

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.4.30](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.4.30)

УДК 532.54: 51-72

АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ПЛОСКИХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ И ИХ ИЗМЕНЕНИЙ ВО ВРЕМЕНИ

В.Н. Говорухин, А.М. Филимонова

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Предложен численный подход исследования изменений во времени структур вихревых конфигураций идеальной жидкости. В основе численных алгоритмов лежит решение начально-краевой задачи для нестационарных уравнений Эйлера в терминах завихренности и функции тока. Для этого используется спектрально-вихревой бессеточный метод, который базируется на аппроксимации функции тока рядом Фурье, приближении методом наименьших квадратов поля завихренности по её значениям в маркерных частицах и расчёте динамики частиц путём решения задачи Коши. Схема спектрально-вихревого метода позволяет реализовать алгоритм анализа «моментальной структуры» поля скоростей методами теории динамических систем. При этом функция тока представляется в виде отрезка ряда Фурье в каждый момент времени. Алгоритм включает построение «моментального» векторного поля течения, а также его особых точек и сепаратрис седловых точек. Для изучения динамики изменений структур во времени применяется расчёт полей локальных показателей Ляпунова. Представлены результаты численного моделирования динамики структуры вихревых течений на основе предложенных подходов для двух видов граничных условий: периодических по пространственным координатам краевых условий и условия протекания жидкости через границу расчётной области. В случае периодических краевых условий выявлено, что вихревая конфигурация состоит из четырёх вихревых пятен, для которых построены поля локальных показателей Ляпунова. При наличии протекания жидкости рассмотрено течение в канале с заданной на границе скоростью, построено «моментальное» поле течения. Вычисления показали эффективность предложенных алгоритмов для углубленного анализа формирующейся картины поля скорости вихревой конфигурации.

Ключевые слова: идеальная жидкость, вихревые структуры, бессеточные методы, плоские течения, идентификация течения жидкости

ANALYSIS OF THE STRUCTURE OF VORTEX PLANAR FLOWS AND THEIR CHANGES WITH TIME

V.N. Govorukhin and A.M. Filimonova

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

A numerical approach is proposed for studying changes in the structures of vortex configurations of an ideal fluid with time. Numerical algorithms are based on the solution of the initial-boundary value problem for nonstationary Euler equations in terms of vorticity and stream function. For this purpose, the spectral meshless vortex method is used. It is based on the approximation of the stream function by the Fourier series cut and the approximation of the vorticity field by the least squares method from its values in marker particles. To calculate the dynamics of particles, a Cauchy problem is solved. The scheme of the spectral-vortex method makes it possible to implement the algorithm for analyzing the “instantaneous structure” of the velocity field using the methods of the theory of dynamic systems. This includes the construction of an “instantaneous” vector flow field, its singular points, and saddle point separatrices. To study the dynamics of changes in structures with time, the field of the local Lyapunov exponents is calculated. The results of numerical modeling and the analysis of changes in the structure of vortex flows are presented on the basis of the proposed approaches for two types of boundary conditions. Under periodic boundary conditions, the vortex configuration consists of four vortex spots. For the flow condition, the fluid flow in the channel with a given velocity at the boundary is considered. The calculations have shown the effectiveness of the proposed algorithms for a fine analysis of the emerging pattern of the velocity field of the vortex configuration.

Key words: inviscid incompressible fluid, vortex structures, meshfree methods, planar flows, fluid flow identification

1. Введение

Анализ вихревой динамики важен для понимания многих природных процессов, их зависимости от характеристик среды, в которой они протекают. Для качественного исследования подобных проблем и изучения влияния различных параметров на динамику формирующихся вихревых структур эффективными являются методы теории бифуркаций [1, 2]. Сложные течения идеальной жидкости состоят из вихрей, отличающихся интенсивностью, размерами и ориентацией. Их расположение в каждый момент времени определяет количество массопереноса, динамику жидкости в целом, траектории частиц [3]. Получаемая информация о вихревой динамике в потоке жидкости актуальна как для понимания фундаментальных законов течения жидкости, так и при решении конкретных задач (см. статью [4] и обзор литературы в ней). Трансформация структуры течения во времени и пространстве приводит к качественным изменениям свойств потока. Знание же деталей его внутренней конфигурации позволяет изучать процессы взаимодействия вихревых пятен [5], оценивать и предсказывать массоперенос в них [6]. Возможность осуществления таких действий предоставляют численные методы, основанные на теории динамических систем [7] и включающие как методы качественной теории дифференциальных уравнений, так и алгоритмы анализа хаотической динамики. В этой статье предложен алгоритм комплексного анализа структур плоских течений идеальной жидкости, в основу которого положен спектрально-вихревой бессеточный метод решения нестационарной задачи для уравнений Эйлера [8, 9].

2. Математическая постановка задачи и спектрально-вихревой метод

Рассматриваются плоские течения невязкой несжимаемой жидкости. Задача может быть описана уравнениями Эйлера, которые в терминах завихренности $\omega(x, y, t)$ и функции тока $\psi(x, y, t)$ имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = 0, \\ -\Delta \psi = \omega, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \quad (1)$$

где t — время, x, y — пространственные координаты, $\Delta \psi \equiv \psi_{xx} + \psi_{yy}$ — оператор Лапласа. Уравнение (1)₁ выражает пассивный перенос завихренности жидкими частицами, а (1)₂ есть уравнение связи завихренности ω и функции тока ψ . Здесь и далее опущена размерность величин. Это связано с тем, что записанные для идеальной жидкости уравнения Эйлера являются безразмерными.

Исследуются двумерные течения в прямоугольной области размером $a \times b$

$$D = \left\{ (x, y) : -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2} \right\}$$

при начальных условиях $\omega(x, y, 0) = \omega_0(x, y)$. Задача решается при двух типах граничных условий.

