

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.3.28](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.28)

УДК 539.42

КРИТЕРИЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАЗРУШЕНИЯ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С КРАЕВОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА НА ГРАНИЦЕ СОЕДИНЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

В.Д. Кургузов^{1,2}, Н.В. Федорова^{1,3}¹Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация³Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация

Рассматривается распространение краевой трещины сдвига (II мода разрушения) в упругопластических материалах, разрушающихся при достижении предельной деформации. Критерий продвижения трещины сформулирован с помощью модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, включающей дополнительный параметр — поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). Для условий маломасштабной текучести при наличии сингулярной особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины задан двухпараметрический (сдвоенный) критерий квазихрупкого разрушения упругопластического материала. Сдвоенный критерий разрушения включает в себя деформационный и силовой критерии, при этом последний используется для оценки процесса разрушения в вершине модельной трещины. Протяженности исходной и модельной трещин отличаются на длину зоны предразрушения. Выполнена проверка применимости предложенного критерия прочности при определении разрушающих нагрузок для тел, содержащих краевые трещины поперечного сдвига на границе раздела двух сред. Построены диаграммы квазихрупкого разрушения для составной пластины с краевой трещиной в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния. Проведен анализ параметров, входящих в полученную модель квазихрупкого разрушения. Рекомендуется подбирать параметры модели по аппроксимированной диаграмме простого сдвига и критическому коэффициенту интенсивности напряжений. Численно найдены величины предельных нагрузок в упругопластических материалах для квазивязкого и вязкого типов разрушения. Методом конечных элементов решена задача вытяжки армирующего слоя из металлокомпозиата при квазистатическом нагружении, описан процесс распространения пластических деформаций в связующем. Показано, что полученные формы пластических зон существенно отличаются от известных классических представлений.

Ключевые слова: хрупкое, квазихрупкое, квазивязкое и вязкое разрушение, упругопластические материалы, предельная деформация

CRITERION FOR ELASTOPLASTIC FAILURE OF BIMETALLIC PLATE WITH EDGE CRACK OF TRANSVERSE SHEAR AT THE BOUNDARY OF THE MATERIALS JOINT

V.D. Kurguzov^{1,2} and N.V. Fedorova^{1,3}¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation²Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation³Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

The initiation of a transverse shear edge crack in elastoplastic materials with the limiting strain is considered. The crack propagation criterion is formulated using a modified Leonov–Panasyuk–Dugdale model using the additional parameter — the width of the plasticity zone. The coupled quasi-brittle fracture criterion for mode II cracks in an elastoplastic material is formulated under conditions of small-scale yield in the presence of a singular feature of the stress field in the vicinity of the crack tip. The coupled fracture criterion includes the deformation criterion, which is formulated at the crack tip, as well as the force criterion, which is formulated at the model crack tip. The lengths of the initial and model cracks differ by the length of the prefracture zone. The sequential analysis of the possibility of applying the proposed fracture criterion in determining the critical loads for solids containing edge cracks of transverse shear at the interface of different media is performed. Quasi-brittle fracture diagrams are constructed for a composite plate with an edge crack under plane strain and plane stress conditions. The analysis of the parameters included in the proposed model of quasi-brittle fracture is carried out. The model parameters are proposed to be selected by approximation of simple shear diagram and critical stress intensity factor. The critical loads were found numerically for the quasi-ductile and ductile fracture types. The finite element method is used to solve the problem of drawing out a reinforcing layer from a metal composite under quasi-static loading. The process of propagation of plastic zones in the vicinity of the crack tip is described consistently. It is shown that the shapes of the constructed plastic zones differ significantly from the well-known classical concepts.

Key words: brittle, quasi-brittle, quasi-tough and ductile fracture; elastoplastic materials, ultimate deformation

1. Введение

Неизбежное образование трещин является одним из самых важных факторов, вызывающих разрушение машиностроительных конструкций. Наиболее часто встречающиеся трещиноподобные дефекты располагаются в местах концентрации напряжений, как правило, в окрестности вершин вырезов, на границах отверстий, а в композитных материалах — по границе раздела сред. Поэтому построение простых, пригодных для инженерных расчетов аналитических моделей процесса разрушения материалов и конструкций и связанные с этим проблемы являются актуальными.

Преимущества и недостатки силовых и деформационных критериев разрушения обсуждаются в работах [1–5], причем все рассуждения ведутся только на основе однопараметрических локальных критериев

разрушения хрупких и квазихрупких материалов. Однако возможен другой взгляд на процесс разрушения, когда оно происходит по неклассической схеме разрушения, в которой, кроме двух его классических состояний материала (сплошного и разрушенного), принимается во внимание третье — промежуточное — состояние, отвечающее предразрушению с учетом накопления повреждений в окрестности концентраторов напряжений. При рассмотрении неклассической схемы разрушения напрашивается использование многопараметрических критериев разрушения [6–11].

Состояние механически напряженного материала находится между хрупким и вязким, различие между которыми, в механическом аспекте, определяется соотношением энергетических затрат на обратимые и необратимые явления деформирования. В связи с этим возникает необходимость в оценке состояния материала по двум критериям с непрерывным переходом от одного к другому. Построение двухпараметрического критерия разрушения дает возможность объединить области применимости однопараметрических критериев разрушения, которые отвечают различным предельным состояниям материала. Такой критерий может базироваться на однопараметрических критериях: силовом, деформационном, энергетическом и их комбинации [12–19].

В работах [20–22] предложен двухпараметрический (сдвоенный) интегральный критерий разрушения в упругопластическом материале и построены диаграммы разрушения плоских образцов при наличии в них острых внутренних трещин нормального отрыва (I мода разрушения). Простое представление зоны предразрушения в виде прямоугольника получено на основе модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла [23, 24], подхода Нейбера–Новожилова для материалов со структурой [25, 26]. При выполнении условий необходимости и достаточности критериев разрушения на плоскости «длина трещины–напряжения» построены критические кривые, разделяющие эту плоскость на три подобласти, соответствующие отсутствию разрушения, накоплению повреждений в зоне предразрушения и разделению образца на части. Подбор постоянных в аналитическом описании диаграмм разрушения квазихрупких материалов при наличии трещин осуществляется с использованием аппроксимации классической диаграммы «напряжение–деформация» исходного материала и критического коэффициента интенсивности напряжений (КИН). Следует отметить, что предложенный Легуилоном [3] сдвоенный критерий разрушения пригоден только при хрупком разрушении.

В данной статье двухпараметрический (сдвоенный) критерий прочности применяется для установления уровня критических нагрузок, необходимого для продвижения краевой трещины II типа в пластине из упругопластического материала. В основу предлагаемого подхода положены представления о том, что зарождению и росту трещин, независимо от температуры, предшествуют следующие процессы: упругое деформирование материала, переход в пластическое состояние, развитие пластических деформаций, исчерпание ресурса пластичности и собственно разрушение. Хладноломкость, которая является следствием снижения пластичности материала, определяется из статических испытаний. В ряде материалов при низкой температуре, помимо снижения пластичности, трещина способна пройти сквозь зерно, что также снижает трещиностойкость материала.

В предлагаемой модели используется неклассическая схема разрушения материала, когда наряду со сплошным и разрушенным состояниями рассматривается некоторое промежуточное состояние материала с накопленными повреждениями. Полученные в работе результаты дают возможность оценивать несущую способность конструкций с трещинами в более широком диапазоне условий нагружения, чем это позволяют делать однопараметрические критерии механики разрушения.

2. Постановка задачи

Наиболее часто встречающиеся трещиноподобные дефекты располагаются в композите по границе раздела сред, поэтому представляет интерес изучение его напряженно-деформированного состояния (НДС)

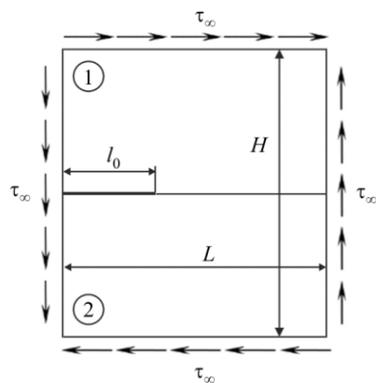


Рис. 1. Схема нагружения биметаллической пластины с краевой трещиной по линии раздела материалов

при распространении трещины поперечного сдвига. Пусть в составной кусочно-однородной биметаллической пластине шириной L и высотой H на плоской границе раздела двух материалов с номерами 1 и 2 имеется краевая трещина длиной l_0 (Рис. 1). Поверхность трещины свободна от нагрузок; на краях пластины задано постоянное касательное напряжение τ_∞ ; таким образом, реализуется II мода разрушения — разрушение в результате сдвига. Материалы пластины считаются идеальными упругопластическими с характеристиками: G_1, G_2 — модули сдвига; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона; τ_{y1}, τ_{y2} — пределы текучести при простом сдвиге.

Предположим, что плоская трещина поперечного сдвига распространяется прямолинейно. Кроме реальной трещины-разреза длиной l_0 введем в рассмотрение модельную трещину-разрез,

длина которой составляет: $l = l_0 + b$, при этом зона предразрушения длиной b расположена на продолжении реальной трещины. Задача о разрушении имеет два линейных масштаба: если средний диаметр зерна d определяется структурой материала, то второй линейный масштаб вырабатывается самой системой. Этим вторым линейным масштабом является длина зоны предразрушения b , которая изменяется в соответствии с тем, как меняются длина реальной трещины и интенсивность нагружения. Подчеркнем, что при однократном нагружении квазихрупких материалов критическая длина зоны предразрушения b^* — вполне конкретный параметр, входящий в формулу для определения критической длины макротрещины: $l^* = l_0 + b^*$.

