

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.3.29](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.29)

УДК 536.25

## КОНВЕКЦИЯ В ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПОЛОСТЯХ ПРИ НАГРЕВЕ СБОКУ

Т.П. Любимова<sup>1</sup>, М.Г. Казимарданов<sup>1</sup>, А.В. Перминов<sup>2</sup><sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Работа посвящена моделированию конвективных движений вязкопластических жидкостей в нагреваемых сбоку вертикальных замкнутых прямоугольных областях с различными отношениями сторон. Задача решалась численно с помощью пакета прикладных программ ANSYS Fluent. Для описания реологического поведения жидкости использовалась модель Гершеля–Балкли. При определенных реологических параметрах эта модель переходит в модель ньютоновской жидкости, поведение которой также моделировалось в качестве предельного случая. По результатам расчетов построены зависимости максимального значения функции тока в полости от числа Рейля. Найдено, что при его малых значениях интенсивность движения близка к нулю. При некотором же пороговом значении числа Рейля происходит резкое изменение интенсивности движения, а его дальнейшее повышение приводит к практически линейному росту максимального значения функции тока. Для каждого из рассмотренных отношений сторон полости установлены пороговые значения числа Рейля, при которых наблюдается резкое увеличение интенсивности движения жидкости. Вычисленные величины оказались близкими к пороговым значениям числа Рейля для жидкости Шведова–Бингама, найденным ранее другими авторами. Получены поля функции тока и второго инварианта тензора вязких напряжений для разных значений числа Рейля и различных отношений сторон области. Для жидкости Шведова–Бингама проведено сравнение сценариев перестройки зон квазитвердого движения в зависимости от числа Рейля с опубликованными результатами других авторов.

*Ключевые слова:* конвекция, неньютоновская жидкость, модель Гершеля–Балкли, вязкопластическая жидкость, зона квазитвердого движения, численное моделирование

## CONVECTION IN VISCOPLASTIC FLUIDS IN RECTANGULAR CAVITIES AT LATERAL HEATING

T.P. Lyubimova<sup>1</sup>, M.G. Kazimardanov<sup>1</sup> and A.V. Perminov<sup>2</sup><sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation<sup>2</sup>Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

The paper is devoted to the study of convective motions of viscoplastic fluids in closed two-dimensional rectangular domains with different aspect ratios under lateral heating. The problem was solved numerically using the ANSYS Fluent software. The Herschel-Bulkley model was chosen for describing the rheological behavior of the fluid. Under certain rheological parameters, this model was transformed into a Newtonian fluid model, whose behavior was also simulated as a limiting case. Based on the calculated results, the dependences of the maximum value of the stream function in the cavity on the Rayleigh number are plotted. It was found that at small Rayleigh numbers the intensity of motion is close to zero. At a certain threshold value of the Rayleigh number there is a sharp increase in the intensity of motion, and a further increase in the Rayleigh number causes an almost linear growth of the maximum value of the stream function. For each of the considered ratios of cavity sides, the "threshold" values of the Rayleigh number, at which a sharp increase in the intensity of motion of liquid is observed, were determined. The obtained values of Rayleigh numbers turned out to be close to the "threshold" values of the Rayleigh number for the Bingham fluid found in the works of other authors earlier. The fields of the stream function and the square root of the second invariant of the viscous stress tensor were obtained for different values of the Rayleigh number and different aspect ratios. The scenarios of rearrangement of quasisolid motion zones with increasing Rayleigh number were compared with the available results for the Bingham fluid.

*Key words:* convection, non-Newtonian fluid, Herschel-Bulkley model, viscoplastic fluid, unyielded zone, numerical simulation

### 1. Введение

Исследуется движение вязкопластических жидкостей вследствие конвекции в вертикальных прямоугольных полостях с различными соотношениями сторон в условиях нагрева сбоку. Неньютоновские жидкости широко применяются в химической, нефтеперерабатывающей, автомобильной и авиационной отраслях промышленности. Так, моторные масла, используемые в двигателях автомобилей, в коробках приводов авиационных двигателей, обладают свойствами неньютоновской жидкости и способны, за счет образования тонкого слоя на стенках агрегата, снижать трение между деталями. Изучение течений неньютоновских жидкостей представляет большой как инженерный, так и научный интерес.

Конвективное течение вязкопластических жидкостей в замкнутых полостях впервые рассмотрено в работах [1–3]. В [1] в рамках регуляризованной реологической модели Уильямсона, которая позволяет проводить расчеты единым образом во всей полости, решается задача конвекции в вязкопластической жидкости в полости с квадратным поперечным сечением при нагреве сбоку. Обнаружено, что, в отличие от случая ньютоновской жидкости, при малых значениях числа Рейля  $Ra$  наблюдается лишь слабое конвективное движение, а при достижении числом Рейля некоторого значения  $Ra^*$  имеет место резкий