I. Периодические по пространству условия

При таких условиях возникают ограничения для начального условия: интеграл в области D от $\omega_0(x, y)$ должен быть равен нулю. Эти граничные условия часто применяются при численном моделировании вихревой динамики на всей плоскости:

$$\psi \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \psi \Big|_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}, \quad \psi \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \psi \Big|_{\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}}; \quad \psi_x \Big|_{-\frac{a}{2}} = \psi_x \Big|_{\frac{a}{2}}, \quad \psi_y \Big|_{-\frac{b}{2}} = \psi_y \Big|_{\frac{b}{2}}.$$

II. Заданная скорость течения на границе

В этом случае предполагается протекание жидкости через границу области D с заданной нормальной скоростью. Вся граница области D делится на три части: ∂D^+ , где нормальная скорость жидкости направлена внутрь области D (это соответствует входу в область); ∂D^- , где нормальная скорость жидкости направлена из области D ; ∂D^0 , где твёрдая граница. При таких условиях скорость течения на границе области ∂D будет определяться как:

$$\psi \Big|_{\partial D} = \psi^{\partial D},$$

где $\psi^{\partial D}$ — заданная функция, удовлетворяющая условию равенства нулю суммарного потока жидкости через границу. Кроме того, должно быть задано граничное условие для $\omega^+(x, y, t)$ на входе в область (на части границы ∂D^+).

Для решения нестационарной задачи (1), то есть для отыскания характеристик поведения вихревых течений во времени, используется спектрально-вихревой метод. В его основе лежат пассивный перенос завихренности ω маркерными частицами и представление функции тока ψ в виде отрезка ряда Фурье. Подробное описание численной реализации метода представлено в работах [8–10].

При обоих типах граничных условий функция тока ψ разыскивается в виде отрезка ряда Фурье по базисным функциям:

$$\psi(t, x, y) \approx \sum_{i=1}^{k_x} \sum_{j=1}^{k_y} \psi_{ij}(t) g_i(x) h_j(y). \quad (2)$$

Здесь: k_x, k_y — число членов разложения по переменным x и y соответственно; $\psi_{ij}(t)$ — неизвестные коэффициенты (функции времени). Выбор функций $g_i(x), h_j(y)$ определяется типом граничных условий:

– для периодических граничных условий

$$g_i(x) : \left\{ \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sin \left(\frac{2\pi k}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \cos \left(\frac{2\pi k}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right) \right\}, \quad k = 1, \dots, k_x,$$

$$h_j(y) : \left\{ \frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}} \sin\left(\frac{2\pi k}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}} \cos\left(\frac{2\pi k}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \right\}, \quad k = 1, \dots, k_y;$$

– при условии протекания

$$g_i(x) : \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2\pi k}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right) \right\}, \quad k = 1, \dots, k_x,$$

$$h_j(x) : \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}} \sin\left(\frac{2\pi k}{b}\left(y + \frac{b}{2}\right)\right) \right\}, \quad k = 1, \dots, k_y.$$

Коэффициенты $\psi_{ij}(t)$ ряда (2) находятся в результате решения уравнения (1)₂ методом Бубнова–Галёркина на каждом шаге по времени. После этого динамика маркерных частиц жидкости описывается системой уравнений:

$$\dot{x}_i = v_x = \psi_y(t, x_i, y_i) = \sum_{k=1}^{k_x} \sum_{l=1}^{k_y} \psi_{kl}(t) g_k(x_i) \frac{\partial h_l(y_i)}{\partial y},$$

$$\dot{y}_i = v_y = -\psi_x(t, x_i, y_i) = -\sum_{k=1}^{k_x} \sum_{l=1}^{k_y} \psi_{kl}(t) \frac{\partial g_k(x_i)}{\partial x} h_l(y_i),$$

(i = 1, ..., N). (3)

В (3) (x_i, y_i) — координаты маркерных частиц.

Для решения системы (3) необходимо определить начальные координаты частиц — (x_i^0, y_i^0) , и значение завихрённости в них согласно начальному условию $\omega_i = \omega_0(x_i, y_i)$. Важно, что координаты частиц изменяются, но значения завихрённости ω_i остаются постоянными. Часть маркерных частиц расположена в узлах равномерной сетки, нанесённой на D , и координаты этих узлов используются далее при вычислении поля локальных показателей Ляпунова (ЛПЛ). Остальные частицы могут распределяться случайно или, для детализации распределения завихрённости некоторых подобластей (чтобы не нарушить дискретные симметрии расчётной области), для каждой частицы с координатами (x_i^0, y_i^0) должны быть заданы частицы, симметричные относительно осей $x=0$ и $y=0$.

В статье [11] метод решения нестационарной задачи расширен за счёт алгоритмов анализа структуры и перестроек вихревых структур во времени в замкнутой области течения. Представленная работа дополняет анализ задач двумерной динамики идеальной жидкости при различных граничных условиях новыми возможностями.

В расчётах использовалось количество маркерных частиц N от 20000 до 160000, то есть численно решались системы от 40000 до 320000 обыкновенных дифференциальных уравнений. Это потребовало распараллеливания алгоритма решения задачи (3) с помощью технологии OpenMP. Для интегрирования по времени системы (3) применялся псевдо-симплектический интегратор третьего порядка точности и шестого порядка аппроксимации условия симплектичности [12].