Пусть в лабораторном эксперименте при испытании макрообразца на сдвиг получена $(\tau - \gamma)$ -диаграмма деформирования, где τ и γ — напряжения и деформации сдвига соответственно. Примем простейшую аппроксимацию реальной $(\tau - \gamma)$ -диаграммы исследуемого материала в виде двухзвенной ломаной линии. При такой аппроксимации исходный материал подменяется идеальным упругопластическим материалом,

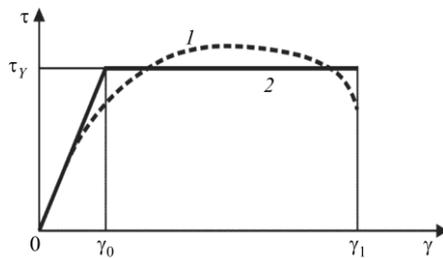


Рис. 2. Исходная $(\tau - \gamma)$ -диаграмма материала (кривая 1) и ее двухзвенная аппроксимация (кривая 2)

имеющим предельную деформацию. При достижении предельной деформации материал разрушается. На рисунке 2 изображены исходная $(\tau - \gamma)$ -диаграмма и ее двухзвенная аппроксимация. Параметры аппроксимации подбираются так, чтобы площади под кривыми 1 и 2 были равными. Кривая 2 полностью определяется следующими параметрами материала: G — модулем сдвига, τ_y — пределом текучести при сдвиге, γ_0 — максимальной упругой деформацией, γ_1 — предельной деформацией. Предел текучести и максимальная упругая деформация связаны соотношением: $\tau_y = G\gamma_0$. Аппроксимацию

$(\tau - \gamma)$ -диаграммы на участке $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$ можно трактовать как идеальную пластичность, а отношение $(\gamma_1 - \gamma_0)/\gamma_0$ как запас пластичности материала при монотонном сдвиге.

При квазихрупком разрушении принимается, что область нелинейных эффектов мала по сравнению с длиной трещины. Это позволяет считать, что размер этой области и интенсивность пластических деформаций в ней целиком контролируются коэффициентом интенсивности напряжений K_{II} и пределом текучести τ_y . Эта область настолько мала, что поле напряжений вокруг нее все еще описывается асимптотическими формулами [27]. Вид разрушения материала можно классифицировать по относительному размеру зоны предразрушения следующим образом: $b = 0$ — хрупкое, $b/l_0 \leq 1$ — квазихрупкое, $b/l_0 \approx 1$ — квазивязкое, $b/l_0 \geq 1$ — вязкое [20–22].

3. Модель разрушения Леонова–Панасюка–Дагдейла

Будем считать, что материалы 1 и 2, из которых изготовлена пластина, отличаются только разными пределами текучести при сдвиге: $\tau_{y1} < \tau_{y2}$, то есть рассматривается случай «почти» однородной пластины. Исследуем НДС вблизи вершины трещины и построим модель для описания расслоения композита, предполагая, что трещина при продвижении не меняет свое первоначальное прямолинейное направление. Пусть для регулярной структуры поликристаллического металлического материала d — ее характерный линейный размер (средний диаметр зерна, эффективный диаметр структур разрушения [22]). Подход Нейбера–Новожилова [25, 26] позволяет для сред со структурой использовать решения, имеющие сингулярную составляющую с интегрируемой особенностью.

При построении диаграмм квазихрупкого разрушения рассмотрим достаточные критерии разрушения [20–22] в широком диапазоне длин трещин. Так, для коротких трещин и трещин средней длины достаточный критерий можно представить в виде двух соотношений:

$$\frac{1}{d} \int_0^d \tau_{xy}(x) dx = \tau_y, \tag{1}$$

$$2u(-b^*) = \delta^*. \tag{2}$$

Здесь: $\tau_{xy}(x)$ — сдвиговые напряжения на продолжении модельной трещины в прямоугольной системе координат Oxy , причем начало координат совпадает с вершиной модельной трещины

в модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла [23, 24], а ось Ox направлена вдоль трещины (Рис. 3а); $2u = 2u(x)$ — полное поперечное смещение (разность смещений соответствующих точек) берегов модельной трещины ($x < 0$); δ^* — критическое поперечное смещение берегов трещины для однородного материала (при этом смещении за счет сдвига разрушается структура материала в вершине реальной трещины); b^* — критическая длина зоны предразрушения. По терминологии В.В. Новожилова [26] критерий разрушения (1) называется необходимым, а совокупность условий (1), (2) — достаточным критерием разрушения; критические величины, полученные согласно достаточному и необходимому критериям разрушения, помечены верхними значками * и 0 соответственно. Необходимость критерия (1) заключается в том, что он контролирует начало процесса разрушения, а совокупность критериев (1), (2) является достаточной, поскольку при выполнении обоих условий происходит окончательное разрушение образца. Обратим внимание на то, что предлагаемый критерий (1), (2) является сдвоенным: формулировка деформационного критерия разрушения (2) относится к вершине исходной трещины, а силового критерия (1) для касательных напряжений с учетом осреднения — к вершине модельной трещины.

На рисунке 3а показаны сдвиговые напряжения $\tau_{xy} = -\tau_y$, согласно модели Леонова–Панасюка–Дагдейла действующие на продолжении трещины, и аппроксимация пластической зоны (условно изображена как эллипс) в виде прямоугольной зоны предразрушения со сторонами a и b однородного ($\tau_{y1} = \tau_{y2}$) материала (Рис. 3б). Напряжения $\tau_{xy} = -\tau_y$ на берегах модельной трещины в зоне предразрушения, противоположные по знаку напряжениям $\tau_{xy} = \tau_\infty$ на гранях пластины, препятствуют раскрытию трещины в поперечном направлении. Зона предразрушения занимает только часть зоны пластичности.

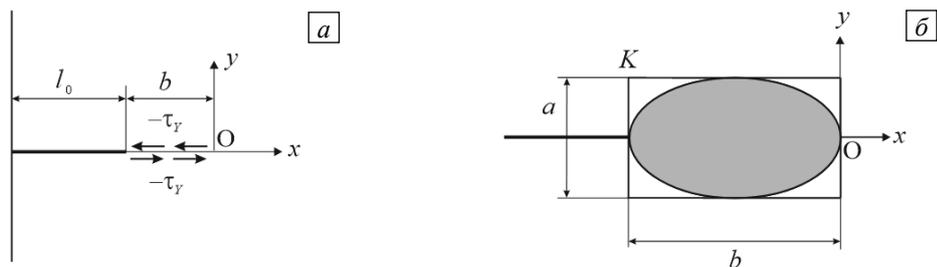


Рис. 3. Сдвиговые напряжения, действующие, согласно модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, на продолжении трещины (а); аппроксимация пластической зоны в виде прямоугольной зоны предразрушения однородного материала (б)

4. Диаграммы квазихрупкого разрушения биматериала

Поле сдвиговых напряжений $\tau_{xy}(x)$ на продолжении модельной трещины $x > 0$ можно представить в виде суммы двух слагаемых [28]:

$$\tau_{xy}(x) = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi x}} + \tau_{nom}. \quad (3)$$

Здесь: $\tau_{nom} = Y_r \tau_\infty$ — номинальные напряжения, иначе оценка регулярной части поля напряжений в окрестности вершины модельной трещины; $Y_r = Y_r(l/L)$ — поправочный коэффициент, учитывающий ширину пластины L ; $l = l_0 + b$; $K_{II} = K_{II\infty} + K_{IIb} > 0$ — суммарный КИН, где $K_{II\infty} > 0$ порождается заданными условиями испытаний, $K_{IIb} < 0$ — постоянными напряжениями $-\tau_y$, действующими в зоне предразрушения. Для определенности считаем напряжения τ_∞ и τ_{nom} положительными, а напряжения $-\tau_y$, действующие в зоне предразрушения, отрицательными. Слагаемые в соотношении (3) — сингулярная и регулярная части решения соответственно. В сдвоенном критерии равенство (1) контролирует процесс достижения осредненными напряжениями предела текучести τ_y , а равенство (2) описывает поперечный сдвиг в вершине реальной макротрещины.

Оценим сингулярные составляющие полей напряжений для краевых трещин. Так как деформирование материалов изучается в условиях маломасштабной текучести, то у образцов с краевыми трещинами для составляющих суммарного КИН имеем следующие представления [29]:

$$K_{II\infty} = Y_s \tau_\infty \sqrt{\pi l}, \quad Y_s = \sqrt{\frac{2L}{\pi l} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2L}}, \quad K_{IIb} = -\tau_y \sqrt{\pi l} \frac{2}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{b}{l}\right). \quad (4)$$

При рассмотрении квазихрупкого разрушения в условиях маломасштабной текучести с учетом приближения

$$b/l \approx 1, \quad (5)$$

для множителя $\arccos(1-b/l)$ в соотношении (4) с точностью до величин высшего порядка малости справедливо выражение: $\arccos(1-b/l) \approx \sqrt{2b/l}$. Окончательно упрощенная запись K_{Ib} будет следующей:

$$K_{\text{Ib}} = -2\tau_y \sqrt{\frac{2b}{\pi}}. \quad (6)$$

Поправочный коэффициент $Y_r = Y_r(l/L)$ примем в виде: $Y_r = L/(L-l)$, соответствующем допущениям, принятым в сопротивлении материалов. При $l \rightarrow L$ номинальные напряжения ведут себя так: $\tau_{\text{ном}} \rightarrow \infty$. Это отражает рост напряжений при уменьшении до нуля нетто-сечения при постоянной нагрузке. Для краевой трещины поперечного сдвига в полуплоскости оба коэффициента Y_s и Y_r тождественно равны единице.