рост интенсивности течения. Определена структура зон квазитвердого движения при различных величинах числа Релея. Сформулирован вариационный принцип, с помощью которого найдено пороговое значение  $Ra^*$ , при котором возникает конвекция в вязкопластической жидкости Шведова–Бингама в квадратной полости при нагреве сбоку. В работе [2] рассмотрено течение вязкопластической жидкости в полости прямоугольного сечения, где вертикальные границы поддерживаются при разных постоянных температурах, а на горизонтальных границах температура изменяется по линейному закону. Прослежен характер интенсивности движения в полости и эволюция зон квазитвердого движения в зависимости от числа Релея. В [3] сформулированы два вариационных принципа и с помощью численной минимизации соответствующих функционалов для числа Релея получены приближения сверху и снизу, обозначающие диапазон возникновения конвективного движения жидкости Шведова–Бингама в прямоугольных полостях при варьировании отношений сторон. Позднее эта же задача решалась в [4] для других отношений сторон полости. Здесь также вычислены пороговые значения параметров, при которых в жидкости возникает конвективное движение, и, как оказалось, они хорошо согласуются с опубликованными ранее в работе [2] результатами. Двумерные стационарные режимы тепловой конвекции в вязкопластической жидкости в прямоугольных полостях с различными соотношениями сторон при нагреве сбоку в рамках двухвязкостной модели, предложенной в работе [5], исследованы в [6, 7]. Получены зависимости числа Нуссельта от числа Бингама для различных размеров полости.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную плоскую задачу о конвекции в вязкопластической жидкости, движущейся в вертикальных прямоугольных полостях с отношением сторон  $A = L/H = 1/1; 1/2; 1/4$  при нагреве сбоку в поле силы тяжести (Рис. 1). Для описания свободной тепловой конвекции в жидкости будем использовать уравнения движения в приближении Буссинеска:

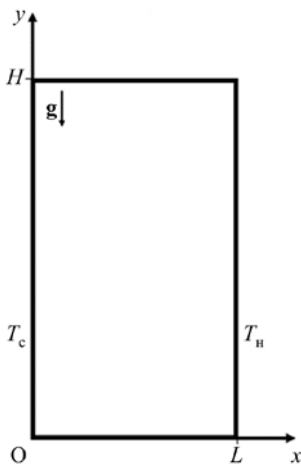


Рис. 1. Геометрия расчетной области

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right), \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) + \rho g \beta (T - T_c), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho u C_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v C_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \kappa \left( \frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь:  $u$  —  $x$ -компонента скорости;  $v$  —  $y$ -компонента скорости;  $\rho$  — плотность;  $p$  — давление;  $\mathbf{g}$  — гравитационное ускорение;  $\beta$  — коэффициент теплового расширения;  $C_p$  — удельная теплоемкость;  $T$  — температура;  $T_c$  — температура холодной стенки;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yy}$  — компоненты тензора вязких напряжений.

Для описания реологических свойств жидкости будем использовать уравнение Гершеля–Балкли [8]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mu_0 \boldsymbol{\gamma} \quad \text{при } \gamma < \gamma_0, \\ \boldsymbol{\tau} &= \left( \frac{\tau_0}{\gamma} + K \cdot \gamma^{n-1} \right) \boldsymbol{\gamma} \quad \text{при } \gamma > \gamma_0, \\ \gamma_0 &= \frac{\tau_0}{\mu_0}, \\ \gamma &= \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} : \boldsymbol{\gamma} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — тензор вязких напряжений,  $\boldsymbol{\gamma}$  — тензор скоростей деформации,  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига,  $\gamma_0$  — «предельная» скорость сдвига,  $\mu_0$  — «предельная» вязкость,  $K$  — коэффициент консистенции,  $n$  — показатель нелинейности. При малых скоростях сдвига ( $\gamma < \gamma_0$ ) вязкость жидкости  $\mu_0$  очень велика. Реологическая кривая, соответствующая уравнению Гершеля–Балкли для  $n = 1$ , изображена

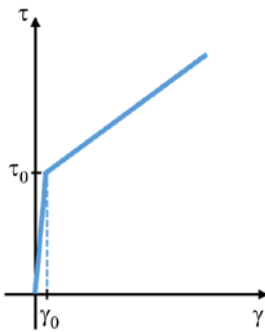


Рис. 2. Реологическая кривая жидкости Гершеля–Балкли для  $n=1$

на рисунке 2. В случае реологической модели Гершеля–Балкли в пределе ( $\gamma_0 \rightarrow 0$ ) она переходит в реологическую кривую для вязкопластической жидкости.

Все границы полости считаем твердыми и на них полагаем выполнение условий прилипания. На вертикальных границах полости задаем разные постоянные температуры  $T_n$  и  $T_c$ , а на горизонтальных границах рассматриваем температуру, изменяющуюся по линейному закону:

$$\begin{aligned} x=0: \quad u=0, \quad T=T_c, \\ x=L: \quad u=0, \quad T=T_n, \quad T_n > T_c, \\ y=0: \quad v=0, \quad T=\frac{T_n-T_c}{L}x+T_c, \\ y=H: \quad v=0, \quad T=\frac{T_n-T_c}{L}x+T_c. \end{aligned}$$

### 3. Метод численного исследования

Расчеты выполнялись с использованием пакета прикладных программ ANSYS Fluent. Для решения системы уравнений во Fluent выбрана схема дискретизации первого порядка точности (First Order Upwind). Полагался фиксированный шаг по времени, равный 0,1 с. Такой временной шаг выбран на основании выполнения условия устойчивости схемы и минимального времени, необходимого для проведения тестовых расчетов. Расчетные сетки строились с помощью генератора сеток ICEM CFD. Образующие ее квадратные ячейки имели линейный размер 0,1 мм. Апробированы сетки, состоящие из  $100 \times 100$ ,  $100 \times 200$  и  $100 \times 400$  ячеек. Величина шага по пространству определялась на основании предварительных расчетов на разных сетках и анализа сходимости решения при измельчении шага сетки.