3. Алгоритмы численного анализа динамики вихревой структуры

Известно [3], что «каркасом» сложного плоского течения служат вихревые пятна, которые определяют структуру течения и свойства переноса жидкости. В каждый фиксированный момент времени в центре вихревого пятна скорость жидкости равняется нулю, то есть центру пятна соответствует эллиптическая особая точка системы (3). При этом границы вихревых пятен определяются сепаратрисами, которые являются устойчивыми и неустойчивыми многообразиями седловых особых точек системы. Представление функции тока в виде (2) позволяет применять подходы теории динамических систем для исследования трансформаций течений на основе перестроек фазовых портретов системы (3). В данной работе предлагается алгоритм автоматического построения фазового портрета при заданных в (3) значениях коэффициентов ψ_{ij} . Его описание приводится ниже.

Недостаток этого подхода состоит в том, что с его помощью получается «моментальная» структура поля скорости, по которой можно анализировать конфигурации жидкости только в фиксированный момент времени. При этом хорошо отражается структура течения лишь в стационарном случае и отсутствует представление о деталях динамических перестроек и процессов массопереноса в нестационарных потоках жидкости.

Информацию о нестационарных вихревых течениях можно получить, изучая характер траекторий маркерных частиц во времени. Хаотичность траекторий будет свидетельствовать о зависимости поля

скорости течения от времени. Когда жидкая частица перемещается в пространстве, она проходит через области с различной динамикой, и движение частицы можно охарактеризовать величиной её ускорения [12], что позволяет изучать процессы переноса жидкости. Алгоритм расчёта траекторий частиц является составной частью схемы спектрально-вихревого метода, описание которого можно найти в статьях [8–10].

Интенсивность и структура массопереноса может быть получена в результате расчёта поля ЛПЛ. Эта характеристика строится без существенных дополнительных усилий при использовании спектрально-вихревого метода. В расчётах участвуют частицы, расположенные в узлах прямоугольной сетки в области течения, см. [9, 11].

3.1. Алгоритм построения «моментальной структуры» поля скорости

Этап I алгоритма численного анализа динамики вихревой структуры течения состоит в поиске всех особых точек векторного поля скорости частиц жидкости. Для этого решается система двух алгебраических уравнений вида:

$$\begin{aligned}\psi_y(x, y) &\approx \sum_{k=1}^{k_x} \sum_{l=1}^{k_y} \psi_{kl} g_k(x) \frac{\partial h_l(y)}{\partial y} = 0, \\ \psi_x(x, y) &\approx \sum_{k=1}^{k_x} \sum_{l=1}^{k_y} \psi_{kl} \frac{\partial g_k(x)}{\partial x} h_l(y) = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Для получения решения естественно использовать метод Ньютона.

Введём обозначения: $F = (\psi_y(x, y), -\psi_x(x, y))$ и $U = (x, y)$. Расчётная формула метода примет вид: $U^{k+1} = U^k - J^{-1}(U^k) \cdot F(U^k)$, где J — матрица Якоби системы (4). При удачно заданном начальном приближении метод Ньютона сойдётся к одному из решений. Поиск всех решений системы (4) является гораздо более сложной задачей, которая в общем случае трудно решается.

Для поиска множества особых точек системы (4) можно предложить следующую последовательность действий:

1. Расчётную область D разбить на ячейки с некоторым шагом h .
2. В качестве начального приближения для метода Ньютона выбрать координаты центра ячейки.
3. Далее осуществить вычисления согласно методу Ньютона. Для ячейки итерационный процесс закончить в одном из двух случаев: очередное значение вышло за границы ячейки; равновесное значение — U_* , найдено.

4. У полученных решений произвести анализ устойчивости и классифицировать особые точки (на седловые и эллиптические).

Пункты 1–4 алгоритма выполнить с шагом $h/2$.

5. Если число находимых решений перестанет меняться, остановить работу алгоритма.

Этап II алгоритма состоит в построении устойчивых и неустойчивых многообразий U_* седловых точек. Эти особые траектории и будут являться сепаратрисами вихревых пятен. Необходимо найти собственные векторы, отвечающие положительному (u) и отрицательному (v) собственным значениям U_* для каждой седловой точки. Затем решить систему (3) в прямом времени $t \in [0, T]$ с начальным условием $U_* \pm \delta u$ и в обратном времени $t \in [-T, 0]$ с начальным условием $U_* \pm \delta v$. Величина T определяется в процессе вычислений. Расчёт прекращается или при попадании траектории на границу области течения в окрестность другой особой точки, или при достижении временем некоторого максимального значения T_{\max} .

3.2. Построение поля локальных показателей Ляпунова (ЛПЛ)

Показатели Ляпунова служат инструментом качественного анализа процессов перемешивания и массопереноса в жидкости, а также позволяют обнаружить застойные зоны. С их помощью можно установить, насколько с течением времени бесконечно близкие в начальный момент частицы жидкости отдаляются друг от друга. Поскольку вихревые структуры изучаются на конечных временах, то речь идет о нахождении поля ЛПЛ. Его расчёт основывается в данной работе на схемах, описанных в [14, 15]. Этот подход хорошо согласуется с процедурой спектрально-вихревого метода [8, 11]. Отличительной особенностью применяемого подхода является рассмотрение динамики маркерных частиц во всей области, в том числе и частиц с нулевой завихрённостью, что открывает возможность без особых усилий построить поле ЛПЛ на каждом временном шаге.

При построении поля ЛПЛ в области течения D используются частицы, находящиеся в узлах прямоугольной сетки в момент времени t_0 . Эти частицы определяют начальное распределение

завихрённости в области D . Пусть (x_i^0, y_i^0) — начальные координаты частицы с номером i ($i = 1, 2, \dots, N$) на плоскости. Тогда $U(x_i^0, y_i^0, T) = (x_i^0(t_0 + T), y_i^0(t_0 + T))$ — координаты частицы с номером i в момент времени T , где t_0 — начальный момент времени. Локальный показатель Ляпунова в момент времени T определяется следующим образом:

$$\sigma^T(x_i^0, y_i^0) = \frac{1}{|T|} \cdot \ln \sqrt{\lambda_{\max}^i \left((\nabla U)^T \cdot \nabla U \right)}, \quad (5)$$

где λ_{\max}^i — максимальное собственное значение тензора деформации Коши–Грина $((\nabla U)^T \cdot \nabla U)$ для частицы (x_i^0, y_i^0) .