В условиях маломасштабной текучести (5) при наличии в решении сингулярной составляющей и отбрасывании второстепенных слагаемых смещение берегов модельной трещины можно представить в виде [28]:

$$u(x) = \frac{\kappa+1}{4G} K_{\text{II}} \sqrt{\frac{-2x}{\pi}}, \quad x \leq 0, \quad (7)$$

где $G = \tau_y/\gamma_0$ — модуль сдвига однородного материала, κ — параметр вида напряженного состояния ($\kappa = 3-4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния).

Критическое смещение берегов модельной трещины δ^* в соотношении (2) зависит от запаса пластичности исследуемого материала ($\gamma_1 - \gamma_0$, см. Рис. 2) и ширины зоны предразрушения a в вершине реальной трещины. Будем вычислять его по формуле:

$$\delta^* = m(\gamma_1 - \gamma_0)a, \quad (8)$$

где m — поправочный коэффициент. Полагаем, что в случае локализованного пластического течения ширина зоны предразрушения a в соотношении (8) пропорциональна поперечнику зоны пластичности для трещины поперечного сдвига в идеально пластических телах. В приближенной постановке форма и размеры пластической зоны в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в однородном материале для плоской деформации с использованием критерия текучести Мизеса определяются соотношением [30]:

$$r_p(\theta) = \frac{K_{\text{II}\infty}^2}{4\pi\sigma_y^2} \left[\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cos^2 \theta + (1-2\nu)^2 (1-\cos \theta) \right]. \quad (9)$$

Здесь: r_p — радиус пластической зоны; θ — полярный угол; $\sigma_y = \sqrt{3}\tau_y$ — предел текучести при одноосном деформировании. Для плоского напряженного состояния форму пластической зоны легко установить из (9), полагая $\nu = 0$. На рисунке 4 показаны границы пластических зон, построенные в безразмерных переменных $4\pi\sigma_y^2 r_p(\theta)/K_{\text{II}\infty}^2$, в окрестности вершины трещины поперечного сдвига для однородного материала ($\tau_{y1} = \tau_{y2}$) и биматериала. Предполагается, что при $\tau_{y1} < \tau_{y2}$ пластическая зона в точности равна половине пластической зоны однородного материала.

Полагая в (9) $\theta = \pi/2$, для однородного материала при плоской деформации получаем:

$$a = 2r_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{K_{\text{II}\infty}^2}{4\pi\sigma_y^2} \left[3 + 2(1-2\nu)^2 \right] = \frac{K_{\text{II}\infty}^2}{12\pi\tau_y^2} \left[3 + 2(1-2\nu)^2 \right] = \frac{\chi}{\pi} \left(\frac{K_{\text{II}\infty}}{\tau_y} \right)^2, \quad (10)$$

где $\chi = \left[3 + 2(1-2\nu)^2 \right]/12$. Для односторонней зоны пластичности величину a в (10) следует уменьшить вдвое. Плоское напряженное состояние следует из (10) при $\nu = 0$. Критический сдвиг берегов модельной

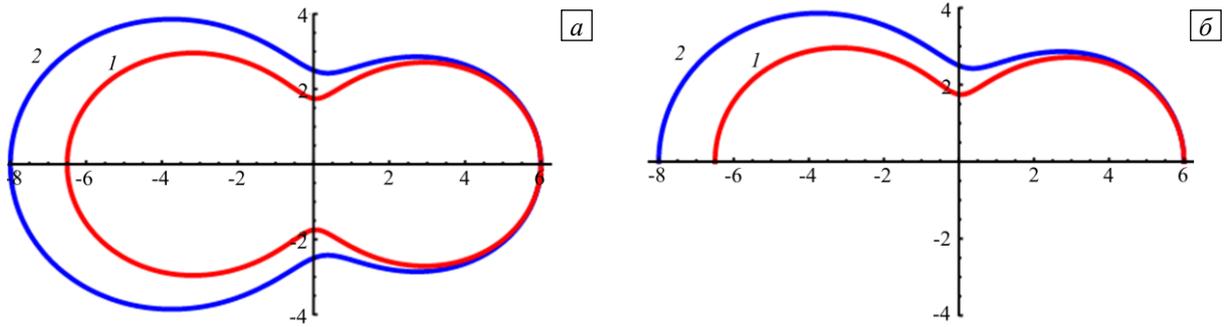


Рис. 4. Границы пластических зон (по критерию Мизеса) в окрестности вершины трещины поперечного сдвига в однородном материале (а) и односторонняя зона пластичности в биматериале (б); плоская деформация при $\nu = 0,25$ (кривая 1), плоское напряженное состояние (2)

трещины δ^* в соотношении (8) подобран так, что материал в вершине реальной трещины разрушается в случае, когда достигается предельная деформация материала γ_1 .

Оценим критическое состояние материала в вершине трещины. В соотношениях (3), (4), (6)–(8), (10) имеются все необходимые аналитические выражения для применения достаточного (сдвоенного) критерия (1), (2). Осуществляя в (1) интегрирование, находим:

$$K_{II} = (\tau_y - Y_r \bar{\tau}_\infty^*) \sqrt{\frac{\pi d}{2}}. \quad (11)$$

Подставляя (7), (8), (10) в (2), получаем:

$$\frac{\kappa+1}{2G} K_{II} \sqrt{\frac{2b^*}{\pi}} = m(\gamma_1 - \gamma_0) \frac{\chi}{\pi} \left(\frac{K_{II\infty}}{\tau_y} \right)^2. \quad (12)$$

Преобразуем (11), используя для КИН $K_{II} = K_{II\infty} + K_{IIb}$ соотношения (4):

$$Y_s \bar{\tau}_\infty^* \sqrt{\frac{2l^*}{d}} - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2l^*}{d}} \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} = 1 - Y_r \bar{\tau}_\infty^*. \quad (13)$$

Здесь $\bar{\tau}_\infty^* = \tau_\infty^*/\tau_y$ — безразмерные критические напряжения в пластине. Учитывая, что $G = \tau_y/\gamma_0$, из (12) получаем:

$$\left(Y_s \bar{\tau}_\infty^* - \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} \right) \sqrt{\frac{2b^*}{l^*}} = \frac{2m\chi}{\kappa+1} \bar{\gamma}_{II} (Y_s \bar{\tau}_\infty^*)^2, \quad (14)$$

где $\bar{\gamma}_{II} = (\gamma_1 - \gamma_0)/\gamma_0$ — параметр, характеризующий запас пластичности при сдвиге. После раскрытия скобок в левой части уравнения (14) появляется множитель b^*/l^* , который, в силу неравенства (5), можно отбросить как величину более высокого порядка малости по сравнению с $\sqrt{b^*/l^*}$. В результате в системе уравнений (13), (14) останутся слагаемые с множителем $\sqrt{b^*/l^*}$.

Решая систему уравнений (13), (14), находим аналитические выражения безразмерной критической длины зоны предразрушения $\bar{b}^* = b^*/l^*$ и безразмерной критической нагрузки $\bar{\tau}_\infty^* = \tau_\infty^*/\tau_y$:

$$\bar{b}^* = 2 \left(\frac{m\chi}{\kappa+1} \bar{\gamma}_{II} Y_s \bar{\tau}_\infty^* \right)^2, \quad (15)$$

$$\bar{\tau}_\infty^* = \left[Y_r + \left(1 - \frac{4m\chi}{\pi(\kappa+1)} \bar{\gamma}_{II} \right) Y_s \sqrt{2l^*} \right]^{-1}, \quad (16)$$

где $\bar{l}^* = l^*/d$ — безразмерная критическая длина трещины. Из условия ограниченности предельной нагрузки $\bar{\tau}_\infty \leq 1$ следует, что в (16) выражение в круглых скобках должно быть положительным. В итоге получаем ограничение на запас пластичности материала:

$$\bar{\gamma}_{II} < \frac{\pi(\kappa + 1)}{4m\chi} = \gamma_m. \tag{17}$$

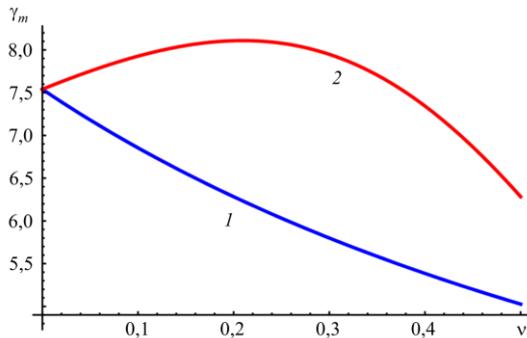


Рис. 5. Зависимость γ_m (17) от коэффициента Пуассона ν в случае плоского напряженного состояния (кривая 1), при плоской деформации (2)

Неравенство (17) — ограничение, при котором существует квазихрупкое разрушение в условиях маломасштабной текучести однородного материала в зоне предразрушения. На рисунке 5 представлена зависимость γ_m от коэффициента Пуассона для плоского напряженного состояния (кривая 1) и плоской деформации (кривая 2) при значении поправочного коэффициента $m = 1$. Как видно из представленных графиков, кривая 1 проходит ниже кривой 2 при любом $0 < \nu \leq 0,5$. Учитывая диапазон изменения параметров κ и χ , находим, что для любого ν при плоской деформации и плоском напряженном состоянии должно выполняться неравенство $\bar{\gamma}_{II} \leq 5,027$.

В пределе при $\gamma_1 \rightarrow \gamma_0$ из соотношения (16) следует выражение, соответствующее необходимому критерию разрушения:

$$\bar{\tau}_\infty^0 = \left(Y_r + Y_s \sqrt{2\bar{l}_0} \right)^{-1}. \tag{18}$$

Здесь: $\bar{\tau}_\infty^0 = \tau_\infty^0 / \tau_Y$ — безразмерная критическая нагрузка; $\bar{l}_0 = l_0 / d$ — безразмерная длина исходной трещины. Соотношение (18) описывает хрупкое разрушение материалов. Очевидно, что $\bar{\tau}_\infty^0 < \bar{\tau}_\infty^*$ при $l_0 < l^*$.

