверхпластическим деформациям и другие. Многочисленные результаты свидетельствуют, что испытанные ИПД изделия обладают повышенными эксплуатационными свойствами. Приобретение таких свойств является следствием существенного изменения мезо- и микроструктуры материала: формоизменения, дробления и фрагментации зерен, разворотов кристаллографических решеток субзерен и фрагментов, эволюции дислокационной субструктуры.

Для совершенствования существующих и разработки новых технологий ИПД с целью получения материалов и изделий с улучшенными эксплуатационными характеристиками необходимо построение конститутивных моделей материалов, способных описывать эволюцию структуры при деформировании, учитывать влияние ее изменения на параметры процесса и эффективные свойства материала на макромасштабном уровне. Данными возможностями в полной мере обладают отмеченные выше многоуровневые модели, востребованные также при создании функциональных материалов [11].

Многоуровневые модели подразделяются: а) по числу рассматриваемых уровней; б) по виду определяющих соотношений на нижнем структурно-масштабном уровне; в) по способам (гипотезам) связи родственных параметров различных уровней. Можно выделить три основных группы моделей данного класса: прямые, самосогласованные и статистические [11]. На сегодняшний день наиболее распространенными являются статистические двухуровневые (включающие мезо- и макроуровень) упруговязкопластические модели, берущие начало в работах Тейлора [12] и Линя [13]. Один из вариантов статистических моделей и будет использоваться в настоящей работе.

Следует отметить, что исследование технологий ИПД требует постановки и решения краевых задач с учетом геометрической нелинейности граничных условий, кинематических и определяющих соотношений (ОС). Одним из базовых уравнений модели является упругий закон, формулируемый в большинстве случаев в скоростной релаксационной форме. При этом часто принимается предположение об изотропии упругих свойств как на макро-, так и на мезоуровне. Подобная гипотеза еще может быть принята на макроуровне для поликристаллических металлов (при равномерном законе распределения ориентаций решеток зерен), но едва ли она приемлема на мезоуровне (уровне отдельных кристаллитов — зерен, субзерен). В связи с этим возникает вопрос об оценке погрешностей, вносимых предположением об изотропии упругих свойств как на уровне представительного макрообъема, так и на уровне кристаллитов. Следует отметить, что при описании пластического деформирования в физических теориях упруговязкопластичности анизотропия кристаллитов, естественно, учитывается. Ранее авторами анализировалось соответствие напряженно-деформированных состояний (НДС) (в том числе остаточных напряжений, получаемых при полной разгрузке представительного макрообъема), отвечающих анизотропным и эквивалентным изотропным упругим характеристикам в условиях простого нагружения. При этом считалось, что поликристаллические образцы имеют три различных типа решеток с начальным равномерным распределением ориентаций решеток [14]. В настоящей работе приведены результаты исследований для произвольных сложных нагружений поликристаллических образцов с различными законами распределения ориентаций кристаллитов в отсчетной конфигурации.

## 2. Математическая постановка

Решение задачи определения НДС осуществляется с применением двухуровневой упруговязкопластической модели [11]. В качестве элемента макроуровня выступает представительный макрообъем (ПО) поликристалла, то есть минимальной объем агрегата кристаллитов (зерен, субзерен), при котором увеличение количества кристаллитов не приведет к существенным отклонениям по анализируемым параметрам данного уровня (например, по зависимости интенсивности напряжений от интенсивности накопленной пластической деформации). В качестве элемента мезоуровня

рассматривается кристаллит (зерно, субзерно). За основной механизм деформирования принимается движение краевых дислокаций по известным для каждого типа решетки системам скольжения (СС); учитывается упрочнение на СС и повороты решеток кристаллитов при нагружении.

Одним из важнейших вопросов при построении конститутивных моделей, пригодных для описания процессов деформирования с большими градиентами перемещений (с учетом геометрической нелинейности), является разложение движения на квазитвердое и деформационное [15]; разложение движения должно позволять учитывать симметричные свойства кристаллитов. С этой целью для каждого элемента мезоуровня (кристаллита) вводится собственная подвижная недеформируемая ортогональная декартова система координат (ПСК)  $Ox^1x^2x^3$  с базисом  $\mathbf{k}^i$ , жестко связанная с кристаллографическим направлением и кристаллографической плоскостью, содержащей это направление [16, 17]. В системе координат, жестко связанной с решеткой кристаллита, компоненты тензора упругих характеристик  $\mathbf{n}$  можно считать неизменными. Однородное (аффинное) изменение конфигурации каждого кристаллита определяется градиентом деформации мезоуровня (транспонированным градиентом места)  $\mathbf{f}$  [18, 15]. Для рассмотрения как упругих, так и неупругих деформаций вводится дополнительная разгруженная конфигурация, получаемая из отсчетной конфигурации преобразованием, не изменяющим ориентации решетки (из отсчетной конфигурации — пластической составляющей  $\mathbf{f}^p$  градиента места, а из актуальной — преобразованием  $\mathbf{f}^{e-1}$ ). Наряду с классическим мультипликативным разложением градиента места  $\mathbf{f} = \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^p$  [19, 20] в качестве основного используется предложенное в статьях [16, 17] разложение:  $\mathbf{f} = \bar{\mathbf{f}}^e \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}^p$ , где  $\mathbf{f}^e$  — упругая составляющая градиента места,  $\mathbf{r} = \mathbf{k}_i \mathbf{k}_0^i$  — собственно ортогональный тензор, преобразующий отсчетный базис  $\mathbf{k}_0^i$  подвижной системы координат (ПСК) в текущий,  $\bar{\mathbf{f}}^e$  — градиент места, преобразующий пластически деформированную конфигурацию, испытавшую поворот, в актуальную конфигурацию на мезоуровне, то есть  $\bar{\mathbf{f}}^e$  отражает искажение кристаллической решетки. При таком разложении квазитвердое движение кристаллита описывается тензором ротации  $\mathbf{r}$ , одновременно определяющим ротацию жесткой ПСК.

Математическая формулировка подмоделей макро- и мезоуровня представлена ниже (параметры макроуровня обозначены заглавными буквами, параметры мезоуровня — аналогичными строчными буквами). Системы уравнений имеют вид:

– для макроуровня

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}^{\text{cor}} \equiv \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Pi} : (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega} - \mathbf{Z}^{\text{in}}), \\ \mathbf{\Pi} = \langle \mathbf{n} \rangle, \\ \mathbf{\Omega} = \langle \mathbf{\omega} \rangle, \\ \mathbf{Z}^{\text{in}} = \langle \mathbf{z}^{\text{in}} \rangle + \mathbf{\Pi}^{-1} : \langle \mathbf{n}' : \mathbf{z}^{\text{in}'} \rangle + \mathbf{\Pi}^{-1} : (\langle \mathbf{\kappa}' \cdot \mathbf{\omega}' \rangle - \langle \mathbf{\omega}' \cdot \mathbf{\kappa}' \rangle); \end{array} \right. \quad (1)$$

– для мезоуровня

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}^{\text{cor}} \equiv \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{\omega} - \mathbf{\omega} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} : (\mathbf{1} - \mathbf{z}^{\text{in}} - \mathbf{\omega}), \\ \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^T = \mathbf{\omega}, \\ \mathbf{z}^{\text{in}} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}, \\ \dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau^{(k)}}{\tau_c^{(k)}} \right)^m \mathbf{H}(\tau^{(k)} - \tau_c^{(k)}), \\ \tau^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} : \mathbf{\kappa}, \\ \dot{\tau}_c^{(k)} = \sum_{l=1}^K h^{(kl)} \dot{\gamma}^{(l)}, \\ h^{(kl)} = [q_{\text{lat}} + (1 - q_{\text{lat}}) \delta^{(kl)}] h^{(l)}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{ОЦК, ГПУ: } h^{(l)} = h_0^{(l)} \left( \frac{h_0^{(l)} \dot{\gamma}^{(l)}}{\tau_{\text{sc}0}^{(l)} n} + 1 \right)^{n-1}, \\ \text{ГЦК: } h^{(l)} = h_0 \left| 1 - \tau_c^{(l)} / \tau_{\text{sat}} \right|^a, \end{array} \right. \\ \mathbf{l}^e = \mathbf{1} - \mathbf{z}^{\text{in}}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Здесь:  $\mathbf{K}(\mathbf{k})$  — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа макроуровня (мезоуровня);  $\mathbf{K}^{\text{cor}} = \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Omega}$  ( $\mathbf{k}^{\text{cor}} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{\omega} - \mathbf{\omega} \cdot \mathbf{k}$ ) — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная) тензора напряжений Кирхгоффа макроуровня (мезоуровня);  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{\omega})$  — тензор спина жесткой подвижной системы координат (ПСК) макроуровня (мезоуровня);  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{n})$  — тензор упругих свойств;  $\mathbf{Z}^{\text{in}}(\mathbf{z}^{\text{in}})$  — неупругая составляющая индифферентной меры скорости деформации макроуровня (мезоуровня)  $\mathbf{Z} = \hat{\nabla} \mathbf{V}^T - \mathbf{\Omega}$  ( $\mathbf{z} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \mathbf{\omega}$ );  $\mathbf{l} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T$  — транспонированный градиент скорости перемещений (в силу гипотезы Фойгта  $\mathbf{l} = \mathbf{L} = \hat{\nabla} \mathbf{V}^T$ ,  $\mathbf{L}$  — транспонированный градиент скорости перемещений макроуровня);  $\dot{\gamma}^{(k)}$  — скорость сдвига на  $k$ -й системе скольжения;  $\dot{\gamma}_0$  — скорость сдвига по системе скольжения при достижении касательным напряжением критического напряжения сдвига;  $\tau^{(k)}$  и  $\tau_c^{(k)}$  — действующее и критическое напряжения на  $k$ -й СС;  $\tau_{c0}^{(l)}$  — начальное критическое напряжение на  $l$ -й СС;  $\tau_{\text{sat}}$  — напряжение насыщения;  $m$  — показатель скоростной чувствительности материала;  $H(\cdot)$  — функция Хэвисайда;  $\mathbf{b}^{(k)}$ ,  $\mathbf{n}^{(k)}$  — единичные векторы направления скольжения и нормали плоскости скольжения  $k$ -й СС (в актуальной конфигурации);  $\mathbf{r}$  — тензор ориентации подвижной системы координат мезоуровня;  $\langle \cdot \rangle$  — оператор осреднения по представительному макрообъему,  $\mathbf{a}'$  — обозначение отклонения тензорной характеристики  $\mathbf{a}$  в кристаллите от среднего по представительному макрообъему значения.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий реализовать сформулированную двухуровневую модель для описания деформирования ПО макроуровня (макрообразца) упругопластического тела (Рис. 1). Нагружение осуществляется кинематически, задана непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция  $\mathbf{F}(t)$ . Вследствие существенной нелинейности задачи исследования процесса деформирования для решения используется пошаговая процедура по времени, в соответствии с которой весь временной интервал нагружения представляется совокупностью малых шагов. Основная цель расчетов заключается в нахождении по предписанному закону деформирования  $\mathbf{F}(t)$  на каждом шаге по времени компонент тензоров напряжений на макро-  $\mathbf{K}(t)$  и мезоуровне  $\mathbf{k}(t)$ , а также остаточных напряжений в кристаллитах.