Вычисление значения $\nabla U(x_i^0, y_i^0)$ в выражении (5) выполняется на основе четырёхточечного шаблона. Для удобства использования такой схемы аппроксимации применим двухиндексную нумерацию частиц: $x_{k,l}^0 = k \cdot h_x$, $y_{k,l}^0 = l \cdot h_y$, где $k = 1, \dots, m_x$, $l = 1, \dots, m_y$. Здесь h_x , h_y — шаги разбиения по x и y , а m_x , m_y — количество узлов сетки на осях x и y соответственно. Тогда формула для вычисления $\nabla U(x_{k,l}^0, y_{k,l}^0)$ принимает вид:

$$\nabla U(x_{k,l}^0, y_{k,l}^0, T) \approx \left[\frac{\nabla U(x_{k+1,l}^0, y_{k+1,l}^0) - \nabla U(x_{k-1,l}^0, y_{k-1,l}^0)}{2h_x}, \frac{\nabla U(x_{k,l+1}^0, y_{k,l+1}^0) - \nabla U(x_{k,l-1}^0, y_{k,l-1}^0)}{2h_y} \right]. \quad (6)$$

Поскольку в правой части выражения (6) все величины известны на каждом временном шаге T , то для построения поля ЛПЛ в узлах прямоугольной сетки необходимо вычислить значение $\nabla U(x_{k,l}^0, y_{k,l}^0)$ по формуле (6) для каждого узла сетки и найти максимальное собственное значение тензора деформации. Максимальное собственное значение λ_{\max} легко может быть установлено аналитически. После чего находится значение ЛПЛ по формуле (5).

4. Верификация метода

Предложенная численная схема проверена рядом тестовых расчётов. Для периодических граничных условий исследовалась динамика диполя Ламба, заданного в начальный момент времени следующим распределением завихрённости:

$$\omega_0(x, y) = \begin{cases} \frac{2\lambda U}{J_0(\lambda R)} J_1(\lambda r) \cos \Theta, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases} \quad (7)$$

где r, Θ — полярные координаты на плоскости, J_i — функции Бесселя 1-го рода порядка i (для гладкости поля завихрённости полагается $\lambda R = 3,831$ — нуль функции Бесселя 1-го рода), $R = 0,5$ — радиус диполя, $U = 0,3$ — скорость его перемещения.

На рисунке 1 изображены линии тока диполя Ламба (7) в начальный и конечный моменты времени расчёта. За рассматриваемый период времени диполь прошёл через границы области D десять раз вдоль

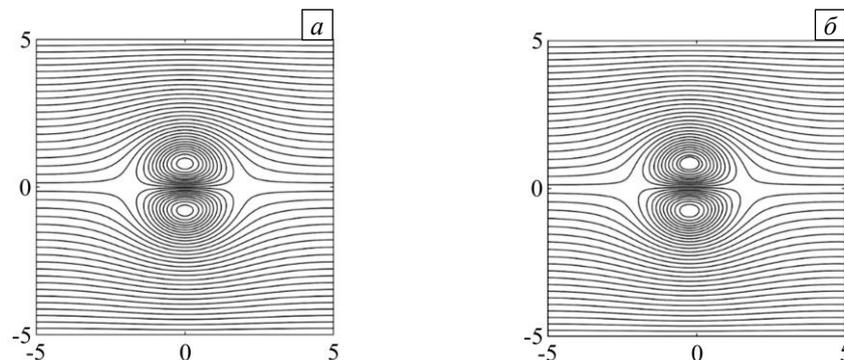


Рис. 1. Линии тока диполя Ламба в начальный и конечный моменты времени $t : 0$ (а); 350 (б)

оси абсцисс. Можно заметить, что вихревая конфигурация полностью сохранила свою структуру и симметрию, что позволяет сделать вывод о достаточно высокой точности расчётов на основе предложенной численной схемы.

Тестовый расчёт проводился на временном отрезке $t \in [0, 350]$. Параметры расчёта были следующими: $a = b = 10$, $\Delta t = 0,015$ — шаг по времени, $k_x = k_y = 35$ — число членов ряда по x и y соответственно, $n_x = n_y = 50$ — количество разбиений области D по x и y .

5. Вычислительные эксперименты

С применением предложенных алгоритмов проведён анализ двух начальных конфигураций. Используется алгоритм анализа в первом случае «моментальной структуры» поля скорости, а во втором — построенного поля ЛПЛ.

5.1. Анализ структуры течения в канале

Этот вычислительный эксперимент демонстрирует возможности и результаты расчёта «моментальной структуры» поля скорости течений. Рассматривается течение в канале со сторонами $a = 3$, $b = 1$ с граничными условиями II — задана скорость течения на границе как функция $\psi^{bd} = Q_1 y + Q_2 y^2 + Q_3 y^3$ и завихрённость на входе в канал как $\omega^+ = k\psi^{bd}$. При таких условиях известны стационарные режимы в задаче (1) с зависимостью $\omega(x, y) = k\psi(x, y)$, см. [15]. В качестве начальной конфигурации (начального распределения $\omega_0(x, y)$) выберем вихревую конфигурацию, отвечающую стационарному режиму при $Q_1 = 0,03$, $Q_2 = 0,21$, $Q_3 = -0,14$, $k = 51$. Для реализации спектрально-вихревого метода используем следующие параметры: $N = 22000$ (количество частиц); $n_x \times n_y = 30 \times 10$ — число ячеек в разбиении области D ; $k_x \times k_y = 35 \times 35$ — число членов в (2); $h = 0,02$ — шаг по времени. Результаты вычислений представлены на рисунке 2.