Значение  $\tau_0$  взято из работы [1]. Для установления значения коэффициента консистенции проводились предварительные расчеты с разными  $K$  в диапазоне 0,01–0,1  $\text{кг} \cdot \text{с}^{n-2}/\text{м}$ . Выбрано такое значение  $K$ , которое позволяет точнее всего описать пороговый характер возникновения конвекции в жидкости Шведова–Бингама при нагреве сбоку.

Во всех расчетах задавались фиксированные материальные параметры жидкости и постоянная величина ускорения свободного падения:  $\rho = 998 \text{ кг/м}^3$ ;  $\beta = 0,0015 \text{ К}^{-1}$ ;  $C_p = 4183 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$ ;  $\kappa = 0,599 \text{ Вт/м} \cdot \text{К}$ ;  $\mu_0 = 10 \text{ кг/м} \cdot \text{с}$ ;  $\tau_0 = 0,000285 \text{ Н/м}^2$ ;  $n = 1,0$ ;  $K = 0,01 \text{ кг} \cdot \text{с}^{n-2}/\text{м}$ ;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ . Основные расчеты выполнены при  $\gamma_0 = 2,85 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$ . Проверочные расчеты, проведенные при  $\gamma_0 = 7,13 \cdot 10^{-6} \text{ 1/с}$ , дали очень близкие результаты (картины квазитвердых зон совпали в масштабе графика), что позволило считать правомерным использование для расчетов модели Гершеля–Балкли с  $\gamma_0 = 2,85 \cdot 10^{-5} \text{ 1/с}$ : она достаточно точно моделирует конвекцию в вязкопластической жидкости.

Следует отметить, что при расчетах в пакете ANSYS Fluent параметры имеют размерный вид. Именно размерные поля функции тока  $\Psi$  и компонент тензора вязких напряжений, а также максимальное значение функции тока  $\Psi_{\max}$  в полости в зависимости от безразмерного параметра — числа Релея  $Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu\chi}$  ( $\Delta T = T_n - T_c$ ,  $\nu$  — кинетическая вязкость,  $\chi$  — температуропроводность,  $L$  — геометрический размер полости), приведены далее (размерность функция тока в  $\text{кг/с}$  обусловлена тем, что во Fluent она представлена как ее отношение к плотности жидкости).

По найденным полям компонент тензора вязких напряжений определялись зоны квазитвердого движения. Как и в [1], критерием для выделения зон квазитвердого движения служило условие:

$$\sqrt{T_2} < \tau_0, \quad T_2 = (1/2)\tau_{ij}\tau_{ij},$$

где  $T_2$  — второй инвариант тензора вязких напряжений.

### 4. Результаты расчетов

Вычисления для выбранных значений отношения сторон  $A$  проведены при числах Релея в диапазоне  $Ra = 0 \dots 16000$ . Они показали, что для всех  $A$  и  $Ra$  в полости наблюдается одновихревое конвективное

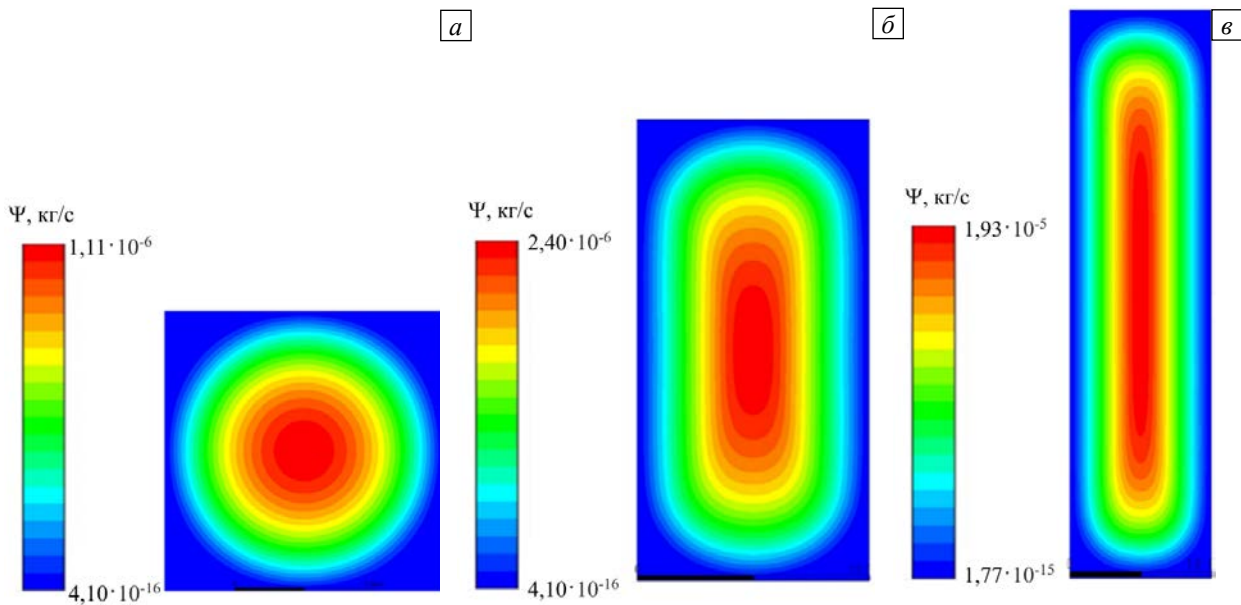


Рис. 3. Поля функции тока при значении числа Релея  $Ra = 5000$  и различных значениях отношения сторон полости  $A$ :  $1/1$  (а);  $1/2$  (б);  $1/4$  (в)