Эффективный диаметр структуры разрушения d для достаточно длинных трещин находится по формуле [12]:

$$d = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IIc}}{\tau_Y} \right)^2, \tag{19}$$

где K_{IIc} — критический КИН при разрушении по II моде. Если в двух лабораторных экспериментах получены критический КИН K_{IIc} и классическая $(\tau - \gamma)$ -диаграмма (точнее ее аппроксимация), то по трем параметрам — d , τ_Y , $\bar{\gamma}_{II}$, в широком диапазоне изменения длин трещин можно построить две критических кривых: $\bar{\tau}_\infty^0 = \bar{\tau}_\infty^0(\bar{l}_0, \bar{L})$, $\bar{\tau}_\infty^* = \bar{\tau}_\infty^*(\bar{l}^*, \bar{L})$, которые зависят от длин трещин \bar{l}_0 , \bar{l}^* и безразмерной ширины пластины $\bar{L} = L/d$.

Совместим плоскости $(\bar{l}_0, \bar{\tau}_\infty^0)$ и $(\bar{l}^*, \bar{\tau}_\infty^*)$ и в координатах «длина трещины–напряжение» $(\bar{l}, \bar{\tau}_\infty)$, где $\bar{l} = l/d$, $\bar{\tau}_\infty = \tau_\infty / \tau_Y$, построим диаграммы квазихрупкого разрушения биметаллической пластины (далее образец). Пусть задана интенсивность нагружения $\bar{\tau}_\infty$. Тогда диаграмма квазихрупкого разрушения позволяет оценить состояние тела с трещиной. Две критических кривых — $\bar{\tau}_\infty^0$ и $\bar{\tau}_\infty^*$, разделяют плоскость $(\bar{l}, \bar{\tau}_\infty)$ на три части: подобласть $\bar{\tau}_\infty < \bar{\tau}_\infty^0$, где отсутствуют повреждения; подобласть $\bar{\tau}_\infty^0 < \bar{\tau}_\infty < \bar{\tau}_\infty^*$, где в материале имеет место накопление повреждений зоны предразрушения; подобласть $\bar{\tau}_\infty > \bar{\tau}_\infty^*$, где разрушение происходит при монотонном нагружении.

На рисунке 6 изображены безразмерные критические напряжения $\bar{\tau}_\infty^0 = \bar{\tau}_\infty^0(\bar{l}_0, \bar{L})$ (кривые 1–5) и $\bar{\tau}_\infty^* = \bar{\tau}_\infty^*(\bar{l}^*, \bar{L}, \bar{\gamma}_{II})$ (кривые 1'–5') образцов с краевой трещиной в двойных логарифмических координатах.

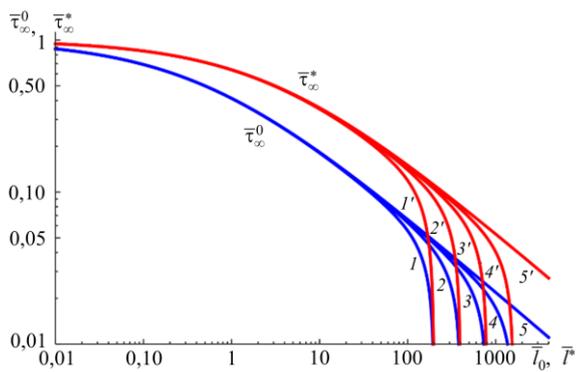


Рис. 6. Диаграммы квазихрупкого разрушения

При конкретной реализации расчетов выбирались параметры $\bar{L} = 200, 400, 800, 1600, \infty$ для пар кривых $1-1', 2-2', 3-3', 4-4', 5-5'$ соответственно и $4m\chi\bar{\gamma}_{II}/(\pi(\kappa+1)) = 0,6$. Пары кривых $1-1', 2-2', 3-3', 4-4', 5-5'$ представляют диаграммы квазихрупкого разрушения для рассматриваемого типа образца, изготовленного из однородного материала.

Таким образом, получены формулы для вычисления критической разрушающей нагрузки (16) и через нее критической длины зоны предразрушения (см. (15)). Эти выражения пригодны как для однородных, так и для «почти» однородных образцов, когда материалы 1 и 2

верхней и нижней половин пластины отличаются только пределами текучести при сдвиге $\tau_{Y1} < \tau_{Y2}$, а модули сдвига, коэффициенты Пуассона и характерные линейные размеры структур материалов у них одинаковы. Предполагается, что в таком биматериале в условиях пластичности находится лишь один — наиболее слабый — компонент, и в качестве поперечника зоны предразрушения в биматериале приближенно выбирается характерная для него ширина зоны предразрушения. В этом случае в формулах (15)–(17) следует положить $\chi = \left[3 + 2(1 - 2\nu)^2 \right] / 24$.

Рассмотрим краевую трещину на линии соединения двух разнородных материалов с упругими константами G_1, ν_1 (верхняя половина), G_2, ν_2 (нижняя половина) и пределами текучести при сдвиге $\tau_{Y1} < \tau_{Y2}$. Тогда при действии как чистого растяжения (I мода), так и чистого сдвига (II мода) на продолжении трещины в сплошном теле будут возникать касательные и нормальные напряжения (I+II мода). Вследствие этого при построении критерия разрушения для разнородных материалов необходимо учитывать оба коэффициента интенсивности напряжений K_I и K_{II} , в отличие от однородной среды [31–34]. Полученные в [34] выражения компонент напряжений являются хорошим приближением для описания поведения составного тела, исключение составляют области, расположенные вблизи вершин трещины. Однако в предложенные в [33] выражения для коэффициентов K_I и K_{II} входит логарифм длины трещины, поэтому при их подстановке в соответствующие выше уравнения результаты будут нефизичными.

С практической точки зрения более подходящим при расчетах на прочность конструкций в условиях упругопластической деформации представляется такой параметр, как скорость высвобождения упругой энергии, который идентичен J -интегралу Райса–Черепанова [35, 36]. J -интеграл часто применяется как параметр разрушения [37]. Выражение J -интеграла через коэффициенты интенсивности напряжений имеет следующий вид [38]:

$$J = \frac{1}{16} \left[\frac{1 + \kappa_1}{G_1} + \frac{1 + \kappa_2}{G_2} \right] K \bar{K}, \quad (20)$$

где $K = K_I - iK_{II}$ — комплексный КИН, надчеркивание обозначает комплексно-сопряженную величину. В [39] введено понятие эквивалентного КИН: $K_e = \sqrt{K \bar{K}}$, с помощью которого установлено, что в широком диапазоне изменения отношения G_1/G_2 эквивалентный КИН K_e отличается от K_{II} меньше, чем на 4,5% для плоской деформации, и меньше, чем на 5,1% для плоского напряженного состояния. Поэтому и в случае разнородных материалов можно считать выполненными с погрешностью до 5% соотношения (15)–(18), что с инженерной точки зрения вполне приемлемо. Для расчетов следует выбирать характеристики материала с меньшим пределом текучести.

5. Компьютерное моделирование

Приближенная постановка задачи локализованного пластического течения формулируется в рамках линейной механики разрушения и подразумевает, что решение в упругой области описывается только главными членами асимптотического разложения в окрестности вершины трещины (3), решение в пластической зоне вообще не рассматривается, а граница локализованного пластического течения (9) определяется на основании упругого поля напряжений и выбранного критерия текучести. Поскольку здесь

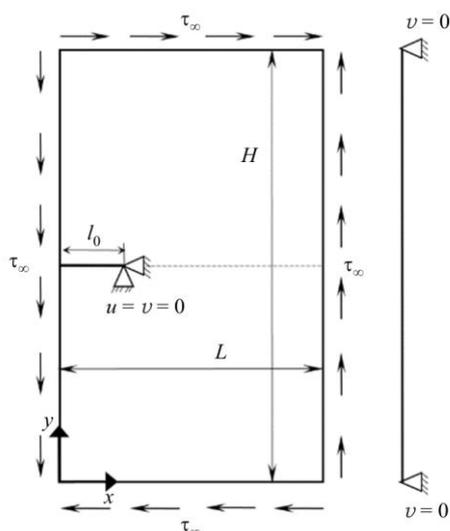


Рис. 7. Схема закрепления и нагружения пластины при простом сдвиге

вообще ни о какой попытке упругопластического анализа не идет речь, то ясно, что получаемые результаты, далеки от реальности и не могут дать надежных оценок формы и размеров пластической зоны [20].

Воспользуемся методом конечных элементов для численного моделирования реальной формы пластической зоны, распространяющейся по границе раздела двух материалов. Рассмотрим пластину шириной $L = 25$ мм (ось Ox), длиной $H = 50$ мм с плоской краевой трещиной длиной $l_0 = 5$ мм. Пластина деформируется в условиях простого сдвига под действием касательного напряжения τ_∞ , приложенного к граням H и граням L пластины во встречных направлениях, как показано на рисунке 7. Предполагаются выполненными условия плоского деформирования. Краевая трещина расположена на одинаковом расстоянии от коротких граней, а ее фронт параллелен оси Ox . Кинематические граничные условия на гранях H с координатами $y = 0$ и $y = 50$ заданы как $v = 0$, а в вершине трещины с координатами $y = 25$, $x = 5$ граничные условия имеют вид $u = v = 0$ для однородной

пластины (показаны на Рис. 7) и $u = 0$, если она биметаллическая.