На начальном временном отрезке стационарный режим сохраняется, поле скорости при $t = 5$ содержит 8 седловых и 6 эллиптических особых точек. При $t \approx 10$ накопленная вычислительная погрешность приводит к разрушению конфигурации стационарного режима, перестройке структуры фазового портрета (перезамыканию сепаратрис). На отрезке $t \in [10, 14]$ течение претерпевает существенную трансформацию: со временем изменяется количество особых точек, характер сепаратрис, геометрия проточной зоны. При $t = 14$ течение состоит из пяти вихревых пятен, которые при росте t взаимодействуют, и финальным является режим течения, близкий к стационарному, со структурой, состоящей из трёх вихрей (на рисунке не приводится). На рисунке 3 дан график динамики кинетической энергии течения. В силу открытости канала энергия меняется со временем, но в финальном, близком к стационарному, режиме эти изменения малы.

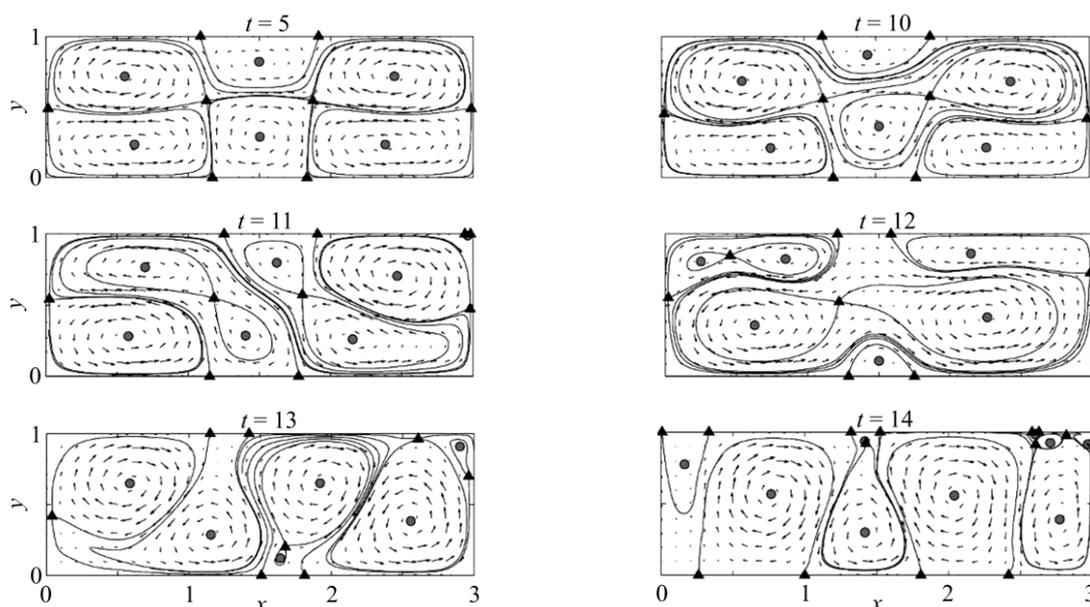
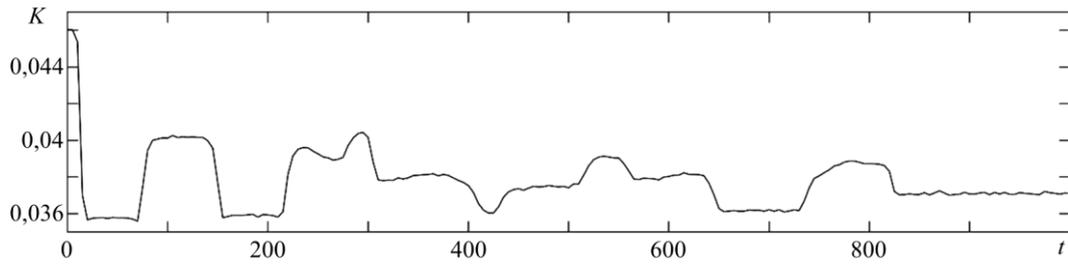


Рис. 2. Поле скорости жидкости в канале в различные моменты времени t ; треугольником помечены седловые особые точки, кружком — эллиптические особые точки; линиям соответствуют сепаратрисы седловых точек

Рис. 3. Зависимость кинетической энергии течения K от времени t

5.2. Динамика вихревой конфигурации из четырёх пятен

Рассмотрим вихревую конфигурацию потока, состоящую из четырёх распределённых вихревых пятен. В начальный момент времени поле завихрённости определяется, согласно Гауссову закону, следующим образом:

$$\omega_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x \mp \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2}{2}}, & (x \mp \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2 \leq R^2, \\ -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x \mp \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2}{2}}, & (x \mp \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2 \leq R^2, \\ 0, & (x \mp \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2 > R^2, \\ 0, & (x \mp \alpha)^2 + (y \pm \beta)^2 > R^2, \end{cases} \quad (8)$$