движение, направленное против часовой стрелки (см. Рис. 3 при фиксированном значении числа Релея).

На рисунке 4 представлены зависимости максимальных значений функции тока  $\Psi_{\max}$  от числа  $Ra$  также для различных значений геометрического параметра  $A$ . Как видно, во всех трех случаях при малых значениях числа Релея интенсивность движения близка к нулю; значения  $\gamma < \gamma_0$ . В предельном случае вязкопластической жидкости это означает полное отсутствие движения. После некоторого порогового значения числа Релея с его дальнейшим ростом происходит резкое увеличение интенсивности движения, что приводит к практически линейному росту  $\Psi_{\max}$ . Аналогичное поведение отмечалось в работах [1, 2]. Пороговые значения числа Релея, при переходе через которые происходит резкое повышение интенсивности движения, составляют: 6750 для  $A=1/1$ , 4900 для  $A=1/2$  и 4050 для  $A=1/4$ . При определении порогового значения  $Ra$  для каждого из отношений сторон критерием служило появление узкой замкнутой зоны сдвигового течения.

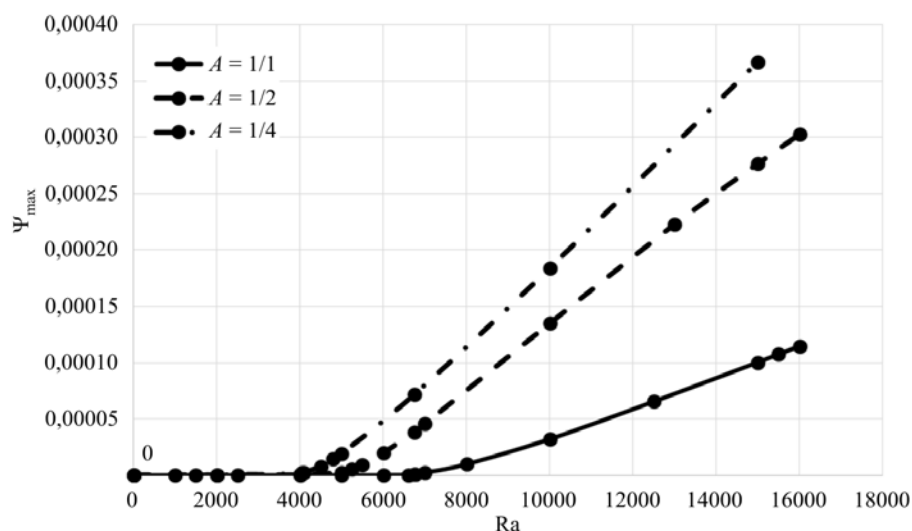


Рис. 4. Зависимость максимального значения функции тока от числа Релея

Для случая квадратной полости в [1] сформулирован вариационный принцип и на его основе получено аналитическое выражение, связывающее пороговое число Релея с безразмерным пределом текучести жидкости Шведова–Бингама. При выбранных в настоящей работе значениях параметров эта формула дает пороговое значение, равное  $Ra \approx 6355$ , а найденное численно и отвечающее жидкости Гершеля–Балкли пороговое значение составило  $Ra \approx 6750$ , что близко к приведенному выше значению для жидкости Шведова–Бингама.

В работе [3] сформулированы два вариационных принципа и с помощью численной минимизации соответствующих функционалов для значений числа Рейля получены приближения сверху и снизу, обозначающие диапазон возникновения движения жидкости Шведова–Бингама в прямоугольных полостях с отношениями сторон  $A=1/1; 1/2; 1/5$  при нагреве сбоку. В результате число Рейля изменяется: для квадратной полости от 5950 до 7740, для прямоугольной области при  $A=1/2$  от 4860 до 5750. Рассчитанные в настоящей работе для жидкости Гершеля–Балкли пороговые числа Рейля следующие: 6750 — для квадратной полости; 4900 — для прямоугольной полости с  $A=1/2$ . Оба значения находятся в интервале, приведенном в [3].