Задача решена в двух вариантах: а) материал пластины считался однородным с модулем Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$, пределом текучести при одноосном растяжении $\sigma_y = 400$ МПа и, следовательно, с пределом текучести на сдвиг $\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3} = 230,94$ МПа, приложенная нагрузка равнялась $\tau_\infty = 200$ МПа; б) биметаллическая пластина с трещиной на границе раздела, упругие характеристики материалов были одинаковыми, различались только пределы текучести: $\sigma_{y1} = 200$ МПа, $\sigma_{y2} = 400$ МПа, действовала нагрузка $\tau_\infty = 100$ МПа.

Расчетная область равномерно разбивалась на 80 000 8-узловых прямоугольных элементов с квадратичной аппроксимацией перемещений. Производилось сгущение сетки конечных элементов к оси трещины с целью наиболее точного определения формы и размеров пластической зоны. У оси трещины элементы имели размер (длину стороны) 0,1 мм. В процессе нагружения внешняя нагрузка монотонно возрастала от нуля до τ_∞ за 100 шагов по времени. При уровнях нагружения $\bar{\tau} = \tau_\infty / \tau_y > 0,5$ в окрестности вершины трещины возникали большие пластические деформации, поэтому задача решалась на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейности [40]. Расчет НДС выполнялся в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2018 [41] с опцией largestrain.

Вычисленные пластические зоны в однородной пластине при плоской деформации показаны на рисунке 8. Приведено распределение эквивалентных пластических деформаций $\epsilon^p = \sqrt{2\epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p} / 3$ (ϵ_{ij}^p — компоненты тензора пластических деформаций) при разных уровнях нагружения.

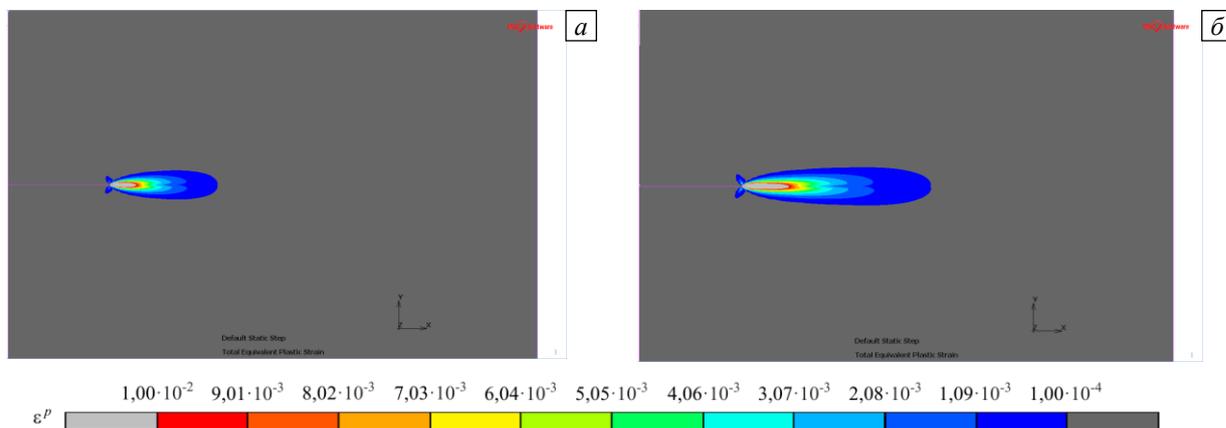


Рис. 8. Формы пластических зон в однородной пластине в условиях плоского деформирования при разной действующей нагрузке $\bar{\tau}$: 0,76 (а); 0,86 (б); 0,91 (в); 0,93 (г)

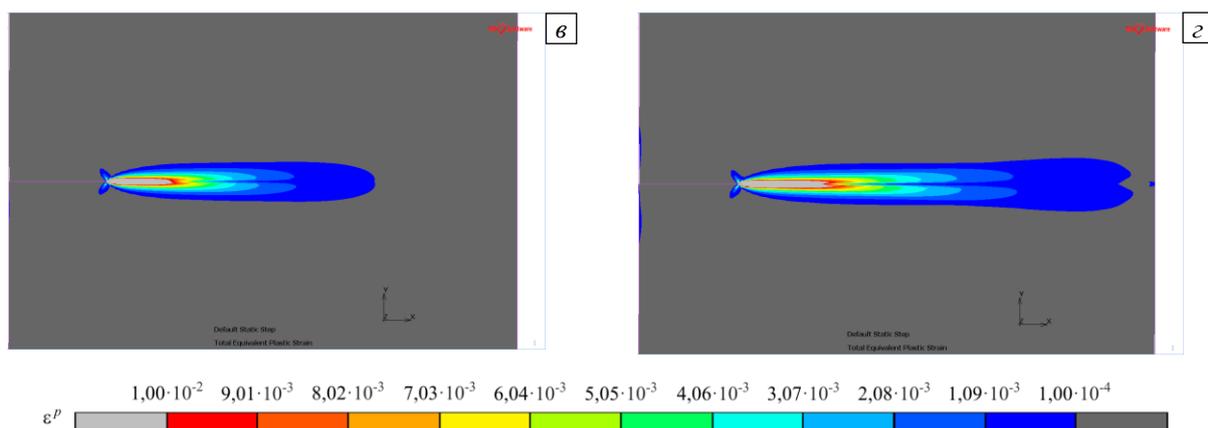
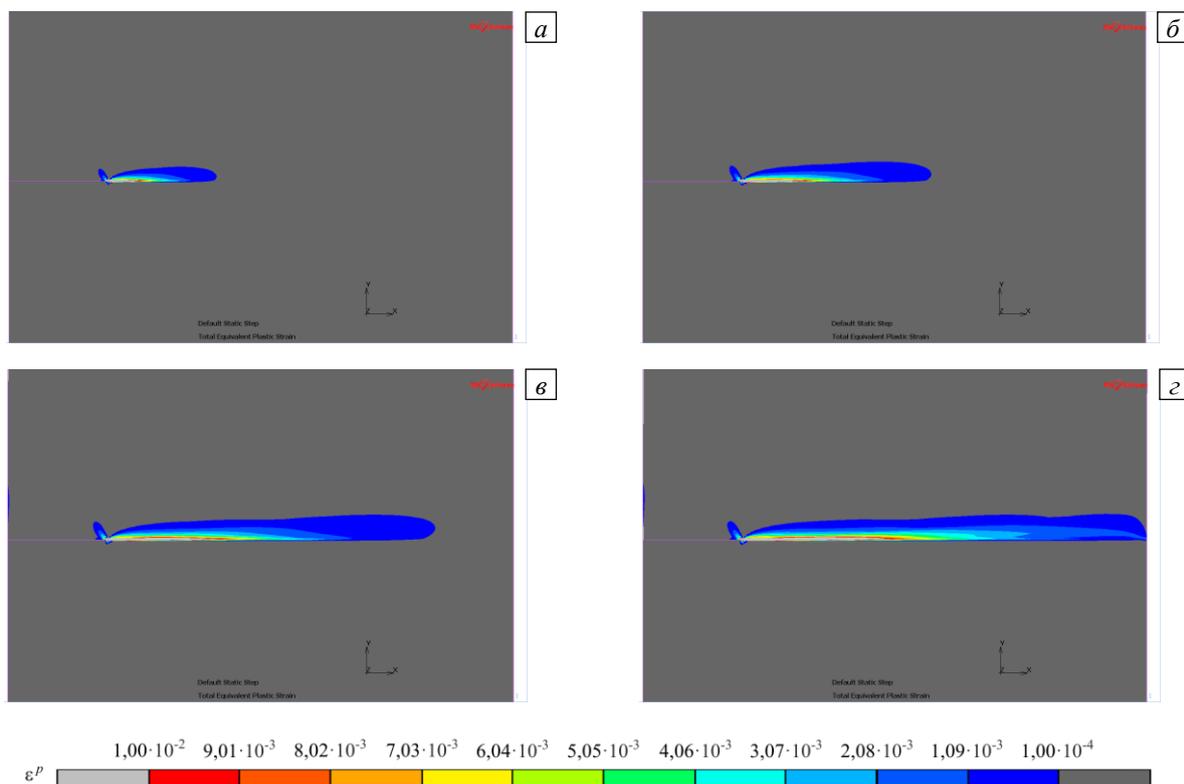


Рис. 8. Продолжение

Рис. 9. Формы пластических зон в биметаллической пластине при плоской деформации и разных уровнях нагружения $\bar{\tau}$: 0,785 (а), 0,885 (б), 0,938 (в), 0,94 (г)

На рисунке 9 представлено распределение эквивалентных пластических деформаций в биметаллической пластине в условиях плоского деформирования при разных уровнях нагружения $\bar{\tau}$.

Для более детальной прорисовки распределения эквивалентных пластических деформаций ε^p области на рисунках 8, 9, ограниченные контурными линиями, отвечают диапазону значений $10^{-4} \div 10^{-2}$. Трещина находится слева от пластической зоны, область пластических деформаций, превышающих 0,01, расположена прямо перед вершиной трещины. По мере увеличения нагрузки пластическая зона вытягивается в направлении оси трещины и становится более полой. При $\bar{\tau} = 0,94$ она достигает правого края пластины.

В таблице приведены длины b и поперечники a пластической зоны при простом сдвиге в условиях плоского деформирования под действием различной нагрузки для пластины из однородного и биметаллического материалов, полученные в результате численного решения. Поперечник a определялся как максимальная ширина пластической зоны на продолжении трещины, длина этой зоны b показана на рисунке 3б. По результатам видно, что поперечник трещины в биметаллической пластине примерно в 2 раза меньше чем в пластине из однородного материала.