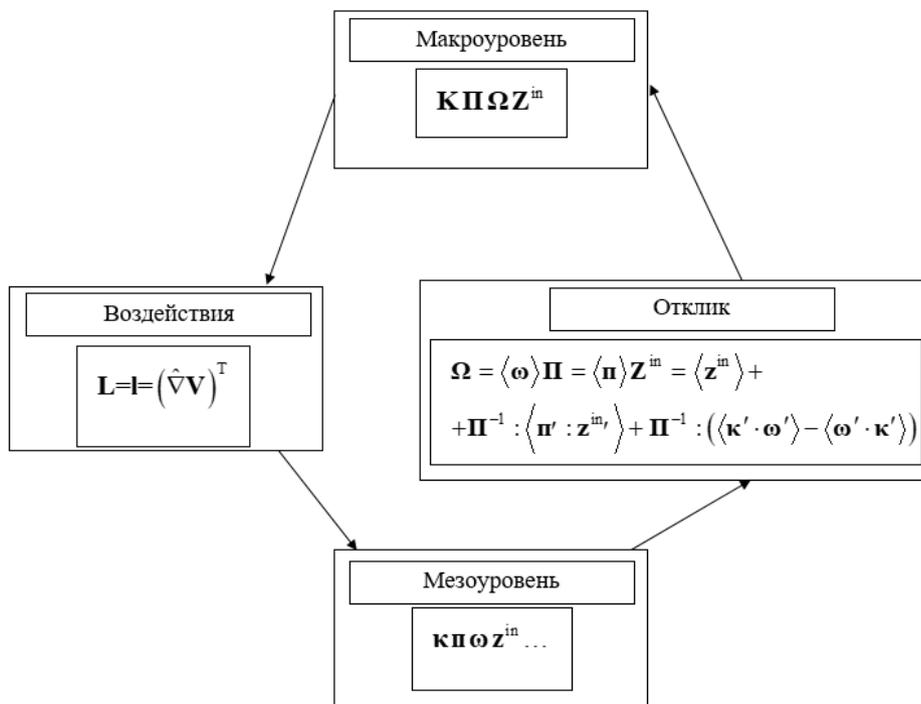


Рис. 1. Схема алгоритма двухуровневой упруговязкопластической модели процесса деформирования: стрелки указывают направления передачи параметров между вычислительными процедурами разных уровней

- В отсчетной конфигурации задаются параметры следующих двух групп:
- параметры модели (количество кристаллитов в представительном макрообъеме, закон распределения ориентации кристаллитов, закон изменения транспонированного градиента места);
  - параметры материала (количество систем скольжения в кристаллите, начальные критические напряжения, закон упрочнения, векторы Бюргерса и нормали к плоскости скольжения, компоненты

тензора упругих постоянных в отсчетной конфигурации, совпадающей с кристаллографической системой координат) (в базисе ПСК) или эквивалентные изотропные упругие модули).

Принимается, что в отсчетной конфигурации материал находится в естественном состоянии, решетки кристаллитов ориентированы в соответствии с предписанным законом распределения:

$$\mathbf{\kappa}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_c^{(k)}|_{t=0} = \boldsymbol{\tau}_{c0}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(k)}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad (k = 1, \dots, K), \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0.$$

На каждом временном шаге (на его начало) все необходимые для вычислений параметры (действующие и критические напряжения, накопленные сдвиги, ориентации решеток и другое) полагаются известными с предшествующего шага. Следует выделить решение на первом шаге, которое должно реализовываться с относительно малым шагом по времени. Данное обстоятельство связано с тем, что в начальной конфигурации материал находится в естественном состоянии; тензоры напряжений для каждого кристаллита в силу этого равны нулевому тензору, следовательно, релаксация напряжений за счет неупругих деформаций невозможна. В этом случае слишком большой временной шаг может привести к очень высоким напряжениям, и как следствие, к возникновению осцилляции решения. Последующие шаги нагружения реализуются в упругопластической области, где имеет место релаксация напряжений за счет пластических деформаций.

Пошаговый алгоритм, описывающий нагружение представительного макрообъема, включает последовательное выполнение пунктов:

*I этап:* мезоуровень (для каждого кристаллита):

- а вычисление в скоростях:
  - i. в базисе ПСК определяются компоненты тензора градиента скорости перемещений  $\mathbf{I}$ ;
  - ii. устанавливается пластическая составляющая меры скорости деформаций:
    1. на каждой системе скольжения отыскиваются касательные напряжения;
    2. рассчитываются скорости сдвигов на каждой системе скольжения;
  - iii. оценивается скорость изменения критических касательных напряжений;
  - iv. вычисляется тензор спина и пластическая составляющая тензора скорости деформации;
  - v. находится производная тензора напряжений с использованием закона Гука в скоростной релаксационной форме;
- б интегрирование (определение искоемых переменных, отвечающих завершившемуся текущему шагу):
  - i. расчет накопленного сдвига по каждой системе скольжения;
  - ii. вычисление критических напряжений;
  - iii. определение приращений поворота ПСК за шаг;
  - iv. нахождение тензора напряжений мезоуровня;

*II этап:* макроуровень:

- а рассчитываются компоненты тензоров спина, упругих свойств и пластической составляющей меры деформаций в базисе лабораторной системы координат (ЛСК) для каждого кристаллита и выполняется их осреднение; отыскиваются тензоры спина, тензоры упругих характеристик макроуровня;
- б вычисляется производная тензора напряжений макроуровня с помощью закона Гука в скоростной релаксационной форме;
- в устанавливается тензор напряжений макроуровня.

Для проверки адекватности как разработанного алгоритма, так и программы его реализации рассмотрено деформирование простым сдвигом титанового образца. Для поиска необходимых в вычислительных экспериментах данных проведен краткий обзор современных натуральных исследований по деформированию монокристаллов титана. В ряде публикаций для различных нагружений ГПУ-кристаллитов титана приводятся данные, которые приемлемы для идентификации многоуровневых моделей. Так, в статье [21] рассматривается квазистатическое нагружение образца из альфа- и бета-титана (прослойка  $\beta$ -фазы находится в середине образца); динамическое сжатие монокристаллов титана обсуждается в [22]; в работах [21, 23, 24] исследуется сжатие монокристалла титана в конструкции, состоящей из образцов титановой базы, подложки и нагрузочной машины; по отдельности характеристики образцов не приводятся.