На рисунке 5 показана структура зон квазитвердого движения при различных числах Рейля для случая квадратной полости. Зонами квазитвердого движения считались области, в которых  $\sqrt{T_2}$  меньше предела текучести  $\tau_0$ . Внутри таких зон скорости сдвига стремятся к нулю, и жидкость движется фактически как твердое тело [1]. Квазитвердые зоны на этом и следующих рисунках закрашены серым цветом. Как видно, при  $Ra = 6500$  значение  $\sqrt{T_2}$  превышает предел текучести лишь в очень узких зонах вблизи середин границ полости (Рис. 5а). При  $Ra \approx 6750$  возникает узкая замкнутая зона сдвигового течения, примыкающая к границам полости (Рис. 5б). Дальнейшее увеличение числа Рейля приводит к уменьшению площади квазитвердых зон и изменению их формы. При  $Ra \approx 15000$  квазитвердая зона в центре полости, как и в [1] для жидкости Уильямсона, принимает форму креста (Рис. 5в). Форма зоны квазитвердого движения остается неизменной в процессе установившегося (стационарного) движения, что также согласуется с [1]. При  $Ra \approx 16000$  зона квазитвердого движения в центре полости исчезает, а в ее углах остаются застойные квазитвердые области.

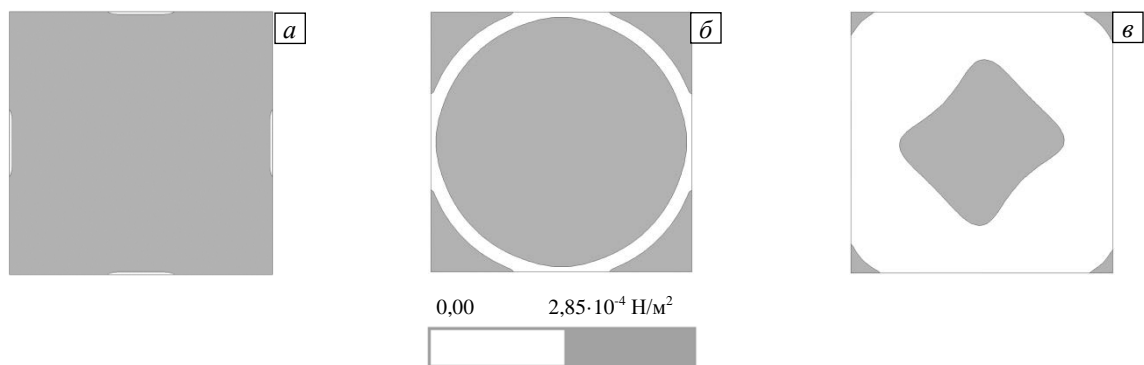


Рис. 5. Поле второго инварианта тензора вязких напряжений для квадратной полости при  $Ra$  : 6500 (а), 6750 (б), 15000 (в)

На рисунке 6 показана эволюция зон квазитвердого и сдвигового движений вязкопластической жидкости с повышением числа Рейля для прямоугольной полости с параметром  $A=1/2$ . Как видно, при  $Ra = 4800$  (Рис. 6а) параметр  $\sqrt{T_2}$  превышает предел текучести лишь в узких зонах вблизи середин границ полости, аналогично тому, как это происходит в квадратной полости (см. Рис. 5а).

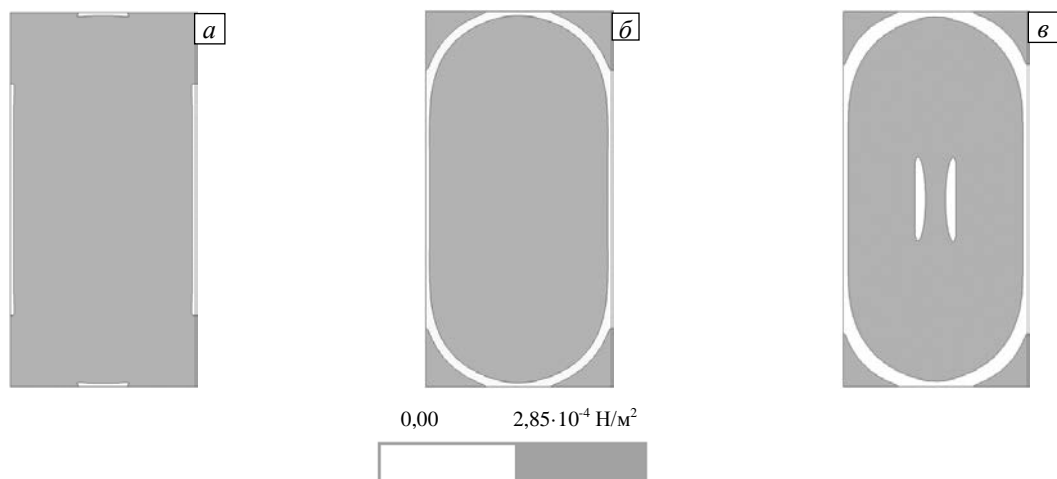


Рис. 6. Поле второго инварианта тензора вязких напряжений для прямоугольной полости с  $A=1/2$  при  $Ra$  4800 (а), 4900 (б), 5000 (в), 5250 (г), 6000 (д), 10000 (е)