Таблица. Установленные в численных расчетах размеры пластической зоны при простом сдвиге в условиях плоской деформации для пластин из однородного и биметаллического материала

Однородная пластина			Биметаллическая пластина		
$\bar{\tau}$	b , мм	a , мм	$\bar{\tau}$	b , мм	a , мм
0,76	4,90	1,43	0,785	5,30	0,72
0,86	8,65	1,81	0,885	9,30	0,97
0,91	13,00	1,95	0,938	16,10	1,04
0,93	18,80	1,95	0,940	20,00	1,04

Результаты численного расчета отображают реальную форму пластической зоны для пластины из однородного материала в виде узкого вытянутого симметричного «кувшина» с «шейкой» в окрестности вершины трещины, а для биметаллической пластины пластическая зона аналогичной формы является односторонней и расположена в области, соответствующей материалу с меньшим пределом текучести.

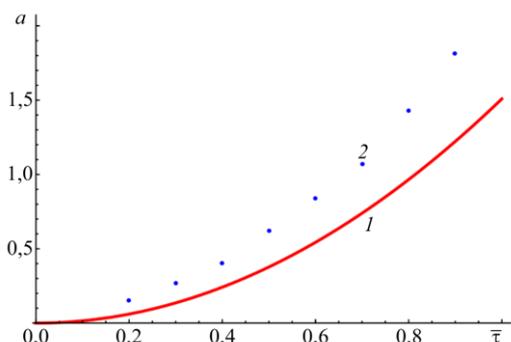


Рис. 10. К сравнению зависимости от нагрузки $\bar{\tau}$ размера поперечника пластической зоны a , полученного по формуле (10) (кривая 1) и установленного численно (2)

лабораторного эксперимента. На рисунке 10 представлены зависимости размера поперечника пластической зоны a от нагрузки $\bar{\tau}$. Одна из них вычислена по формуле (10) (кривая 1), другая построена по данным численного расчета. В условиях маломасштабного пластического течения ограничение (5) выполняется при нагрузках $\bar{\tau} < 0,3$. Из сравнения аналитических значений с численными в этом диапазоне нагрузок получаем приближенную величину поправочного коэффициента: $m \approx 2$.

6. Задача вытяжки армирующего слоя из металлокомпозита

Исследуем процесс отслоения арматуры от матрицы при выдергивании арматуры из композита. В работах [44, 45] при изучении динамических процессов глубокой вытяжки (заглубления) металлических композитов с дискретными волокнами при динамическом импульсном воздействии на арматуру построена математическая модель движения жесткопластического стержня в среде с сопротивлением. Рассмотрим аналогичную задачу в квазистатической постановке. Схема нагружения композитной пластины представлена на рисунке 11. Предполагаются выполненными условия плоской деформации. В силу симметрии расчетной области (штрихпунктирная линия) моделируется ее половина. Здесь: длина пластины $L = 50$ мм; толщина 10 мм; ширина связующего (алюминия — А) $H = 25$ мм; ширина арматуры (стали — S) $h = 5$ мм. Имеется участок расслоения — краевая трещина длиной $l_0 = 5$ мм. К торцу армирующего слоя (волокна) приложена распределенная нагрузка F . Для системы «матрица–арматура» рассматривается идеальная упругопластическая модель со следующими характеристиками:

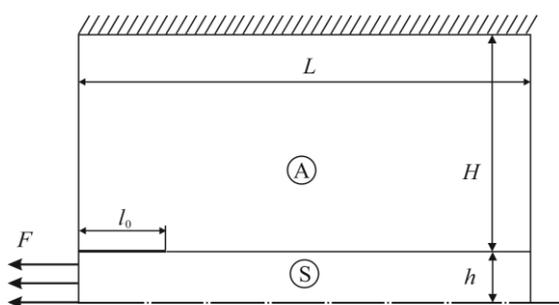


Рис. 11. Схема закрепления и нагружения композитной пластины

Однако они ни по форме, ни по размерам не похожи на пластические зоны, представленные на рисунке 4 в случае плоского деформированного состояния для пластины из однородного биметаллического материала. Например, для однородной пластины при $\bar{\tau} = 0,91$ из (9), (10) получаем: $a = 1,249$ мм, $b = 4,273$ мм; численный расчет дает значения: $a = 1,945$ мм, $b = 13,00$ мм. Как видно, длина пластической зоны b в три раза превышает величину, следующую из формулы (9).

В связи с этим в работах [42, 43] для уточнения выражения для поперечника зоны предразрушения обосновано введение поправочного коэффициента m в соотношение (8). Чтобы определить значение этого коэффициента, необходимо использовать непосредственно данные либо численного, либо

непосредственно данные либо численного, либо лабораторного эксперимента. На рисунке 10 представлены зависимости размера поперечника пластической зоны a от нагрузки $\bar{\tau}$. Одна из них вычислена по формуле (10) (кривая 1), другая построена по данным численного расчета. В условиях маломасштабного пластического течения ограничение (5) выполняется при нагрузках $\bar{\tau} < 0,3$. Из сравнения аналитических значений с численными в этом диапазоне нагрузок получаем приближенную величину поправочного коэффициента: $m \approx 2$.

— для стали модуль Юнга $E = 200$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$, предел текучести на одноосное растяжение $\sigma_y = 400$ МПа;

— для алюминия модуль Юнга $E = 70$ ГПа,

коэффициент Пуассона $\nu = 0,34$, предел текучести на одноосное растяжение $\sigma_Y = 100$ МПа.

В начальный момент вытягивания армирующего слоя возникает напряженное состояние простого сдвига — страгивание трещины происходит по II моде разрушения, поэтому критические нагрузки при маломасштабной текучести могут быть найдены по формулам (15)–(18), а в случае развитого пластического течения критическую нагрузку определим методом конечных элементов.

Расчетная область покрывалась неравномерной сеткой из 150 000 8-узловых прямоугольных элементов с квадратичной аппроксимацией перемещений и полной схемой интегрирования напряжений. Производилось сгущение сетки от внешних границ к оси трещины в отношении 10:1. В процессе нагружения внешняя нагрузка $\sigma_\infty = F/S$, где S — площадь поперечного сечения армирующего слоя, монотонно возрастала по линейному закону от нуля до $\sigma_Y = 400$ МПа, при этом использовался адаптивный шаг по времени. При уровнях нагружения $\bar{\sigma} = \sigma_\infty / \sigma_Y > 0,4$ в окрестности вершины трещины возникают большие пластические деформации, поэтому задача решалась на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейности [40]. Расчет НДС выполнялся в пакете конечно-элементного анализа MSC.Marc 2018 [41].

Построенные по данным вычислений пластические зоны по границе раздела со стороны связующего показаны на рисунке 12. Приведено распределение эквивалентных пластических деформаций ε^p при разных уровнях нагружения. Как и ранее, контурными линиями ограничен диапазон $10^{-4} \div 10^{-2}$ для их более детальной прорисовки. По мере увеличения нагрузки пластическая зона вытягивается в направлении оси трещины и образует «горб» (Рис. 12г).

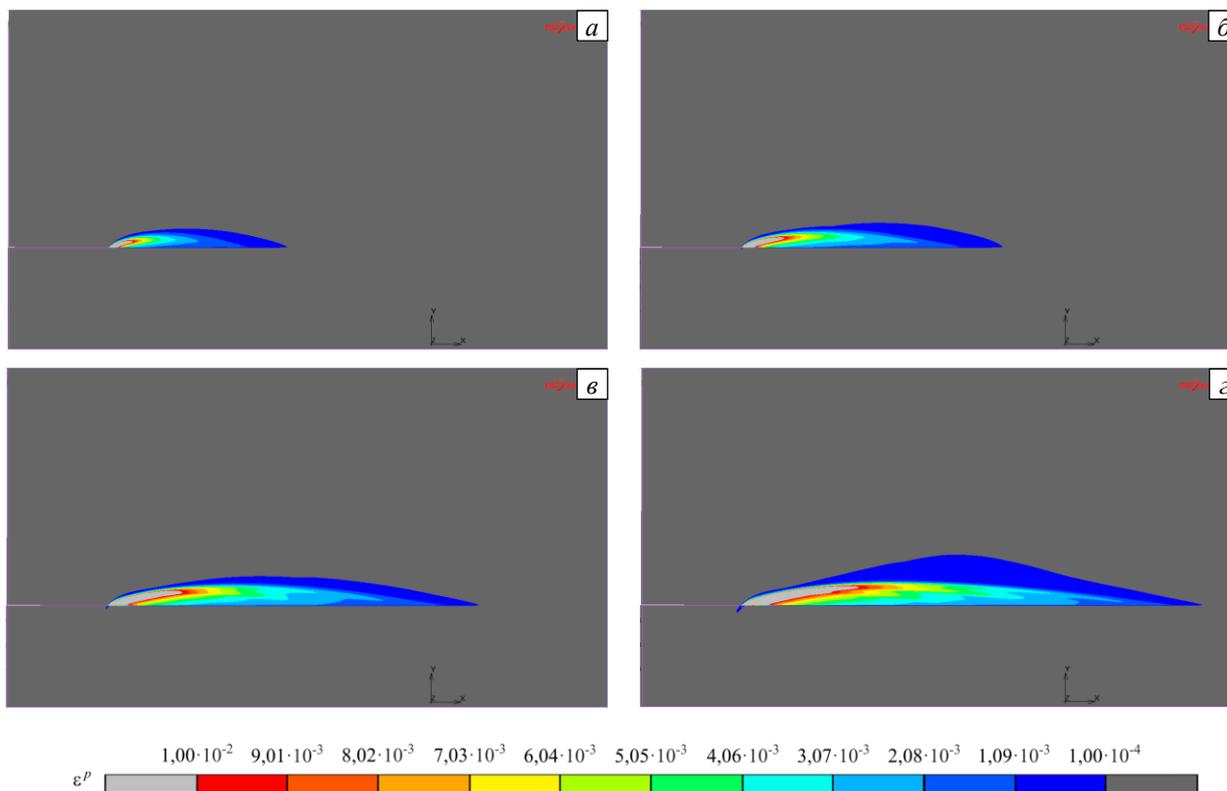


Рис. 12. Формы пластических зон в связующем на границе раздела материалов при различных уровнях внешней нагрузки $\bar{\sigma}$: 0,685 (а); 0,785 (б); 0,885 (в); 0,968 (г)