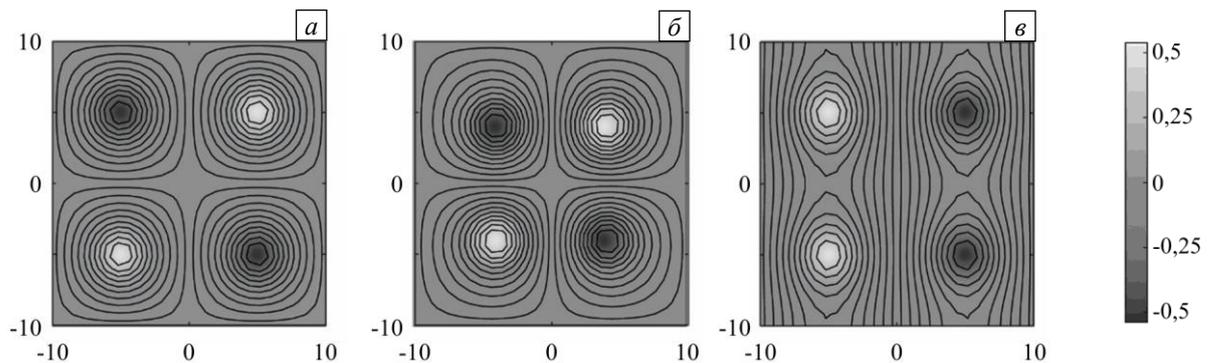
где $(\pm\alpha, \pm\beta)$, $(\mp\alpha, \pm\beta)$ — координаты центров вихревых пятен, R — радиус пятен.

Динамика вихревой структуры исследовалась при следующих параметрах: $a=b=20$ — размеры расчётной области D ; $N=160000$ — количество частиц; $n_x \times n_y = 35 \times 35$ — число ячеек; $k_x \times k_y = 30 \times 30$ — число членов разложения функции тока в ряд Фурье по переменным x и y ; $\Delta t = 0,005$ — шаг по времени; $t \in [0, 1500]$ — временной отрезок расчёта. В таблице приведены значения параметров α , β , R , отвечающие начальной вихревой конфигурации (8).

Таблица. Параметры вихревых конфигураций в вычислительном эксперименте

Номер эксперимента	α	β	R
I	5,0	5,0	4,5
II	4,0	4,0	2,0
III	5,0	5,0	3,5

Далее на рисунках представлены результаты вычислительных экспериментов по моделированию вихревых течений на плоскости. На рисунке 4 приведено начальное распределение завихрённости и линии тока для каждого из вычислительных экспериментов. Чёрный цвет означает пятна с отрицательной

Рис. 4. Распределение завихрённости и линии тока в начальный момент времени $t=0$ для экспериментов I (а), II (б), III (в)

завихрённостью, белый цвет — с положительной. Рассматриваются три различных вихревых конфигурации, состоящие из четырёх распределённых вихревых пятен разного знака. В начальный момент времени вихревые структуры отличаются между собой координатами центров каждого из пятен, радиусом пятна, а также взаимным расположением пятен разного знака.

На рисунке 5 изображены финальное распределение завихрённости и вид линий тока для каждого из экспериментов I–III. Вихревой конфигурации на рисунке 5а соответствует устойчивый режим: симметричная структура потока остаётся неизменной в течение всего периода расчёта. Каждое из вихревых пятен вращается вокруг своей оси, оставаясь на месте.

Динамика вихревой конфигурации II (см. Рис. 5б) представляет собой повторяющийся режим с периодом $\tau \approx 180$. Это означает, что за временной промежуток τ структура возвращается в своё начальное положение. Всего за время эксперимента она претерпевает 8 полных циклов изменения.

Вихревая конфигурация III оказалась неустойчивой. За время расчёта она постепенно изменяется и затем полностью разрушается; появляется качественно новая структура. На рисунке 5в видно, что из четырёх вихревых пятен, характерных для начального момента времени, образуются два вихревых пятна большего размера. При этом новая вихревая структура получается более устойчивой, в отличие от конфигурации в начале эксперимента III.

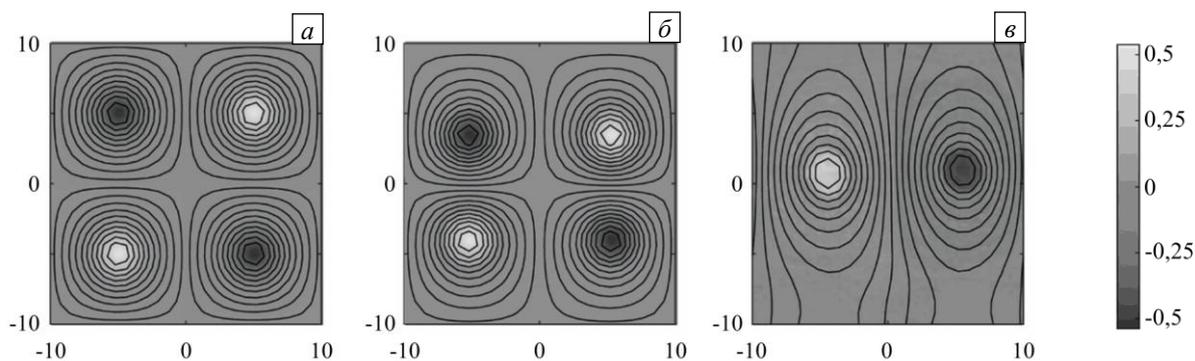


Рис. 5. Распределение завихрённости и картины линий тока в конечный момент времени $t = 1500$ для экспериментов I–III, см. соответственно (а–в)

На рисунке 6 показано поле ЛПЛ для каждого из экспериментов I–III в конечный момент времени $t = 1500$. Здесь черный цвет означает наименьшее отдаление частиц друг от друга с течением времени (минимальный ЛПЛ равен 0), а чем светлее оттенок серого, тем больше значение ЛПЛ и тем на большее расстояние друг от друга разбегаются частицы. На рисунке 6а присутствуют две сепаратрисы: вертикальная и горизонтальная. Интенсивнее всего процессы перемешивания происходят вокруг вращающихся пятен, чему соответствует самый светлый оттенок серого цвета (Рис. 6б). Центры каждого из пятен стоят на месте в течение всего расчётного времени. Частицы, близкие к центру пятна, разбегаются на меньшее расстояние, чем частицы, расположенные около контура пятна. Также можно отметить наличие двух ярко выраженных сепаратрис. Отчетливо видны 4 застойные зоны, где частицы практически не переместились относительно друг друга.