Корректность полученных с помощью предлагаемого алгоритма численных результатов проверялась путем сравнения с расчетными данными из [25] для случая простого сдвига (Рис. 2). Независимые компоненты тензора упругих свойств (постоянные в базисе ПСК), через которые выражаются остальные нетривиальные компоненты, равнялись:

$$p_{11} = 162,4 \text{ ГПа}, \quad p_{33} = 180,7 \text{ ГПа}, \quad p_{12} = 92 \text{ ГПа}, \quad p_{13} = 69 \text{ ГПа}, \quad p_{55} = 46,7 \text{ ГПа},$$

где для обозначения использована матричная форма записи симметричного тензора 4-го ранга (далее нотация Фойгта). В расчетах начальные критические напряжения для разных типов скольжения взяты из [26]:

для базисного — 150 МПа, для призматического — 30 МПа, для пирамидального  $\langle c+a \rangle$  — 120 МПа. Остальные параметры имели следующие значения [26]:  $\dot{\gamma}_0 = 0,0001 \text{ с}^{-1}$ ;  $\dot{\gamma}_{0nv} = 0,001 \text{ с}^{-1}$  — скорость двойникового сдвига при касательном напряжении, равном критическому;  $m = 50$ . Кинематическое нагружение задавалось градиентом деформации:  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}(t) = \mathbf{E} - \gamma \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3 = \mathbf{E} - \dot{\epsilon} t \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$ , где  $\dot{\epsilon} = 0,0017 \text{ с}^{-1}$ ,  $\mathbf{p}_i$  — базис фиксированной лабораторной системы координат [25]. Пошаговая процедура реализации алгоритма осуществлена с шагом по времени  $\Delta t = 0,0001 \text{ с}$ , соответствующим приращению деформаций  $\Delta \epsilon = 0,0001$ . Величина шага в данном примере и рассмотренных далее определялась из предварительно проведенных численных экспериментов и выбиралась по условию малого отличия результатов расчетов на двух соседних временных шагах. Следует отметить, что в силу мелких шагов интегрирования здесь и далее построенные по точкам графики представлены непрерывными линиями. В данном эксперименте образцом выступал монокристалл с ориентацией ПСК, совпадающей с ЛСК; результаты расчетов приведены на рисунке 2.

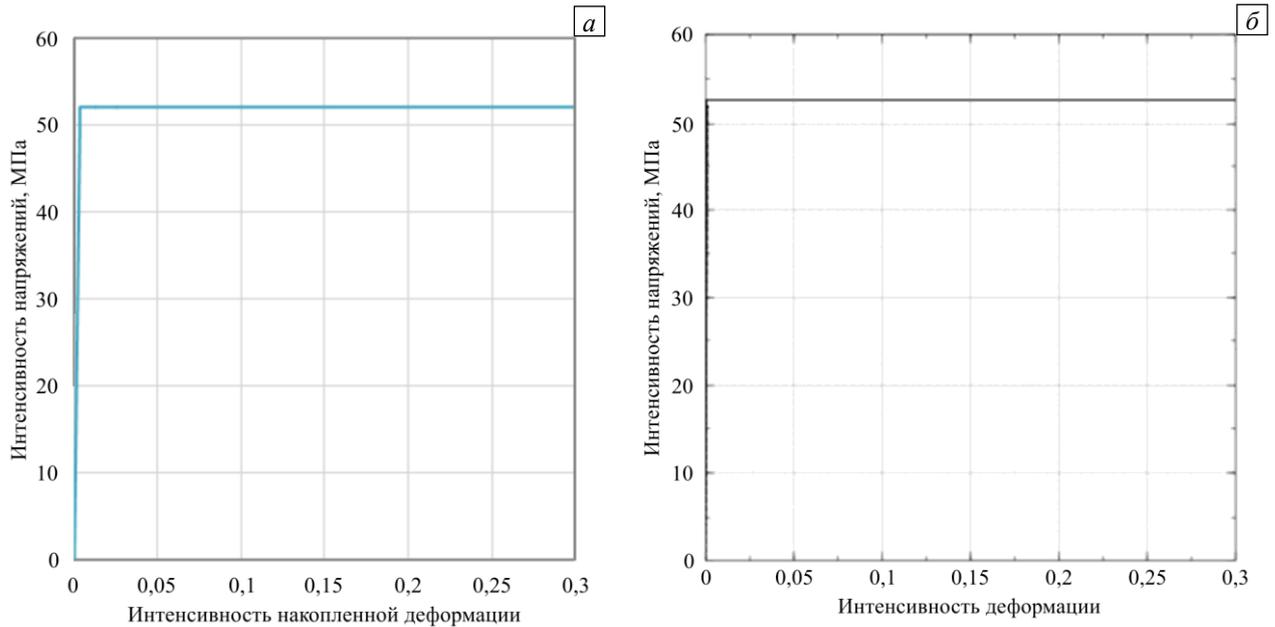


Рис. 2. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности накопленной деформации для кристаллита с анизотропными свойствами: расчет с использованием модели (1), (2) (а); результаты из работы [25] (б)

### 3. Исходные данные для вычислительных экспериментов

Упругие свойства материалов определяются тензором упругих характеристик четвертого ранга. Переход от тензорной к матричной форме записи осуществляется с использованием нотации Фойгта; соответствие первой и второй пар индексов компонент тензора 4-го ранга и компонент матрицы упругих характеристик (размерностью  $9 \times 9$ ) демонстрируют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 11 \rightarrow 1; & \quad 22 \rightarrow 2; & \quad 33 \rightarrow 3; \\ 23 \rightarrow 4; & \quad 31 \rightarrow 5; & \quad 12 \rightarrow 6; \\ 32 \rightarrow 7; & \quad 13 \rightarrow 8; & \quad 21 \rightarrow 9. \end{aligned}$$

Независимые ненулевые компоненты тензора упругих свойств (в нотации Фойгта) в базисе ПСК для монокристаллов (элементов мезоуровня) альфа-железа (ОЦК решетка) [27], меди (ГЦК решетка) [16, 28], титана (ГПУ решетка) [26] равны:

$$\begin{aligned} \text{ОЦК:} \quad & \pi_{11} = 200 \text{ ГПа}, \quad \pi_{12} = 137 \text{ ГПа}, \quad \pi_{66} = 116 \text{ ГПа}; \\ \text{ГЦК:} \quad & \pi_{11} = 168,4 \text{ ГПа}, \quad \pi_{12} = 121,4 \text{ ГПа}, \quad \pi_{44} = 75,4 \text{ ГПа}; \\ \text{ГПУ:} \quad & \pi_{11} = 162,4 \text{ ГПа}, \quad \pi_{33} = 180,7 \text{ ГПа}, \quad \pi_{12} = 92 \text{ ГПа}, \quad \pi_{13} = 69 \text{ ГПа}, \quad \pi_{55} = 46,7 \text{ ГПа}. \end{aligned}$$

С использованием компонент тензора упругих свойств кристаллитов, а также в предположении равномерного закона распределения ориентаций кристаллитов с помощью осреднений по Фойгту, Рейссу и Хиллу [28–33] определяются упругие модули изотропных континуумов. Результаты расчетов сведены в таблицу 1. Уместно напомнить, что описание неупругих деформаций на мезоуровне базируется

Таблица 1. Параметры модели и вычисленные значения модулей упругости изотропных материалов

Материал, решетка, параметры	Метод осреднения	$K$ , ГПа	$\mu$ , ГПа	$\lambda$ , ГПа
Альфа-железо, ОЦК $\dot{\gamma}_0 = 10^{-5} \text{ c}^{-1}$ ; $m=83,3$ ; $q=1,3$ ; $n=0,58$ ; $\tau_{c0}^{(k)}\{110\} = 24 \text{ МПа}$ , $\tau_{c0}^{(k)}\{112\} = 112,8 \text{ МПа}$ , $\tau_{c0}^{(k)}\{123\} = 59,2 \text{ МПа}$	Фойгта	308,07	78,76	255,56
	Рейсса	308,07	41,88	280,15
	Хилла	308,07	60,32	267,85
Медь, ГЦК $\dot{\gamma}_0 = 10^{-9} \text{ c}^{-1}$ ; $m=89,3$ ; $q=1$ (компланарные СС), $q=1,4$ (некомпланарные СС); $a=2,25$ , $\tau_{sat} = 148 \text{ МПа}$ , $\tau_{c0}^{(k)}\{112\} = 15 \text{ МПа}$	Фойгта	137,07	54,64	100,64
	Рейсса	137,07	33,33	114,85
	Хилла	137,07	43,98	107,74
Титан, ГПУ, $\dot{\gamma}_0 = 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ ; $m=50$ ; $q=1,4$ ; $n=0,53$ ; $\tau_{c0}^{(k)}\{0001\} = 150 \text{ МПа}$ , $\tau_{c0}^{(k)}\{10\bar{1}0\} = 30 \text{ МПа}$ , $\tau_{c0}^{(k)}\{10\bar{1}1\} = 120 \text{ МПа}$	Фойгта	107,06	44,00	78,02
	Рейсса	123,54	38,23	98,31
	Хилла	115,3	41,11	88,16

на рассмотрении кристаллического строения элементов этого уровня, в связи с чем термины «кристаллит», «ориентация элемента мезоуровня» даже при условии изотропных упругих свойств имеют смысл.

Определенный из численных экспериментов шаг интегрирования не превышает во всех расчетах значения  $\Delta t = 0,0001 \text{ с}$ , что соответствует шагу приращения интенсивности деформаций  $\Delta \varepsilon = 0,0001$ .

Мезо- и микроструктура материала существенным образом эволюционирует в процессе деформирования вследствие прикладываемых на макроуровне воздействий, задаваемых или усилиями (напряжениями), или кинематически. Таким образом, управление мезо- и микроструктурой дает возможность изменять свойства материалов на макроуровне, которыми и определяются рабочие характеристики готовых объектов [34, 35].