Алгоритм численного нахождения критической нагрузки согласно необходимому и достаточному критерию был следующим. Задавалось какое-либо значение параметра пластичности, например $\bar{\gamma}_{II} = 40$, что соответствовало 12%-ной пластической деформации. На каждом шаге по нагрузке $\bar{\sigma}$ в результате анализа изолиний пластических зон путем интерполяции по соседним узлам сетки конечных элементов определялась максимальная ширина зоны пластичности $a = a(\bar{\sigma})$ и поперечное смещение $u = u(\bar{\sigma})$ в точке, расположенной на расстоянии $a = a(\bar{\sigma})$ от вершины трещины (см. точку K на Рис. 3б). Далее по формуле (8) вычислялось критическое значение сдвига $\delta^* = (\gamma_1 - \gamma_0)a = \bar{\gamma}_{II}\gamma_0 a$. Находились два последовательных шага по нагрузке, на одном из них выполнялось неравенство $u < \delta^*$, а на другом —

неравенство $u > \delta^*$. Путем интерполяции по времени определялась нагрузка $\bar{\sigma}^*$, при которой поперечное смещение u становилось равным критическому сдвигу δ^* . Полученное значение $\bar{\sigma}^*$ и являлось критической нагрузкой по достаточному критерию (1), (2).

Критическая нагрузка по необходимому критерию (1) устанавливалась на таком шаге по времени, когда ближайшие к вершине трещины конечные элементы на интервале d полностью переходили в пластическое состояние. При уровнях нагружения до 0,26, численный расчет продемонстрировал хорошее согласие с аналитической моделью. В условиях полномасштабного пластического течения наблюдалось значительное расхождение размеров зоны пластичности, отвечающих решению задачи в геометрически нелинейной постановке в рамках теории малых деформаций.

7. Заключение

Рассмотрено зарождение трещины поперечного сдвига (II мода разрушения) в упругопластических материалах, имеющих предельную деформацию. К исследуемому классу материалов относятся, например, низколегированные стали, применяемые в конструкциях, работающих при температурах ниже порога хладноломкости. Процесс разрушения такого материала описан с помощью модифицированной модели Леонова–Панасюка–Дагдейла, использующей дополнительный параметр — поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения). В условиях маломасштабной текучести при наличии сингулярной особенности поля напряжений в окрестности вершины трещины сформулирован двухпараметрический критерий квазихрупкого разрушения II типа в упругопластическом материале, при этом деформационная часть критерия относится к вершине исходной трещины, а силовая (записанная для касательных напряжений с учетом осреднения) — к вершине модельной трещины. Длины исходной и модельной трещин отличаются на длину зоны предразрушения. Выполнен последовательный анализ применимости предложенного критерия прочности при определении разрушающих нагрузок для тел, содержащих трещины поперечного сдвига.

Для случая монотонного нагружения построены диаграммы квазихрупкого разрушения пластины с краевой трещиной поперечного сдвига. Эти диаграммы состоят из двух кривых, разбивающих плоскость в координатах «длина трещины–напряжение» на три следующих друг за другом подобласти, в которых, соответственно, отсутствуют разрушения, накапливаются повреждения в зоне предразрушения, образец разделяется на части. Проведен анализ параметров, входящих в предлагаемую модель квазихрупкого разрушения, и сделан вывод о целесообразности их подбора по $(\tau-\gamma)$ -диаграмме простого сдвига и критическому коэффициенту интенсивности напряжений K_{IIc} .

Получены выражения (см. (15)–(18)), связывающие критическую нагрузку и длину зоны предразрушения. Они могут быть полезными для прогнозирования критической разрушающей нагрузки и оценки длины зоны предразрушения при нагружении образцов по II моде в структурированных материалах, поскольку используют следующие величины: d — характерный линейный размер структуры материала; τ_γ и $\bar{\gamma}_{II} = (\gamma_1 - \gamma_0) / \gamma_0$ — параметры $(\tau-\gamma)$ -диаграммы простого сдвига. Все три параметра находятся в результате лабораторного эксперимента. Приближение локализованного пластического течения оказывается недостаточным при таких уровнях нагрузки, при которых возникают пластические зоны, сопоставимые с характерными размерами задачи. Аналитическая модель имеет ряд ограничений, которые допускают ее применимость только в случае маломасштабной пластичности $b \ll l$ и малой длины площадки текучести $\bar{\gamma}_{II} \leq 5,027$, как это следует из (17). Последнее неравенство выполняется, например, для жаропрочных сталей.

Для квазивязкого и вязкого типов разрушения предельные нагрузки найдены численно. При помощи метода конечных элементов проведено компьютерное моделирование распространения зон пластичности из вершины трещины II типа при вытягивании армирующего слоя из металлокомпозита. Получена оценка размеров пластической зоны в окрестности вершины трещины. Отличие численной модели от аналитической состоит в том, что на ее основе исследованы такие материалы, характеристики которых соответствуют режимам деформирования при полномасштабной текучести. В окрестности вершины трещины возникают большие деформации, поэтому задача решена в текущей лагранжевой постановке с учетом физической и геометрической нелинейностей на основе общих уравнений механики деформируемого твердого тела. Установлено, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материалов со структурой при поперечном сдвиге в режиме маломасштабной текучести.

Литература

1. Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches // Mater. Sci. Eng. R Rep. 2014. Vol. 75. P. 1-48. <https://doi.org/10.1016/j.msre.2013.11.001>

2. *Zhu X.-K., Joyce J.A.* Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization // *Eng. Fract. Mech.* 2012. Vol. 85. P. 1-46. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.001>
3. *Leguillon D.* Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch // *Eur. J. Mech. Solid.* 2002. Vol. 21. P. 61-72. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01184-6](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01184-6)
4. *Newman J.C., James M.A., Zerbst U.* A review of the CTOA/CTOD fracture criterion // *Eng. Fract. Mech.* 2003. Vol. 70. P. 371-385. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00125-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00125-X)
5. *Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W.* A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers // *Arch. Appl. Mech.* 2016. Vol. 86. P. 375-401. <https://doi.org/10.1007/s00419-015-1091-7>
6. *Zhu X.K., Chao Y.J.* Specimen size requirements for two-parameter fracture toughness testing // *Int. J. Fract.* 2005. Vol. 135. P. 117-136. <https://doi.org/10.1007/s10704-005-3946-3>
7. *Meliani M.H., Matvienko Y.G., Pluinage G.* Two-parameter fracture criterion ($K_{p,c}$ - $T_{ef,c}$) based on notch fracture mechanics // *Int. J. Fract.* 2011. Vol. 167. P. 173-182. <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9542-1>
8. *Newman Jr. J.C., Newman III J.C.* Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using finite-element analyses with the critical CTOA fracture criterion // *Eng. Fract. Mech.* 2015. Vol. 136. P. 131-141. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.01.021>
9. *Warren J.M., Lacy T., Newman Jr. J.C.* Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using 3D finite-element analyses with the critical CTOA fracture criterion // *Eng. Fract. Mech.* 2016. Vol. 151. P. 130-137. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.11.007>
10. *Матвиенко Ю.Г.* Двухпараметрическая механика разрушения в современных проблемах прочности // *Проблемы машиностроения и надежности машин.* 2013. № 5. С. 37-46. (English version <https://doi.org/10.3103/S1052618813050087>)
11. *Matvienko Yu.G., Nikishkov G.P.* Two-parameter J-A concept in connection with crack-tip constraint // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2017. Vol. 92. P. 306-317. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.04.007>
12. *Nikishkov G.P., Matvienko Yu.G.* Elastic-plastic constraint parameter a for test specimens with thickness variation // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 2016. Vol. 39. P. 939-949. <https://doi.org/10.1111/ffe.12390>
13. *Matvienko Y.G., Morozov E.M.* Two basic approaches in a search of the crack propagation angle // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 2017. Vol. 40. P. 1191-1200. <https://doi.org/10.1111/ffe.12583>
14. *Popova N.S., Morozov E.M., Matvienko Y.G.* Predicting the crack path in a wedge under a concentrated tensile force by means of variational principle // *Frattura ed Integrità Strutturale.* 2019. Vol. 13. P. 267-271. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.26>
15. *Guo W.* Three-dimensional analyses of plastic constraint for through-thickness cracked bodies // *Eng. Fract. Mech.* 1999. Vol. 62. P. 383-407. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00102-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00102-7)
16. *Wang X.* Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions // *Eng. Fract. Mech.* 2002. Vol. 69. P. 1339-1352. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00149-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00149-7)
17. *Wang X., Lewis T., Bell R.* Estimations of the T-stress for small cracks at notches // *Eng. Fract. Mech.* 2006. Vol. 73. P. 366-375. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.06.009>
18. *Nazarali Q., Wang X.* The effect of T-stress on crack-tip plastic zones under mixed-mode loading conditions // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* 2011. Vol. 34. P. 792-803. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2011.01573.x>
19. *Cicero S., Madrazo V., Carrascal I.A.* Analysis of notch effect in PMMA using the theory of critical distances // *Eng. Fract. Mech.* 2012. Vol. 86. P. 56-72. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.015>
20. *Корнев В.М.* Оценочная диаграмма квазихрупкого разрушения тел с иерархией структур. Многомасштабные необходимые и достаточные критерии разрушения // *Физ. мезомех.* 2010. Т. 13, № 1. С. 47-59.
21. *Корнев В.М., Демешкин А.Г.* Диаграмма квазихрупкого разрушения тел со структурой при наличии краевых трещин // *ПМТФ.* 2011. Т. 52, № 6. С. 152-164. (English version <https://doi.org/10.1134/S0021894411060162>)
22. *Корнев В.М.* Критические кривые разрушения и эффективный диаметр структуры хрупких и квазихрупких материалов // *Физ. мезомех.* 2013. Т. 16, № 5. С. 25-34.
23. *Леонов М.Я., Панасюк В.В.* Развитие мельчайших трещин в твердом теле // *Прикладная механика.* 1959. Т. 5, № 4. С. 391-401.
24. *Dugdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J. Mech. Phys. Solid.* 1960. Vol. 8. P. 100-104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
25. *Neuber G.* *Kerbspannunglehre: Grunlagen fur Genaue Spannungsrechnung.* Springer-Verlag, 1937. 160 S.
26. *Новожилов В.В.* О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // *ПММ.* 1969. Т. 33, № 2. С. 212-222. (English version [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90025-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90025-2))
27. *Anderson T.L.* *Fracture mechanics: Fundamentals and applications.* CRC Press, 2005. 680 p.
28. *Gross D., Seelig T.* *Fracture mechanics.* Springer, 2006. 320 p.
29. *Механика разрушения и прочность материалов / Под общ. ред. В.В. Панасюка.* Киев: Наук. думка, 1988. Т. 2. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. 620 с.
30. *Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В.* *Нелинейная механика разрушения.* Самара: Сам. ун-т, 2004. 632 с.
31. *Ингленд А.* Трещина между двумя разными средами // *Тр. Амер. общ-ва инж.-механ. Прикладная механика.* 1965. Т. 32, № 2. С. 165-168. (English version <https://doi.org/10.1115/1.3625813>)
32. *Эрдоган Ф.* Распределение напряжений в связанных разнородных материалах с трещинами // *Тр. Амер. общ-ва инж.-механ. Прикладная механика.* 1965. Т. 32, № 2. С. 169-177. (English version <https://doi.org/10.1115/1.3625814>)
33. *Райс Дж., Си Г.* Плоские задачи о трещинах, расположенных на границе раздела двух сред // *Тр. Амер. общ-ва инж.-механ. Прикладная механика.* 1965. Т. 32, № 2. С. 186-192. (English version <https://doi.org/10.1115/1.3625816>)
34. *Sih G.C., Chen E.P.* *Cracks in composite materials. A compilation of stress solutions for composite systems with cracks.* Springer, 1981. 620 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-8340-3>
35. *Райс Дж.* Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформации у вырезов и трещин // *Тр. Амер. общ-ва инж.-механ. Прикладная механика.* 1968. Т. 35, № 2. С. 340-350. (English version <https://doi.org/10.1115/1.3601206>)