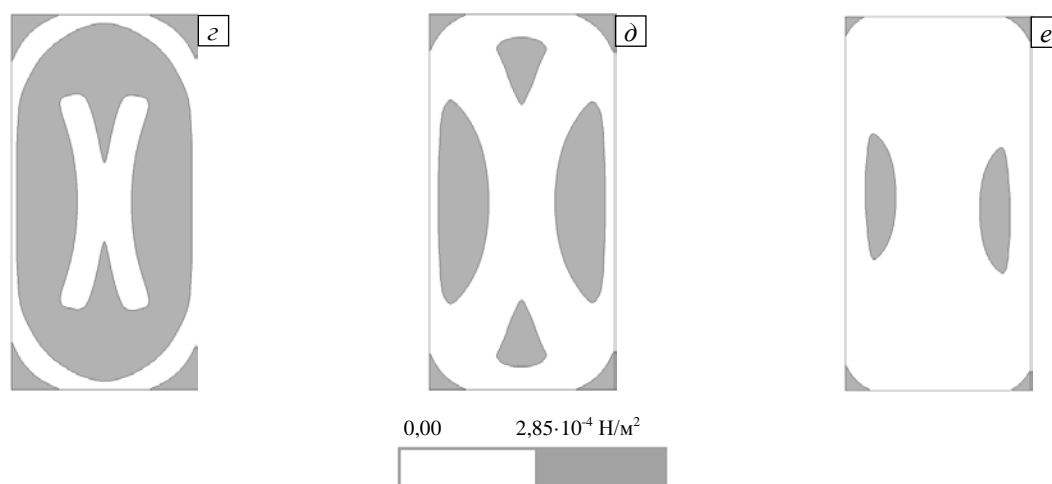


Рис. 6. Продолжение

При  $Ra \approx 4900$  (Рис. 6б) возникает узкая замкнутая зона сдвигового течения, примыкающая к границам полости, где  $\sqrt{T_2} > \tau_0$ , а центральную часть по-прежнему занимает квазитвердая зона, в которой  $\sqrt{T_2} < \tau_0$ . В углах наблюдаются квазитвердые застойные зоны, которые не исчезают полностью даже при больших числах  $Ra$ .

С ростом числа Рейля в центре зоны квазитвердого движения появляются две отдельных небольших жидких зоны (Рис. 6в), увеличивающиеся при повышении числа Рейля. Эти жидкие зоны соединяются и образуют одну X-образную зону (Рис. 6г), которая в диапазоне значений числа Рейля 5250...6000 сливается с кольцевой зоной сдвигового течения. Таким образом, квазитвердая зона в центре полости разбивается на 4 изолированные части (Рис. 6д). При  $Ra \approx 10^4$  квазитвердые зоны вблизи верхней и нижней границ полости исчезают, а оставшиеся зоны уменьшаются в размерах (Рис. 6е). При  $Ra \approx 2 \cdot 10^4$  наблюдаются только застойные области в углах полости.

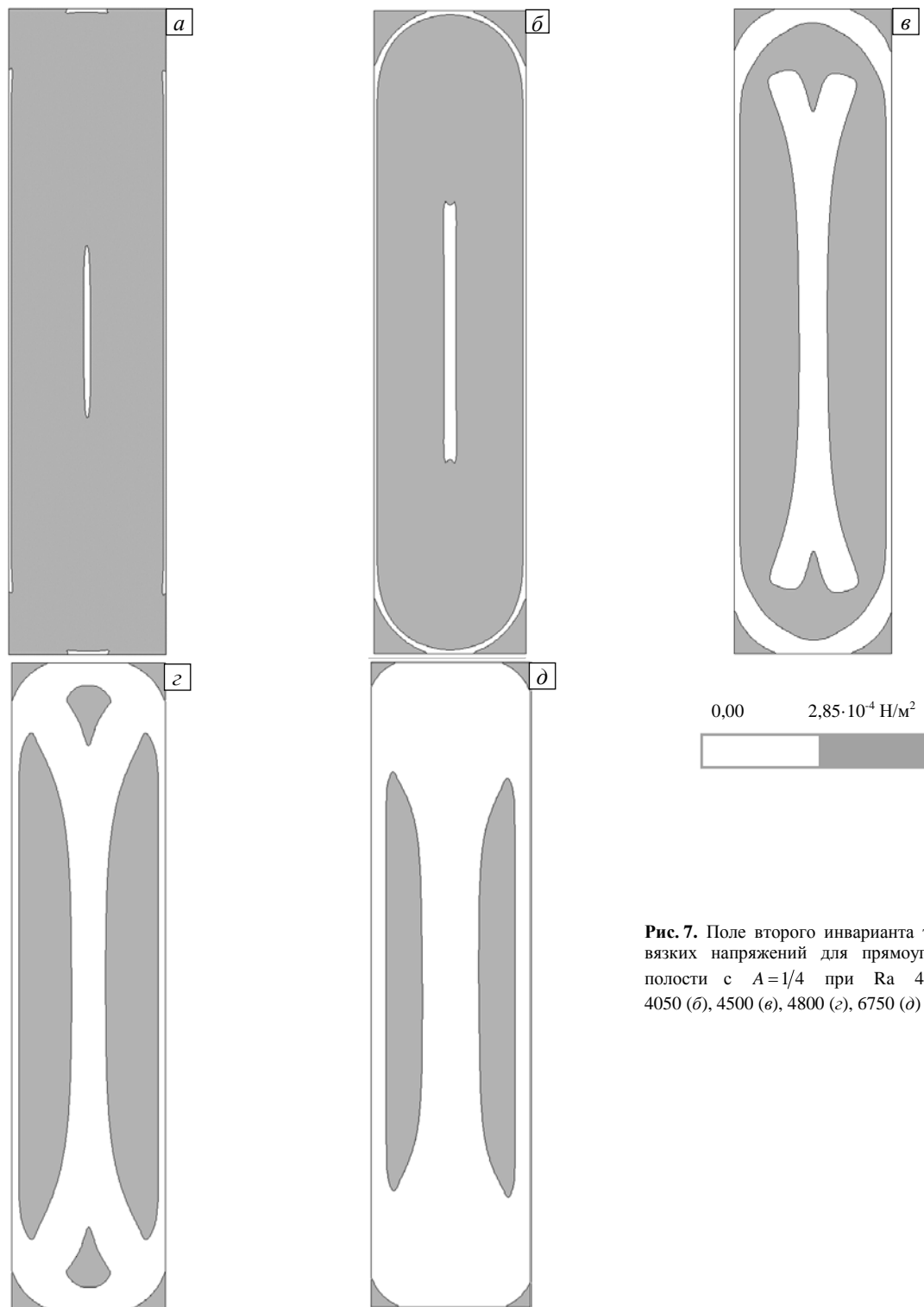
На рисунке 7 представлена эволюция зон квазитвердого движения с ростом числа Рейля для прямоугольной полости с  $A = 1/4$ . Расчеты показали, что при  $Ra < 4050$  (Рис. 7а, для  $Ra = 4000$ ), аналогично случаю с  $A = 1/2$  (см. Рис. 6а), вблизи середин границ полости возникают узкие жидкие зоны, где  $\sqrt{T_2} > \tau_0$ , но, в отличие от случая  $A = 1/2$ , одновременно с пристеночными жидкими зонами в центре полости появляется узкая вертикальная полоска жидкой зоны.