При моделировании простого сдвига транспонированный градиент места задается в виде:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \mathbf{I}_3 + \lambda \Lambda \mathbf{I}_2, \quad (3)$$

где  $\lambda$  — параметр, характеризующий скорость деформирования,  $t$  — время,  $\mathbf{I}_i$ , ( $i \in \overline{1,3}$ ) — базисные векторы неподвижной лабораторной системы координат, предназначенные для указания характерных осей нагружения.

В случае сложного нагружения (при совокупности двух простых нагружений, а именно простого сдвига и растяжения) транспонированный градиент места описывается соотношением:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{I} + \dot{\gamma}_{12} t \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2, & t \in [0, 1000] \text{ с}, \\ \mathbf{I} + \langle t - 1000 \rangle \left( e^{0,5\lambda t} (\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2) + e^{-\lambda t} \mathbf{I}_3 \mathbf{I}_3 \right), & t \in (1000, 2000] \text{ с}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\langle x \rangle = x H(x)$  — скобки Маколея,  $H(\cdot)$  — функция Хэвисайда,  $\lambda = 0,001 \text{ c}^{-1}$ ,  $\dot{\gamma}_{12} = 0,005$ .

При моделировании циклического нагружения деформирование задается транспонированным градиентом места вида:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 \mathbf{I}_3 + 3\dot{\varepsilon} t \left( 7 \cos\left(\frac{7t}{T}\right) - \sin\left(\frac{7t}{T}\right) \right) \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_2 + 5\dot{\varepsilon} t \left( \cos\left(\frac{7t}{T}\right) + 4 \sin\left(\frac{7t}{T}\right) \right) \mathbf{I}_1 \mathbf{I}_3, \quad (5)$$

где  $\dot{\varepsilon} = 10^{-4}$  — постоянный параметр;  $T = 1000 \text{ с}$  — время окончания деформирования. В качестве вариантов задания распределения ориентаций для кристаллитов в отсчетной конфигурации используется или равномерный закон, или распределение ориентаций, получаемое после прокатки (для поликристаллов с ГПУ решеткой использованы данные, приведенные в [36] (Рис. 3), с ОЦК и ГЦК решетками — в [37]).

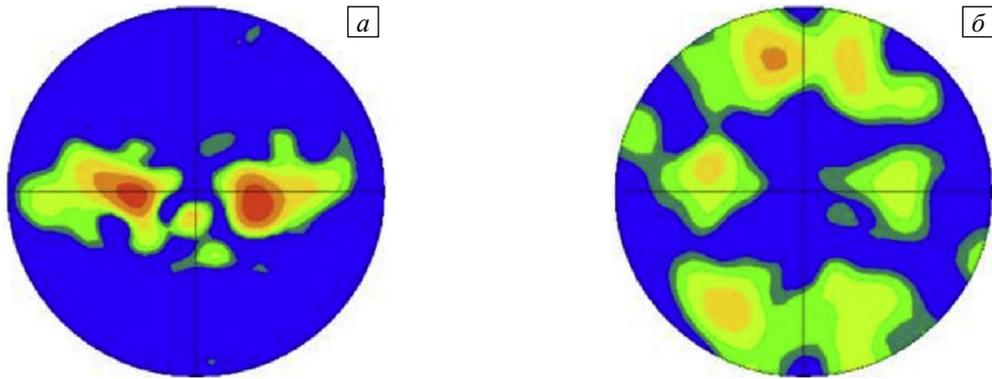


Рис. 3. Полусные фигуры для поликристаллического титанового образца после прокатки [36] для распределения ориентаций кристаллографических плоскостей  $\{0001\}$  (а) и  $\{10\bar{1}0\}$  (б)

#### 4. Об остаточных напряжениях

Остаточными напряжениями называют напряжения, существующие в исследуемых телах при отсутствии внешних нагрузок [38]. Они возникают практически при любых способах технологической обработки металлов (при литье, ковке, термической и механической обработке) [39], по интенсивности могут приближаться к пределу текучести. Во многих случаях разрушение конструкций из высокопрочных металлов вызывается совокупностью факторов, таких как остаточные напряжения от изготовления, эксплуатационные напряжения (в рабочих лопатках турбин, компрессоров, в коленчатых валах, плунжерах и прочем) [40]. Для уменьшения остаточных напряжений применяется специальная термическая обработка, проведение которой, однако, не всегда возможно (например, при крупных габаритах изделий). Следует отметить, что остаточные напряжения не в любом случае служат причиной ухудшения рабочих характеристик деталей; некоторые технологические процессы предусматривают создание остаточных напряжений (обдувка дробью, обкатка валиками и другие) [38, 40]. По этим причинам разработка таких технологий, которые позволяют создавать остаточные напряжения, улучшающие эксплуатационные характеристики изделий из металлов, является важной задачей. Следует отметить, что теоретически остаточные напряжения можно «наводить» так, чтобы лучшие характеристики обеспечивать в заданных направлениях изделий (например, начальные напряжения течения большие в направлении растяжения, чем в направлении сжатия, или наоборот). Таким образом, можно обрабатывать заготовки так, чтобы уровень и/или распределение остаточных напряжений в готовых изделиях стали оптимальными (для конкретных условий их эксплуатации).

Основным свойством остаточных напряжений является их самоуравновешенность. По структурно-масштабным уровням, на которых это свойство выполняется, остаточные напряжения принято разделять на напряжения I, II и III рода [41, 42]. Остаточные напряжения I рода [41, 39] (макроскопические) возникают при механической, термической обработке (в частности, при фазовых превращениях металла). Они уравновешены в объеме всей детали, но не равны нулевым в ее отдельных частях; остаточные напряжения обусловлены несовместностью упругих деформаций, вызванной неоднородностью силовых и температурных полей при изготовлении детали, и определяются или по величине упругих деформаций, появляющихся при разрезке деталей, или по рентгенограмме. Остаточные напряжения II рода возникают в результате неоднородности пластических деформаций на уровне зерен поликристалла, уравновешены на масштабе одного кристаллита (зерна). Остаточные напряжения III рода характерны для уровня субструктур (барьеров, микроповреждений, сложных дислокационных структур), уравновешены на масштабах нескольких кристаллических ячеек [42, 39].

В настоящей работе вводится понятие остаточных мезонапряжений (ОМН), самоуравновешенных на уровне представительного макрообъема; эти напряжения не входят в общепринятую классификацию. Для установления ОМН в численных экспериментах необходимо после стадии активного упруговязкопластического нагружения произвести разгрузку представительного макрообъема. При этом следует иметь в виду, что в используемую двухуровневую модель заложена гипотеза Фойгта, в силу чего модель ориентирована на кинематическое задание условий нагружения. В связи с этим необходимо применение итерационной процедуры, которая при кинематическом нагружении (реализуемом в приращениях деформаций) обеспечит в конце этапа разгрузки выполнение с требуемой точностью условия:  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$  (то есть осредненный по представительному макрообъему взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа должен быть равен нулевому тензору).

Опишем процедуру разгрузки представительного макрообъема. Допустим, что при произвольном предшествующем этапе нагружения достигнуты макронапряжения  $\mathbf{K}$  в представительном макрообъеме.

Тогда для реализации пошаговой процедуры разгрузки на каждом шаге запишем транспонированный градиент скорости перемещений из следующего условия:

$$\hat{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T = -\chi \frac{\mathbf{K}}{\|\mathbf{K}\|}, \quad \|\mathbf{K}\| = (\mathbf{K} : \mathbf{K})^{1/2}, \quad (6)$$

где  $\chi$  ( $\text{с}^{-1}$ ) — параметр, связанный с величиной временного шага, устанавливаемого в численных экспериментах. При этом в силу известной проблемы неоднозначного определения разгруженной конфигурации, которая может быть установлена только с точностью до поворота исследуемого объема как жесткого целого, принимается, что главные оси тензора  $\mathbf{K}$  (или тензора упругих макродеформаций) при разгрузке остаются неизменными. Следует отметить, что, несмотря на то, что разгрузка является упругой для представительного макрообъема в целом, его отдельные кристаллиты могут испытывать необратимые деформации. Это и обуславливает необходимость использования пошаговой процедуры. Процесс разгрузки считается завершенным при выполнении условия  $\|\mathbf{K}\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малое положительное число.