В изображении результатов эксперимента III (см. Рис. 6в) преобладает светло-серый цвет. Это означает, что в области произошло практически полное перемешивание. Наиболее темными областями здесь являются центральные точки вихревых пятен: они остаются на своих местах в течение всего времени расчёта, в то время как окружающие частицы отдаляются от них на достаточно большие расстояния. На этом рисунке, так же, как и на изображениях двух предыдущих экспериментов, видна вертикальная сепаратриса.

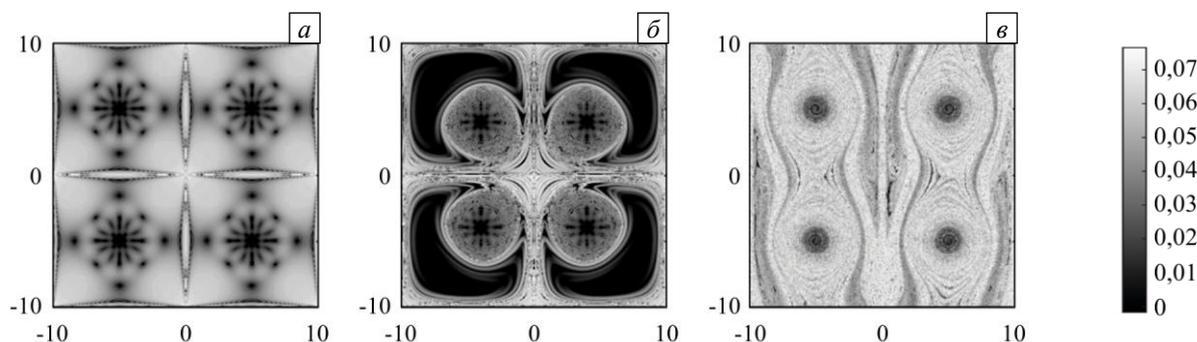


Рис. 6. Поле ЛПЛ в конечный момент времени для экспериментов I–III, см. соответственно (а–в)

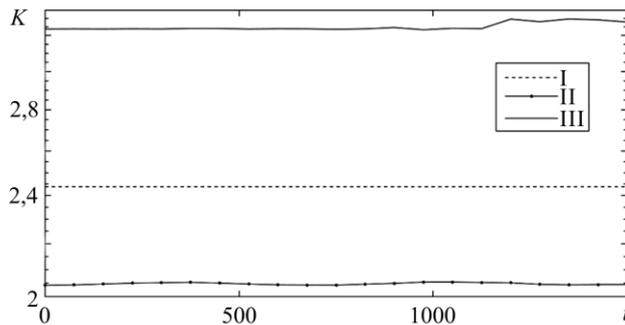


Рис. 7. Зависимость кинетической энергии K от времени t для экспериментов I–III

Для эксперимента III наблюдается небольшой рост в момент $t \approx 1200$. Это обуславливается тем, что именно в это время происходит качественное перестроение вихревой структуры (из четырёх вихревых пятен формируется два). В результате слияния вихревых пятен образуются мелкомасштабные структуры, вследствие чего ухудшается качество аппроксимации поля завихренности. Это приводит к росту погрешности вычисляемых значений. Возникающая проблема может быть устранена путём увеличения числа ячеек при построении дискретного аналога области.

6. Заключение

Предложенные алгоритмы качественного анализа динамики вихревых конфигураций на основе решения нестационарной задачи динамики идеальной жидкости спектрально-вихревым бессеточным методом делают возможным детальное рассмотрение перестроек вихревых конфигураций. Эффективность алгоритмов подтверждена проведёнными расчётами. Получаемый «моментальный» фазовый портрет поля скорости течения позволяет рассчитать количество и размеры вихревых пятен в каждый момент времени за приемлемое время. Поле локальных показателей Ляпунова даёт возможность оценить интенсивность перемешивания жидкости в различных зонах потока с течением времени.

Описанный подход может применяться не только для решения прямых задач исследования течений во времени, но и для идентификации вихревой конфигурации по известным данным о поле скорости течения. Достаточно простая реализация методов качественного анализа структуры течений обусловлена схемой спектрально-вихревого метода решения нестационарной задачи. Приближение функции тока отрезком ряда Фурье позволяет вычислять вектор скорости в любой точке области и использовать методы теории динамических систем. Однако при решении нестационарных задач с применением пространственной дискретизации, например, конечными разностями, реализация алгоритмов качественного анализа сопряжена с дополнительными трудностями.

С помощью предложенных алгоритмов изучалась динамика различных вихревых конфигураций. В случае течения в канале показано изменение структуры вихревой конфигурации и поля скорости во времени, найдены все особые точки поля скорости. Также исследовалась конфигурация четырёх распределённых вихревых пятен на плоскости. Рассмотрено влияние величины радиуса пятна и взаимного расположения со- и разнонаправленных пятен на устойчивость вихревой конфигурации. Показана эволюция вихревой структуры с течением времени, вычислены и оценены локальные показатели Ляпунова.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-29-06013).