Когда  $Ra \geq 4050$  (Рис. 7б), вблизи границ полости возникает узкая замкнутая зона сдвигового течения, примыкающая к границам полости, жидкая зона в центре полости при этом становится больше. С ростом числа Рейля в центральной части полости, как и в случае с  $A = 1/2$  (Рис. 6г), формируется X-образная жидкая зона (Рис. 7в), которая при дальнейшем увеличении числа Рейля, аналогично случаю с  $A = 1/2$ , сливается с замкнутой зоной сдвигового течения вблизи границ полости. В центре полости формируются четыре изолированные квазитвердые зоны (Рис. 7г).

Структура квазитвердых зон, представленная на рисунках 6б и 7г, близка к пороговой структуре этих зон для жидкости Шведова–Бингама, полученной впервые с помощью вариационных методов в [3], и подтвержденной позднее численно [4–6].

При  $Ra \approx 6750$  квазитвердые зоны у верхней и нижней границ полости исчезают, подобно тому, как это происходит в прямоугольной полости с  $A = 1/2$ . При  $Ra \approx 2 \cdot 10^4$  перестают существовать и квазитвердые зоны у вертикальных границ полости и остаются лишь застойные зоны в углах полости. Таким образом, при увеличении вертикального размера полости эволюция зон квазитвердого и сдвигового движения вязкопластической жидкости с повышением значения числа Рейля приближается к той ситуации, которая имеет место в случае плоского вертикального слоя [9].

Полученные для различных отношений сторон картины квазитвердых зон при числах Рейля, незначительно превышающих пороговые значения (см. Рис. 5б,  $Ra \approx 6750$ ; 6б,  $Ra \approx 10000$ ; 7б,  $Ra \approx 4800$ ), близки к картинам, отвечающим пороговым картинам квазитвердых зон в жидкости Шведова–Бингама, установленным с помощью вариационных методов для квадратной полости в [1] и для прямоугольной полости в [3] и подтвержденным позднее для жидкости Шведова–Бингама в [4]. Однако в узких интервалах между значениями  $Ra$ , при которых в полости впервые появляются зоны, где  $\sqrt{T_2} > \tau_0$  (см. Рис. 5а,  $Ra \approx 6500$ ; 6а,  $Ra \approx 4800$ ; 7а,  $Ra \approx 4000$ ), и значениями  $Ra$ , соответствующими рисункам 5б, 6б, 7б, картины квазитвердых зон отличаются от картин, полученных ранее для жидкости Шведова–Бингама.



**Рис. 7.** Поле второго инварианта тензора вязких напряжений для прямоугольной полости с  $A=1/4$  при  $Ra$  4000 (а), 4050 (б), 4500 (в), 4800 (г), 6750 (д)

## 5. Заключение

В рамках модели Гершеля–Балкли исследовано конвективное течение вязкопластической жидкости в вертикальной прямоугольной полости при нагреве сбоку для трех разных отношений сторон. Для различных значений числа Релея получены поля функции тока, второго инварианта тензора вязких напряжений, а также зависимости максимального значения функции тока в полости от числа Релея.

Определены пороговые значения чисел Релея, при которых наблюдается резкий рост интенсивности движения. Для квадратной полости пороговое число Релея оказалось равным  $Ra \approx 6750$ , для полости с геометрическим параметром  $A=1/2$  —  $Ra \approx 4900$ , для  $A=1/4$  —  $Ra \approx 4050$ . Эти значения хорошо согласуются с результатами, полученными ранее другими авторами. При увеличении вертикального

размера полости пороговое значение числа Релея уменьшается и приближается к пороговой величине  $Ra \approx 3125$ , отвечающей предельному случаю  $A \rightarrow 0$  для жидкости Шведова–Бингама (см. [9]).