## 5. Результаты вычислительных экспериментов

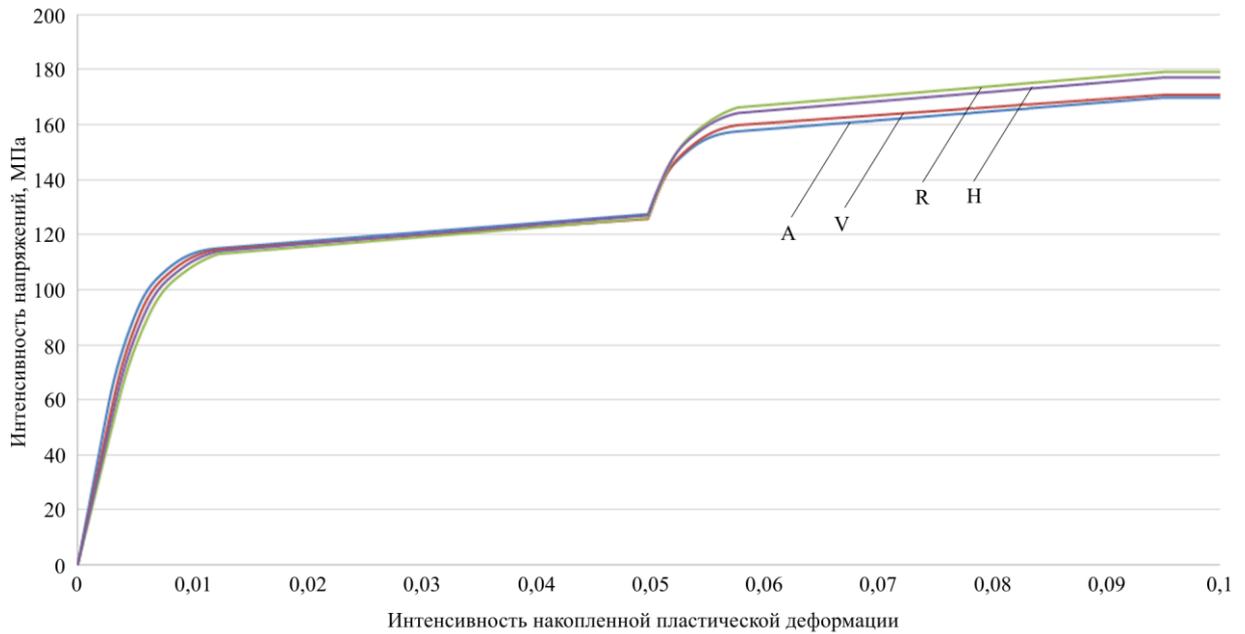
Целью численных экспериментов является анализ различий макро- и мезопараметров при замене анизотропных свойств на эквивалентные изотропные в опытах на простой сдвиг, сложное нагружение и циклическое деформирование для материалов с ОЦК, ГЦК, ГПУ решетками и разными законами распределения ориентаций кристаллитов.

Авторами проведены две серии экспериментов. В первой серии распределение ориентаций кристаллитов в каждом образце принимается подчиняющимся равномерному закону. Образец представляет совокупность кристаллитов с анизотропными либо с эквивалентными изотропными свойствами для каждого типа решетки. Каждый из образцов подвергается трем видам нагружения, которые описываются соотношениями (3)–(5). Вторая серия отличается от первой использованием неоднородных функций распределения ориентаций, соответствующих текстурам прокатки (для ГПУ функция распределения ориентаций взята из книги [36], для ОЦК и ГЦК — из статьи [37]).

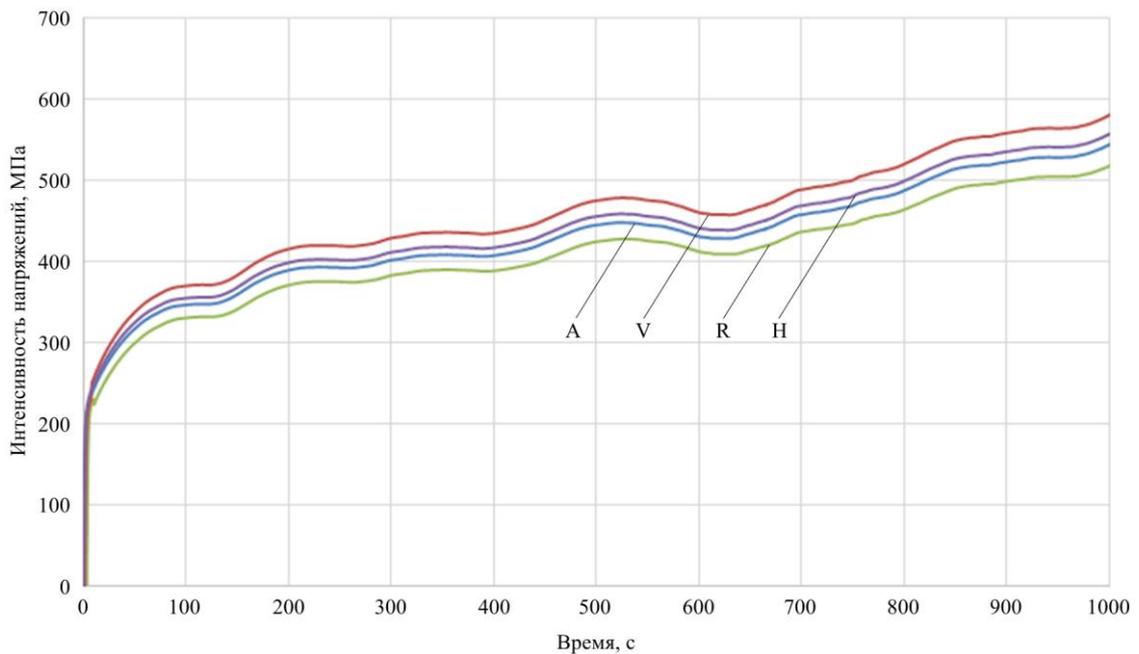
В первой серии экспериментов (при равномерном законе ориентаций кристаллитов в отсчетной конфигурации) определялись параметры НДС на макро- и мезоуровнях по модели материала с анизотропными упругими свойствами для ОЦК, ГЦК, ГПУ решеток и для идентичных по расположению, размерам и ориентациям решеток кристаллитов образцов с эквивалентными изотропными упругими свойствами [28–30]. Образцы каждой из представленных групп (с анизотропными свойствами кристаллитов и три макрообразца с изотропными свойствами кристаллитов) нагружались по программам, описываемым соотношениями (3)–(5). После достижения интенсивностью накопленной деформации 50%-ной величины начинался процесс разгрузки испытуемого образца до нулевых значений интенсивности напряжений макроуровня. Исходные данные и программы нагружения во второй серии экспериментов были аналогичными первой серии, за исключением неравномерных распределений ориентаций, заданных соответствующими законами.

При простом сдвиге кривые НДС для образца с анизотропными упругими свойствами оказались близкими к результатам с эффективными изотропными (принятыми совпадающими с осредненными упругими характеристиками поликристаллического образца при равномерном законе распределения ориентаций кристаллитов) как для ОЦК, так и для ГЦК решетки; при этом наблюдался участок с отклонениями кривых друг от друга (участок, отвечающий переходу образца из упругого состояния в упругопластическое). По результатам вычислительного эксперимента на сложное монотонное нагружение, реализуемое по закону (4), для всех типов решеток расчетные кривые НДС практически совпадают (Рис. 4), имеются лишь незначительные отклонения в области упругопластичности после резкой смены вида нагружения, осуществленного при достижении интенсивностью накопленных деформаций значения 5%. Наименьшее отличие результатов (от данных для образца с анизотропными свойствами) на мезоуровне наблюдается у образца из эквивалентного изотропного материала с упругими характеристиками, полученными с использованием осреднения по Фойгту.

При циклическом нагружении, задаваемом соотношением (5), поликристаллический образец с равномерным законом распределения ориентаций кристаллитов имеет наиболее значимые отклонения кривых НДС при ГПУ решетке (Рис. 5). Образцы с ОЦК и ГЦК решетками характеризуются практически полным совпадением зависимостей интенсивности напряжений от интенсивности накопленных деформаций. Следует отметить, что, несмотря на периодичность предписанного изменения деформированного состояния, зависимость интенсивности напряжений таким поведением не обладает, что является следствием накапливаемых мезоструктурными параметрами изменений (изменений ориентации решеток кристаллитов, сдвигов и упрочнения по системам скольжения), сказывающихся на отклике.



**Рис. 4.** Зависимости интенсивности напряжений от интенсивности накопленной деформации в поликристаллических образцах с ГЦК решеткой при сложном нагружении и равномерном распределении ориентаций кристаллитов для материалов с разными свойствами и при различных методах осреднения: материал анизотропный на мезоуровне (кривая А); изотропный, осреднение по Фойгту (V); изотропный, осреднение по Рейссу (R); изотропный, осреднение по Хиллу (H)



**Рис. 5.** Зависимости интенсивности напряжений от времени у материалов с ГПУ при циклическом деформировании и равномерном распределении ориентаций кристаллитов (обозначения аналогичны используемым на рис. 4)

На прочностные характеристики, наряду с остаточными напряжениями, существенное влияние оказывает вид напряженного состояния. В качестве характеристики вида в большинстве работ, посвященных исследованию прочности, используется параметр жесткости нагружения (коэффициент трехосности), равный отношению среднего напряжения к интенсивности напряжений:

$$\Theta = \frac{\kappa_{cp}}{\kappa_u}, \quad \kappa_{cp} = \frac{I_1(\boldsymbol{\kappa})}{3}, \quad \kappa_u = \left( \frac{3}{2} \boldsymbol{\kappa}' : \boldsymbol{\kappa}' \right)^{1/2}, \quad (7)$$

где  $I_1(\cdot)$  — первый инвариант тензора 2-го ранга;  $\mathbf{k}'$  — девиатор напряжений Кирхгоффа  $\mathbf{k}$ . В зависимости от того, являются ли средние напряжения растягивающими или сжимающими, материалы разрушаются по-разному. Как показывают опыты, все материалы без исключения способны воспринимать весьма большие напряжения в условиях всестороннего сжатия, в то время как при всестороннем растяжении разрушение наступает при сравнительно низких напряжениях. Более подробно ознакомиться с критериями разрушения можно в многочисленных монографиях (см., например, [43–45]) и в обзоре [46].