Литература

1. Журавлева Е.Н., Пухначев В.В. Численное исследование бифуркаций при спиральном течении жидкости со свободными границами // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 82-90. <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.1.9>
2. Hasan M.S., Mondal R.N., Lorenzini G. Physics of bifurcation of the flow and heat transfer through a curved duct with natural and forced convection // Chin. J. Phys. 2020. Vol. 67. P. 428-457. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2020.07.004>
3. Haller G. Lagrangian coherent structures // Annu. Rev. Fluid Mech. 2015. Vol. 47. P. 137-162. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141322>
4. Колодежнов В.Н. Плоское вихревое течение в цилиндрическом слое // Вычисл. мех. сплош. сред. 2021. Т. 14, № 2. С. 159-170. <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.13>
5. Cerretelli C., Williamson C.H.K. The physical mechanism for vortex merging // J. Fluid Mech. 2003. Vol. 475. P. 41-77. <https://doi.org/10.1017/S0022112002002847>
6. Götzfried P., Emran M.S., Villermaux E., Schumacher J. Comparison of Lagrangian and Eulerian frames of passive scalar turbulent mixing // Phys. Rev. Fluids. 2019. Vol. 4. 044607. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.044607>

7. Wiggins S. The dynamical systems approach to Lagrangian transport in oceanic flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2005. Vol. 37. P. 295-328. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175815>
8. Говорухин В.Н., Филимонова А.М. Расчет плоских геофизических течений невязкой несжимаемой жидкости бессеточно-спектральным методом // *Компьютерные исследования и моделирование.* 2019. Т. 11, № 3. С. 413-426. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-3-413-426>
9. Говорухин В.Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // *ЖВМиМФ.* 2011. Т. 51, № 6. С. 1133-1147. (English version <https://doi.org/10.1134/S096554251106008X>)
10. Филимонова А.М. Динамика и адвекция в вихревом паркете // *Изв. вузов. ПНД.* 2019. Т. 27, № 4. С. 71-84. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-71-84>
11. Говорухин В.Н. Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // *ЖВМиМФ.* 2016. Т. 56, № 8. С. 1491-1505. <https://doi.org/10.7868/S004446691608007X>
12. Wang L. Analysis of the Lagrangian path structures in fluid turbulence // *Phys. Fluid.* 2014. Vol. 26. 045104. <https://doi.org/10.1063/1.4870702>
13. Shadden S.C., Lekien F., Marsden J.E. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows // *Phys. Nonlinear Phenom.* 2005. Vol. 212. P. 271-304. <https://doi.org/10.1016/J.PHYSD.2005.10.007>
14. Haller G. Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields // *Chaos.* 2000. Vol. 10. P. 99-108. <https://doi.org/10.1063/1.166479>
15. Говорухин В.Н. Стационарные вихревые структуры при протекании идеальной жидкости через канал // *Изв. РАН. МЖГ.* 2012. № 2. С. 11-22. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462812020020>)

References

1. Zhuravleva E.N., Puhnamev V.V. Numerical study of bifurcations in spiral fluid flow with free boundary. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 82-90. <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.1.9>
2. Hasan M.S., Mondal R.N., Lorenzini G. Physics of bifurcation of the flow and heat transfer through a curved duct with natural and forced convection. *Chin. J. Phys.*, 2020, vol. 67, pp. 428-457. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2020.07.004>
3. Haller G. Lagrangian coherent structures. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2015, vol. 47, pp. 137-162. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-010313-141322>
4. Kolodezhnov V.N. Plane vortex flow in a cylindrical layer. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. 159-170. <https://doi.org/https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.13>
5. Cerretelli C., Williamson C.H.K. The physical mechanism for vortex merging. *J. Fluid Mech.*, 2003, vol. 475, pp. 41-77. <https://doi.org/10.1017/S0022112002002847>
6. Götzfried P., Emran M.S., Villermaux E., Schumacher J. Comparison of Lagrangian and Eulerian frames of passive scalar turbulent mixing. *Phys. Rev. Fluids*, 2019, vol. 4, 044607. <https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.044607>
7. Wiggins S. The dynamical systems approach to Lagrangian transport in oceanic flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2005, vol. 37, pp. 295-328. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175815>
8. Govorukhin V.N., Filimonova A.M. Numerical calculation of planar geophysical flows of an inviscid incompressible fluid by a meshfree-spectral method. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 3, pp. 413-426. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-3-413-426>
9. Govorukhin V.N. A vortex method for computing two-dimensional inviscid incompressible flows. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2011, vol. 51, pp. 1061-1073. <https://doi.org/10.1134/S096554251106008X>
10. Filimonova A.M. Dynamics and advection in a vortex parquet. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 27, no. 4, pp. 71-82. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-4-71-84>
11. Govorukhin V.N. Numerical analysis of the dynamics of distributed vortex configurations. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2016, vol. 56, pp. 1474-1487. <https://doi.org/10.1134/S0965542516080078>
12. Wang L. Analysis of the Lagrangian path structures in fluid turbulence. *Phys. Fluid.*, 2014, vol. 26, 045104. <https://doi.org/10.1063/1.4870702>
13. Shadden S.C., Lekien F., Marsden J.E. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows. *Phys. Nonlinear Phenom.*, 2005, vol. 212, pp. 271-304. <https://doi.org/10.1016/J.PHYSD.2005.10.007>
14. Haller G. Finding finite-time invariant manifolds in two-dimensional velocity fields. *Chaos*, 2000, vol. 10, pp. 99-108. <https://doi.org/10.1063/1.166479>
15. Govorukhin V.N. Steady vortex structures in inviscid flows in channels. *Fluid Dyn.*, 2012, vol. 47, pp. 147-156. <https://doi.org/10.1134/S0015462812020020>

Поступила в редакцию 02.07.2021; после доработки 29.09.2021; принята к опубликованию 11.10.2021

Сведения об авторах

Говорухин Василий Николаевич, кфмн, доц., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а; email: vngovoruhin@sfsedu.ru
 Филимонова Александра Михайловна, асс., ИММиКН ЮФУ; email: afilemonova@sfsedu.ru