Численное моделирование показало, что структуры квазитвердых зон в жидкости Гершеля–Балкли при числах Релея, незначительно превышающих пороговые значения, близки к структурам, установленным ранее для вязкопластической жидкости Шведова–Бингама [1, 3, 4]. Однако в узких интервалах, где с одной стороны значения числа Релея, при которых в полости впервые появляются жидкие зоны, а с другой — числа Релея, соответствующие возникновению развитого конвективного течения в вязкопластической жидкости, структуры квазитвердых зон отличаются от структур для жидкости Шведова–Бингама. Это связано с тем, что поведение жидкостей Шведова–Бингама и Гершеля–Балкли качественно различно при напряжениях, меньших предела текучести: в жидкости Шведова–Бингама движение полностью отсутствует, а в жидкости Гершеля–Балкли имеется слабое конвективное движение.

## Литература

1. Любимова Т.П. Численное исследование конвекции вязкопластичной жидкости в замкнутой области // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. №1. С. 3-8. (English version <https://doi.org/10.1007/BF01074616>)
2. Любимова Т.П. О конвективных движениях вязкопластичной жидкости в прямоугольной области // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 5 С. 141-144. (English version <https://doi.org/10.1007/BF01409817>)
3. Любимов Д.В., Любимова Т.П. О применении вариационных принципов в задаче о конвекции вязкопластичной жидкости // Конвективные течения. 1979. Вып. 1. С. 81-86.
4. Vikhansky A. On the onset of natural convection of Bingham liquid in rectangular enclosures // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2010. Vol. 165. P. 1713-1716. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2010.09.003>
5. O'Donovan E.J., Tanner R.I. Numerical study of the Bingham squeeze film problem // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 1984. Vol. 15. P. 75-83. [https://doi.org/10.1016/0377-0257\(84\)80029-4](https://doi.org/10.1016/0377-0257(84)80029-4)
6. Turan O., Poole R.J., Chakraborty N. Aspect ratio effects in laminar natural convection of Bingham fluids in rectangular enclosures with differentially heated side walls // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2011. Vol. 166. P. 208-230. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2010.12.002>
7. Turan O., Chakraborty N., Poole R.J. Laminar Rayleigh-Bénard convection of yield stress fluids in a square enclosure // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2012. Vol. 171-172. P. 83-96. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2012.01.006>
8. Herschel W.H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen // Kolloid-Zeitschrift. 1926. Vol. 39. P. 291-300. <https://doi.org/10.1007/BF01432034>
9. Yang W.-J., Yeh H.-C. Free convective flow of Bingham plastic between two vertical plates // J. Heat Transfer. 1965. Vol. 87. P. 319-320. <https://doi.org/10.1115/1.3689104>

## References

1. Lyubimova T.P. Numerical investigation of convection in a viscoplastic liquid in a closed region. *Fluid Dyn.*, 1977, vol. 12, pp. 1-5. <https://doi.org/10.1007/BF01074616>
2. Lyubimova T.P. Convective motions of a viscoplastic fluid in a rectangular region. *Fluid Dyn.*, 1979, vol. 14, pp. 747-750. <https://doi.org/10.1007/BF01409817>
3. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. О примененii variatsionnykh printsipov v zadache o konveksii vyazkoplastichnoy zhidkosti [On application of variational principles to the problem of thermal convection of viscoplastic fluid] // Конвективные течения [Convective Flows], 1979, no. 1, pp. 81-86.
4. Vikhansky A. On the onset of natural convection of Bingham liquid in rectangular enclosures. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2010, vol. 165, pp. 1713-1716. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2010.09.003>
5. O'Donovan E.J., Tanner R.I. Numerical study of the Bingham squeeze film problem. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1984, vol. 15, pp. 75-83. [https://doi.org/10.1016/0377-0257\(84\)80029-4](https://doi.org/10.1016/0377-0257(84)80029-4)
6. Turan O., Poole R.J., Chakraborty N. Aspect ratio effects in laminar natural convection of Bingham fluids in rectangular enclosures with differentially heated side walls. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2011, vol. 166, pp. 208-230. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2010.12.002>
7. Turan O., Chakraborty N., Poole R.J. Laminar Rayleigh-Bénard convection of yield stress fluids in a square enclosure. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2012, vol. 171-172, pp. 83-96. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2012.01.006>
8. Herschel W.H., Bulkley R. Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollosungen [Consistency measurements of gum benzene solutions]. *Kolloid-Zeitschrift*, 1926, vol. 39, pp. 291-300. <https://doi.org/10.1007/BF01432034>
9. Yang W.-J., Yeh H.-C. Free convective flow of Bingham plastic between two vertical plates. *J. Heat Transfer.*, 1965, vol. 87, pp. 319-320. <https://doi.org/10.1115/1.3689104>

Поступила в редакцию 08.04.2021; после доработки 30.06.2021; принята к опубликованию 06.07.2021

## Сведения об авторах

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф., зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: lyubimovat@mail.ru

Казимарданов Максим Георгиевич, асп., ИМСС УрО РАН; e-mail: kazimardanov@mail.ru

Перминов Анатолий Викторович, дфмн., проф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, д. 29; e-mail: perminov1973@mail.ru