Напомним, что в предлагаемой работе рассматривается модель материала, с той или иной степенью точности описывающая свойства, присущие реальным телам. Исследования направлены на сравнение параметров образцов с анизотропными упругими свойствами материала на мезоуровне и образцов, у которых упругие свойства на мезоуровне изотропны и найдены путем осреднения одним из методов (по Фойгту (V), Рейссу (R), Хиллу (H)). Для всех кристаллитов в представительном макрообъеме произведено: определение разностей компонент тензоров остаточных напряжений анизотропного и соответствующего изотропного кристаллитов  $(\Delta\mathbf{k}_{Nm})_{ij}$ , где  $N = V, R, H$ ; значений параметров трехосности; интенсивности разностей напряжений  $\Delta k_{Nm}$ , где  $m = \overline{1, M}$ , при этом  $M$  — число элементов мезоуровня, составляющих представительный макрообъем. Для сравнения результатов использованы интенсивности разностей тензоров остаточных мезонапряжений  $\Delta\mathbf{k}_{Nm} = \left( \frac{3}{2} (\mathbf{k}_m^{\prime A} - \mathbf{k}_m^{\prime N}) : (\mathbf{k}_m^{\prime A} - \mathbf{k}_m^{\prime N}) \right)^{1/2}$ , где  $\mathbf{k}_m^{\prime A}$ ,  $\mathbf{k}_m^{\prime N}$  — девиаторы остаточных мезонапряжений в  $m$ -м кристаллите, рассчитанные для анизотропного (A) и изотропных упругих материалов с соответствующим осреднением  $N = V, R, H$ . Найдены такие пары кристаллитов у разных (с точки зрения упругих свойств) материалов, однако идентичных по всем остальным параметрам (иначе говоря, это один и тот же кристаллит в исходном виртуальном материале, отличающийся от двух других только упругими — изотропными или анизотропными — свойствами), при которых интенсивность разностей девиаторов напряжений Кирхгоффа в образце максимальна по норме:  $\|\Delta\mathbf{k}_N\| = \max_{m=1, M} \Delta k_{Nm}$ .

Результаты расчетов для случая циклического нагружения поликристаллических образцов с равномерным распределением ориентаций кристаллитов сведены в таблицу 2 для пар кристаллитов, определенных по введенной выше норме. Следует отметить весьма значительные различия как по интенсивности разностей остаточных мезонапряжений, так и по разностям их компонент; при этом интенсивность разности остаточных мезонапряжений может даже превосходить предел текучести (в отсчетной конфигурации).

Таблица 2. Характеристики остаточных мезонапряжений в поликристаллических образцах из анизотропных и изотропных упругих материалов с равномерным законом распределения ориентаций кристаллитов в отсчетной конфигурации при циклическом деформировании

Сравниваемые материалы									
Решетка	А и V			А и R			А и H		
	$\ \Delta\mathbf{k}_V\ $ , МПа	$\frac{\Theta_V}{\Theta_A}$	$(\Delta\mathbf{k}_V)_{ij}$ , МПа	$\ \Delta\mathbf{k}_R\ $ , МПа	$\frac{\Theta_R}{\Theta_A}$	$(\Delta\mathbf{k}_R)_{ij}$ , МПа	$\ \Delta\mathbf{k}_H\ $ , МПа	$\frac{\Theta_H}{\Theta_A}$	$(\Delta\mathbf{k}_H)_{ij}$ , МПа
О Ц К	89,14	$\frac{0,61}{0,52}$	$\begin{pmatrix} 24,74 & 17,42 & -19,57 \\ 17,42 & 39,08 & 25,93 \\ -19,57 & 25,93 & 21,01 \end{pmatrix}$	98,57	$\frac{0,58}{0,52}$	$\begin{pmatrix} 12,39 & 16,25 & -21,62 \\ 16,25 & 46,54 & 24,5 \\ -21,62 & 24,5 & 38,67 \end{pmatrix}$	104,98	$\frac{0,46}{0,52}$	$\begin{pmatrix} 28,13 & 19,9 & -34,4 \\ 19,9 & 37,17 & 18,4 \\ -34,1 & 18,4 & -36,87 \end{pmatrix}$
Г Ц К	67,42	$\frac{0,72}{0,64}$	$\begin{pmatrix} 14,18 & 12,94 & -26,1 \\ 12,94 & 24,08 & 13,7 \\ -26,1 & 13,7 & 13,3 \end{pmatrix}$	78,57	$\frac{0,58}{0,64}$	$\begin{pmatrix} 24,91 & 13,4 & -15,6 \\ 13,4 & 38,21 & 16,14 \\ -15,6 & 16,14 & 25,85 \end{pmatrix}$	74,93	$\frac{0,70}{0,64}$	$\begin{pmatrix} 6,28 & 14,9 & -18,1 \\ 14,9 & 23,57 & 21,08 \\ -18,1 & 21,08 & 34,07 \end{pmatrix}$
Г П У	114,18	$\frac{0,68}{0,55}$	$\begin{pmatrix} 15,47 & -31,27 & 16,62 \\ -31,27 & 44,23 & 15,12 \\ 16,62 & 15,12 & -59,42 \end{pmatrix}$	120,23	$\frac{0,49}{0,55}$	$\begin{pmatrix} 4,99 & -50,63 & -35,13 \\ -50,63 & 24,79 & 16,32 \\ -35,13 & 16,32 & -29,5 \end{pmatrix}$	166,88	$\frac{0,61}{0,55}$	$\begin{pmatrix} 9,31 & -40,62 & -3,18 \\ -40,62 & 81,69 & 11,3 \\ -3,18 & 11,3 & -90,73 \end{pmatrix}$

Рассмотрение поведения образцов при нагружениях, задаваемых законами (3)–(5), и указанных выше неоднородных распределениях начальных ориентаций, соответствующих текстурам прокатки, показало, что для поликристаллических образцов с ГЦК решеткой характерны незначительные отклонения кривых «интенсивность напряжений–интенсивность накопленных деформаций» при нагружении (4); для ГПУ поликристаллов различия несколько превышают расхождения, приведенные на рисунке 4. Для кривых «интенсивность напряжений–интенсивность накопленных деформаций», полученных с нагружением по закону (5), видимых отличий от результатов, представленных на рисунке 5, не наблюдается. Большой интерес представляют расчетные данные для остаточных напряжений мезоуровня, которые сведены в таблицу 3.

Таблица 3. Характеристики остаточных мезонапряжений в поликристаллических образцах из анизотропных изотропных и упругих материалов с неоднородным распределением ориентаций в отсчетной конфигурации при циклическом деформировании

Сравниваемые материалы									
Решетка	А и V			А и R			А и H		
	$\ \Delta\kappa_V\ $ , МПа	$\frac{\Theta_V}{\Theta_A}$	$(\Delta\kappa_V)_{ij}$ , МПа	$\ \Delta\kappa_R\ $ , МПа	$\frac{\Theta_R}{\Theta_A}$	$(\Delta\kappa_R)_{ij}$ , МПа	$\ \Delta\kappa_H\ $ , МПа	$\frac{\Theta_H}{\Theta_A}$	$(\Delta\kappa_H)_{ij}$ , МПа
О Ц К	94,63	$\frac{0,73}{0,66}$	$\begin{pmatrix} 37,28 & 19,93 & -21,42 \\ 19,93 & 51,37 & 18,27 \\ -21,42 & 18,27 & 33,67 \end{pmatrix}$	78,54	$\frac{0,81}{0,66}$	$\begin{pmatrix} 27,45 & 11,19 & -31,15 \\ 11,19 & 32,40 & 17,79 \\ -31,15 & 17,79 & 32,88 \end{pmatrix}$	124,71	$\frac{0,84}{0,66}$	$\begin{pmatrix} 36,94 & 14,07 & -26,86 \\ 14,07 & 29,42 & 24,63 \\ -26,86 & 24,63 & 29,09 \end{pmatrix}$
Г Ц К	71,12	$\frac{0,67}{0,57}$	$\begin{pmatrix} 23,91 & 18,58 & -29,42 \\ 18,58 & 37,96 & 21,37 \\ -29,42 & 21,37 & 26,28 \end{pmatrix}$	82,08	$\frac{0,69}{0,57}$	$\begin{pmatrix} 17,97 & 24,18 & -29,08 \\ 24,18 & 34,68 & 27,62 \\ -29,08 & 27,62 & 37,13 \end{pmatrix}$	94,47	$\frac{0,63}{0,57}$	$\begin{pmatrix} 19,51 & 31,47 & -10,59 \\ 31,47 & 37,60 & 19,74 \\ -10,59 & 19,74 & 41,03 \end{pmatrix}$
Г П У	127,97	$\frac{0,74}{0,61}$	$\begin{pmatrix} 39,11 & -17,97 & 17,02 \\ -17,97 & 43,15 & 26,12 \\ 17,02 & 26,12 & -18,31 \end{pmatrix}$	115,14	$\frac{0,76}{0,61}$	$\begin{pmatrix} 46,74 & 37,51 & -39,28 \\ 37,51 & 32,92 & 27,83 \\ -39,28 & 27,89 & 43,63 \end{pmatrix}$	144,58	$\frac{0,81}{0,61}$	$\begin{pmatrix} 37,91 & 42,07 & -14,82 \\ 42,07 & 56,29 & 23,35 \\ -14,82 & 23,35 & -61,21 \end{pmatrix}$

## 6. Заключение

Представлены описание и алгоритм реализации двухуровневой упруговязкопластической модели для описания процессов деформирования поликристаллических образцов и результаты вычислительных экспериментов на ее основе. Образцы выполнены из изотропных и анизотропных упругих материалов с разным типом кристаллической решетки при отличающихся законах распределения ориентаций кристаллитов и различных видах нагружения

Полученные результаты позволяют констатировать, что для упругих материалов из поликристаллов с равномерным распределением ориентаций наилучшее согласование числовых данных о НДС макроуровня, рассчитанных при изотропных и анизотропных характеристиках материалов, достигается в поликристаллических образцах с ОЦК и ГПУ решетками при простом сдвиге. При сложном нагружении наибольшие отклонения друг от друга демонстрируют результаты для поликристаллических образцов из материалов с ГЦК решеткой и для соответствующих упруго-изотропных образцов из материалов с упругими характеристиками, установленными по Рейссу и Хиллу, наименьшие отклонения имеют место при использовании осреднения по Фойгту. При моделировании циклического нагружения наилучшее приближение отвечает осреднению упругих характеристик по Хиллу для ГПУ поликристаллов. В то же время различия по остаточным мезонапряжениям могут достигать значительных величин (порядка 50–70% предела текучести). Последние оказывают значительное влияние на напряженное состояние на мезоуровне и прочностные свойства изделий при эксплуатации. Для образцов из поликристаллических материалов с начальной текстурой для аналогичных программ нагружения получены результаты, подобные отмеченным выше.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-19-01292).

## Литература

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
3. Теория пластических деформаций металлов / Под ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. М.: Машиностроение, 1983. 598 с.
4. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. 1990. Т. 21. С. 3-75.
5. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. М.: Логос, 2004. 388 с.
6. Ильюшин А.А. Труды (1946–1966). Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2004. 480 с.
7. Horstemeyer M.F. Multiscale modeling: A review // Practical aspects of computational chemistry / Ed. J. Leszczynski, M.K. Shukla. Springer, 2009. P. 87-135. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-2687-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2687-3_4)
8. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity // Int. J. Plast. 2010. Vol. 26. P. 1280-1309. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008>
9. Roters F. Advanced material models for the crystal plasticity finite element method: Development of a general CPFEM framework. Aachen: RWTH Aachen, 2011. 226 p.
10. Трусов П.В., Швейкин А.И., Нечаева Е.С., Волегов П.С. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры // Физ. мезомех. 2012. Т. 15, № 1. С. 33-56. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2012-00007>

11. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 605 с.
12. *Taylor G.I.* Plastic strain in metals // *J. Inst. Metals.* 1938. Vol. 62. P. 307-324.
13. *Lin T.H.* Analysis of elastic and plastic strains of a face-centered cubic crystal // *J. Mech. Phys. Solid.* 1957. Vol. 5. P. 143-149. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(57\)90058-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90058-3)
14. *Соколов А.С., Трусов П.В.* Двухуровневая упруговязкопластическая модель: приложение к анализу влияния анизотропии упругих свойств кристаллитов на поведение поликристаллов // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2020. Т. 13, № 2. С. 219-230. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.17>
15. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
16. *Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю.* О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // *Физ. мезомех.* 2016. Т. 19, № 2. С. 47-65. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2016-00052>
17. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* О разложении движения и определяющих соотношениях в геометрически нелинейной упруговязкопластичности кристаллитов // *Физ. мезомех.* 2016. Т. 19, № 3. С. 25-38. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2016-00061>
18. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
19. *Kroner E.* Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1959. Vol. 4. P. 273-334. <https://doi.org/10.1007/BF00281393>
20. *Lee E.H.* Elastic-plastic deformation at finite strain // *J. Appl. Mech.* 1969. Vol. 36. P. 1-6. <https://doi.org/10.1115/1.3564580>
21. *Zhang Z., Cuddihy M.A., Dunne F.P.E.* On rate-dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue // *Proc. R. Soc. A.* 2015. Vol. 471. 20150214. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0214>
22. *Feng B., Bronkhorst C.A., Addessio F.L., Morrow B.M., Cerreta E.K., Lookman T., Lebensohn R.A., Low T.* Coupled elasticity, plastic slip, and twinning in single crystal titanium loaded by split-Hopkinson pressure bar // *J. Mech. Phys. Solid.* 2018. Vol. 119. P. 274-297. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.018>
23. *Zhang Z., Jun T.-S., Britton T.B., Dunne F.P.E.* Determination of Ti-6242  $\alpha$  and  $\beta$  slip properties using micro-pillar test and computational crystal plasticity // *J. Mech. Phys. Solid.* 2016. Vol. 95. P. 393-410. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.06.007>
24. *Zhang Z., Jun T.-S., Britton T.B., Dunne F.P.E.* Intrinsic anisotropy of strain rate sensitivity in single crystal alpha titanium // *Acta Mater.* 2016. Vol. 118. P. 317-330. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.07.044>
25. *Мацюк К.В., Трусов П.В.* Модель для описания упруговязкопластического деформирования ГПУ-кристаллов: несимметричные меры напряженно-деформированного состояния, законы упрочнения // *Вестник ПНИПУ. Механика.* 2013. № 4. С. 75-105. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.75-105>
26. *Wu X., Kalidindi S.R., Necker C., Salem A.A.* Modeling anisotropic stress-strain response and crystallographic texture evolution on  $\alpha$ -titanium during large plastic deformation using Taylor-type models: Influence of initial texture and purity // *Metall. Mater. Trans. A.* 2008. Vol. 39. P. 3046-3054. <https://doi.org/10.1007/S11661-008-9651-X>
27. *Кондратьев Н.С., Трусов П.В.* Математическая модель для описания деформирования ОЦК-монокристаллов, учитывающая двойникование // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2011. Т. 4, № 4. С. 20-33. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.36>
28. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных тел. М.: Наука, 1977. 399 с.
29. *Хирт Дж., Лоте И.* Теория дислокаций. М.: Атомиздат, 1972. 600 с.
30. *Ньюхем Р.Э.* Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т комп. исслед., 2007. 652 с.
31. *Man C.-S., Huang M.* A simple explicit formula for the Voigt-Reuss-Hill average of elastic polycrystals with arbitrary crystal and texture symmetries // *J. Elast.* 2011. Vol. 105. P. 29-48. <https://doi.org/10.1007/s10659-011-9312-y>
32. *Кривошеина М.Н., Туч Е.В., Хон Ю.А.* Применение критерия Мизеса-Хилла для моделирования динамического нагружения сильно анизотропных материалов // *Изв. РАН. Серия физическая.* 2012. Т. 76, № 1. С. 91-96. (English version <https://doi.org/10.3103/S1062873812010169>)
33. *Кривошеина М.Н., Кобенко С.В., Туч Е.В.* Усреднения свойств композиционных анизотропных материалов при численном моделировании их разрушения // *Физ. мезомех.* 2010. Т. 13, № 2. С. 55-60.
34. *Рааб Г.И., Алешин Г.Н., Фахрединова Э.И., Рааб А.Г., Асфандияров Р.Н., Аксенов Д.А., Кодиров И.С.* Перспективы развития новых опытно-коммерческих методов интенсивной пластической деформации // *МТД.* 2019. Т. 1, № 1. С. 48-57.
35. *Рааб Г.И., Кодиров И.С., Алешин Г.Н., Рааб А.Г., Ценев Н.К.* Влияние особенностей формирования градиентной структуры при интенсивной пластической деформации сплавов с различными типами кристаллической решетки // *Вестник МГТУ им. Г.И. Носова.* 2019. Т. 17, № 1. С. 64-75. <https://doi.org/10.18503/1995-2732-2019-17-1-64-75>
36. *Nata T., Kobuki A., Takuda H.* Crystal-plasticity finite-element analysis of anisotropic deformation behavior in a commercially pure titanium Grade 1 sheet // *Int. J. Plast.* 2017. Vol. 91. P. 77-108. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.12.005>
37. *Ji Y.T., Suo H.L., Ma L., Wang Z., Yu D., Shaheen K., Cui J., Liu J., Gao M.M.* Formation of recrystallization cube texture in highly rolled Ni-9.3 at % W // *Phys. Metals Metallogr.* 2020. Vol. 121. P. 248-253. <https://doi.org/10.1134/S0031918X20020180>
38. *Биргер И.А.* Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
39. *Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В.* Остаточные напряжения: теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
40. *Биргер И.А., Шор Б.Ф., Иосилевич Г.В.* Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.
41. *Абрамов В.В.* Остаточные напряжения и деформации в металлах. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1963. 356 с.

42. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Машиностроение, 1974. Ч. 1. Деформация и разрушение. 472 с.
43. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
44. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
45. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
46. Besson J. Continuum models of ductile fracture: A Review // Int. J. Damage Mechanics. 2010. Vol. 19. P. 3-52. <https://doi.org/10.1177/1056789509103482>

## References

1. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Bases of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969. 420 p.
2. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1975. 400 p.
3. Unksov E.P., Ovchinnikov A.G. (eds.) *Teoriya plasticheskikh deformatsiy metallov* [Theory of plastic deformations of metals] Moscow, Mashinostroyeniye, 1983. 598 p.
4. Vasin R.A. *Opredelyayushchiye sootnosheniya teorii plastichnosti* [Defining relations of the theory of plasticity]. *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Mekhanika tverdykh deformiruyemykh tel*, 1990, vol. 21, pp. 3-75.
5. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugo-plasticheskiye deformatsii* [Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformations]. Moscow, Logos, 2004. 388 p.
6. Il'yushin A.A. *Trudy (1946–1966). T. 2. Plastichnost'* [Proceedings (1946–1966). Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 480 p.
7. Horstemeyer M.F. Multiscale modeling: A review. *Practical aspects of computational chemistry*, ed. J. Leszczynski, M.K. Shukla. Springer, 2009. Pp. 87-135. [https://doi.org/10.1007/978-90-481-2687-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-90-481-2687-3_4)
8. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity. *Int. J. Plast.*, 2010, vol. 26, pp. 1280-1309. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008>
9. Roters F. *Advanced material models for the crystal plasticity finite element method: Development of a general CPFEM framework*. Aachen, RWTH Aachen, 2011. 226 p.
10. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution. *Phys. mesomech.*, 2012, vol. 15, pp. 155-175. <https://doi.org/10.1134/S1029959912020038>
11. Trusov P.V., Shveykin A.I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskikh materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multilevel models of mono- and polycrystalline materials: theory, algorithms, application examples]. Novosibirsk, Siberian Branch of RAS, 2019. 605 p
12. Taylor G.I. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*, 1938, vol. 62, pp. 307-324.
13. Lin T.H. Analysis of elastic and plastic strains of a face-centered cubic crystal. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1957, vol. 5, pp. 143-149. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(57\)90058-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90058-3)
14. Sokolov A.S., Trusov P.V. Two-level elastic-viscoplastic model: application to the analysis of the crystal anisotropy influence. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2020, vol. 13, no. 2, pp. 219-230. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.17>
15. Pozdeyev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shiye uprugoplasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Lagrange elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications]. Moscow, Nauka, 1986. 232 p.
16. Trusov P.V., Shveykin A.I., Yanz A.Yu. Motion decomposition, frame-indifferent derivatives, and constitutive relations at large displacement gradients from the viewpoint of multilevel modeling. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 357-376. <https://doi.org/10.1134/S1029959917040014>
17. Trusov P.V., Shveykin A.I. On motion decomposition and constitutive relations in geometrically nonlinear elastoviscoplasticity of crystallites. *Phys. Mesomech.*, 2016, vol. 19, pp. 377-391. <https://doi.org/10.1134/S1029959917040026>
18. Lurie A.I. *Nonlinear theory of elasticity*. Elsevier, 1990. 617 p.
19. Kroner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen [Continuum theory of dislocations and residual stresses]. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1959, vol. 4, pp. 273-334. <https://doi.org/10.1007/BF00281393>
20. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strain. *J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1115/1.3564580>
21. Zhang Z., Cuddihy M.A., Dunne F.P.E. On rate-dependent polycrystal deformation: the temperature sensitivity of cold dwell fatigue. *Proc. R. Soc. A*, 2015, vol. 471, 20150214. <https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0214>
22. Feng B., Bronkhorst C.A., Addessio F.L., Morrow B.M., Cerreta E.K., Lookman T., Lebensohn R.A., Low T. Coupled elasticity, plastic slip, and twinning in single crystal titanium loaded by split-Hopkinson pressure bar. *J. Mech. Phys. Solid.*, 2018, vol. 119, pp. 274-297. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2018.06.018>
23. Zhang Z., Jun T.-S., Britton T.B., Dunne F.P.E. Determination of Ti-6242  $\alpha$  and  $\beta$  slip properties using micro-pillar test and computational crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Solid.*, 2016, vol. 95, pp. 393-410. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.06.007>
24. Zhang Z., Jun T.-S., Britton T.B., Dunne F.P.E. Intrinsic anisotropy of strain rate sensitivity in single crystal alpha titanium. *Acta Mater.*, 2016, vol. 118, pp. 317-330. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.07.044>
25. Matsyuk K.V., Trusov P.V. Model for description viscoelastoplastic deformation of hcp crystals: asymmetric stress measures, hardening laws. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 4, pp. 75-105. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2013.4.75-105>

26. Wu X., Kalidindi S.R., Necker C., Salemet A.A. Modeling anisotropic stress-strain response and crystallographic texture evolution on  $\alpha$ -titanium during large plastic deformation using Taylor-type models: Influence of initial texture and purity. *Metall. Mater. Trans. A*, 2008, vol. 39, pp. 3046-3054. <https://doi.org/10.1007/S11661-008-9651-X>
27. Kondratev N.S., Trusov P.V. A mathematical model for deformation of BCC single crystals taking into consideration the twinning mechanism. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 20-33. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.36>
28. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh tel* [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous bodies]. Moscow, Nauka, 1977. 399 p.
29. Hirth J., Lothe J. *Theory of Dislocations*. McGraw-Hill, 1968. 780 p.
30. Newnham R.E. *Properties of materials. Anisotropy, symmetry, structure*. Oxford University Press, 2005. 390 p.
31. Man C.-S., Huang M. A simple explicit formula for the Voigt-Reuss-Hill average of elastic polycrystals with arbitrary crystal and texture symmetries. *J. Elast.*, 2011, vol. 105, pp. 29-48. <https://doi.org/10.1007/s10659-011-9312-y>
32. Krivosheina M.N., Tuch E.V., Khon Yu.A. Applying the Mises-Hill criterion to modeling the dynamic loading of highly anisotropic materials. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 2012, vol. 76, pp. 80-84. <https://doi.org/10.3103/S1062873812010169>
33. Krivosheina M.N., Kobenko S.V., Tuch E.V. Averaging of properties of anisotropic structural materials in numerical simulation of their fracture. *Phys. Mesomech.*, 2010, vol. 13, no. 2, pp. 55-60.
34. Raab G.I., Aleshin G.N., Fakhredinova E.I., Raab A.G., Asfandiyarov R.N., Aksenov D.A., Kodirov I.S. Prospects of development of new pilot-commercial SPD methods. *MTD*, 2019, vol. 1, no. 1, pp. 48-57.
35. Raab G.I., Kodirov I.S., Aleshin G.N., Raab A.G., Tsenev N.K. Influence of special features of the gradient structure formation during severe plastic deformation of alloys with different types of a crystalline lattice. *Vestnik MGTU im. G.I. Nosova – Vestnik of Nosov Magnitogorsk State Technical University*, 2019, vol. 17, no. 1, pp. 64-75. <https://doi.org/10.18503/1995-2732-2019-17-1-64-75>
36. Hama T., Kobuki A., Takuda H. Crystal-plasticity finite-element analysis of anisotropic deformation behavior in a commercially pure titanium Grade 1 sheet. *Int. J. Plast.*, 2017, vol. 91, pp. 77-108. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.12.005>
37. Ji Y.T., Suo H.L., Ma L., Wang Z., Yu D., Shaheen K., Cui J., Liu J., Gao M.M. Formation of recrystallization cube texture in highly rolled Ni-9.3 at % W. *Phys. Metals Metallogr.*, 2020, vol. 121, pp. 248-253. <https://doi.org/10.1134/S0031918X20020180>
38. Birger I.A. *Ostatochnyye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p.
39. Pozdeyev A.A., Nyashin Yu.I., Trusov P.V. *Ostatochnyye napryazheniya: teoriya i prilozheniya* [Residual stresses: theory and applications]. Moscow, Nauka, 1974. 112 p.
40. Birger I.A., Shor B.F., Iosilevich G.V. *Raschet na prochnost' detaley mashin* [Calculation of the strength of machine parts]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1979. 702 p.
41. Abramov V.V. *Ostatochnyye napryazheniya i deformatsii v metallakh* [Residual stresses and deformations in metals]. Moscow, State Scientific and Technical Publishing House of Machine-building literature, 1963. 356 p.
42. Fridman Ya.B. *Mekhanicheskiye svoystva metallov. Ch. 1. Deformatsiya i razrusheniye* [Mechanical properties of metals. Part 1. Deformation and Destruction]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1974. 472 p.
43. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of fracture mechanics]. Moscow, Nauka, 1974. 312p.
44. Collins J.A. *Failure of materials in mechanical design: Analysis, prediction, prevention*. John Wiley & Sons, 1981. 629 p.
45. Rabotnov Yu.N. *Vvedeniye v mekhaniku razrusheniya* [Introduction to fracture mechanics]. Moscow, Nauka, 1987. 80 p.
46. Besson J. Continuum models of ductile fracture: A Review. *Int. J. Damage Mechanics*, 2010, vol. 19, pp. 3-52. <https://doi.org/10.1177/1056789509103482>

Поступила в редакцию 01.10.2021; после доработки 01.11.2021; принята к опубликованию 03.11.2021

---

Сведения об авторах

Трусов Пётр Валентинович, дфмн, проф., зав. каф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29а; e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru

Соколов Александр Сергеевич, б/с, студ., ПНИПУ; e-mail: aleks1997.1997@yandex.ru