36. Черепанов Г.П. Вычисление инвариантных интегралов в особых точках // Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури. М.: Мир, 1990. С. 350-364.
37. Gallo P., Berto F. Особенности J-интеграла в условиях упругопластической деформации для материалов, описываемых законом Рамберга-Осгуда // Физ. мезомех. 2015. Т. 18, № 5. С. 27-34. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040037>
38. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.
39. Астапов Н.С., Корнев В.М., Кургузов В.Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // Физ. мезомех. 2016. Т. 19, № 4. С. 49-57.
40. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
41. MARC 2018. Volume A: Theory and user information. MSC Software Corporation, 2018. 1008 p.
42. Кургузов В.Д., Корнев В.М., Астапов Н.С. Модель разрушения биматериала при расслоении. Численный эксперимент // МКМК. 2011. Т. 17, № 4. С. 462-473.
43. Kornev V.M., Kurguzov V.D., Astopov N.S. Fracture model of bimaterial under delamination of elasto-plastic structured media // Appl. Compos. Mater. 2013. Vol. 20. P. 129-143. <https://doi.org/10.1007/s10443-012-9259-6>
44. Кургузов В.Д., Немировский Ю.В. Моделирование динамических процессов забивки или извлечения свай из грунта // Изв. вузов. Строительство. 2011. № 7. С. 82-90.
45. Кургузов В.Д., Немировский Ю.В. Математическая модель динамической вытяжки жесткопластического металлического волокна из металлокомпозиата // Известия Алтайского государственного университета. 2012. № 1/1. С. 69-71.

References

1. Berto F., Lazzarin P. Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches. *Mater. Sci. Eng. R Rep.*, 2014, vol. 75, pp. 1-48. <https://doi.org/10.1016/j.mser.2013.11.001>
2. Zhu X.-K., Joyce J.A. Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization. *Eng. Fract. Mech.*, 2012, vol. 85, pp. 1-46. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.001>
3. Leguillon D. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *Eur. J. Mech. Solid.*, 2002, vol. 21, pp. 61-72. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01184-6](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01184-6)
4. Newman J.C., James M.A., Zerbst U. A review of the CTOA/CTOD fracture criterion. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, pp. 371-385. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00125-X](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00125-X)
5. Weißgraeber P., Leguillon D., Becker W. A review of finite fracture mechanics: crack initiation at singular and non-singular stress raisers. *Arch. Appl. Mech.*, 2016, vol. 86, pp. 375-401. <https://doi.org/10.1007/s00419-015-1091-7>
6. Zhu X.K., Chao Y.J. Specimen size requirements for two-parameter fracture toughness testing. *Int. J. Fract.*, 2005, vol. 135, pp. 117-136. <https://doi.org/10.1007/s10704-005-3946-3>
7. Meliani M.H., Matvienko Y.G., Pluinage G. Two-parameter fracture criterion (K_{pc} - $T_{ef,c}$) based on notch fracture mechanics. *Int. J. Fract.*, 2011, vol. 167, pp. 173-182. <https://doi.org/10.1007/s10704-010-9542-1>
8. Newman Jr. J.C., Newman III J.C. Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using finite-element analyses with the critical CTOA fracture criterion. *Eng. Fract. Mech.*, 2015, vol. 136, pp. 131-141. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.01.021>
9. Warren J.M., Lacy T., Newman Jr. J.C. Validation of the Two-Parameter Fracture Criterion using 3D finite-element analyses with the critical CTOA fracture criterion. *Eng. Fract. Mech.*, 2016, vol. 151, pp. 130-137. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2015.11.007>
10. Matvienko Y.G. Two-parameter fracture mechanics in contemporary strength problems. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2013, vol. 42, pp. 374-381. <https://doi.org/10.3103/S1052618813050087>
11. Matvienko Yu.G., Nikishkov G.P. Two-parameter J-A concept in connection with crack-tip constraint. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2017, vol. 92, pp. 306-317. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.04.007>
12. Nikishkov G.P., Matvienko Yu.G. Elastic-plastic constraint parameter a for test specimens with thickness variation. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2016, vol. 39, pp. 939-949. <https://doi.org/10.1111/ffe.12390>
13. Matvienko Y.G., Morozov E.M. Two basic approaches in a search of the crack propagation angle. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2017, vol. 40, pp. 1191-1200. <https://doi.org/10.1111/ffe.12583>
14. Popova N.S., Morozov E.M., Matvienko Y.G. Predicting the crack path in a wedge under a concentrated tensile force by means of variational principle. *Frattura ed Integrità Strutturale*, 2019, vol. 13, pp. 267-271. <https://doi.org/10.3221/IGF-ESIS.49.26>
15. Guo W. Three-dimensional analyses of plastic constraint for through-thickness cracked bodies. *Eng. Fract. Mech.*, 1999, vol. 62, pp. 383-407. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00102-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00102-7)
16. Wang X. Elastic T-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions. *Eng. Fract. Mech.*, 2002, vol. 69, pp. 1339-1352. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00149-7](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00149-7)
17. Wang X., Lewis T., Bell R. Estimations of the T-stress for small cracks at notches. *Eng. Fract. Mech.*, 2006, vol. 73, pp. 366-375. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2005.06.009>
18. Nazarali Q., Wang X. The effect of T-stress on crack-tip plastic zones under mixed-mode loading conditions. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, 2011, vol. 34, pp. 792-803. <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2011.01573.x>
19. Cicero S., Madrazo V., Carrascal I.A. Analysis of notch effect in PMMA using the theory of critical distances. *Eng. Fract. Mech.*, 2012, vol. 86, pp. 56-72. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.02.015>
20. Kornev V.M. Estimation diagram of quasi-brittle fracture for bodies with a hierarchy of structures. Multiscale necessary and sufficient fracture criteria. *Fiz. mezomekh. – Physical Mesomechanics*, 2010, vol. 13, no. 1, pp. 47-59.
21. Kornev V.M., Demeshkin A.G. Quasi-brittle fracture diagram of structured bodies in the presence of edge cracks. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, pp. 975-985. <https://doi.org/10.1134/S0021894411060162>

22. Kornev V.M. Critical fracture curves and effective structure diameter of brittle and quasi-brittle materials. *Fiz. mezomekh. – Physical Mesomechanics*, 2013, vol. 16, no. 5, pp. 25-34.
23. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. Razvitiye mel'chayshikh treshchin v tverdom tele [Small cracks growth in a solids]. *Prikladnaya mekhanika – International Applied Mechanics*, 1959, vol. 5, no. 4, pp. 391-401.
24. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1960, vol. 8, pp. 100-104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2)
25. Neuber G. *Kerbspannunglehre: Grunglagen fur Genaue Spannungsrechnung* [Notch Stress Theory: Basics for Exact Stress Calculation]. Springer-Verlag, 1937. 160 p.
26. Novozhilov V.V. On a necessary and sufficient criterion for brittle strength. *J. Appl. Math. Mech.*, 1969, vol. 33, pp. 201-210. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(69\)90025-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(69)90025-2)
27. Anderson T.L. *Fracture mechanics: Fundamentals and applications*. CRC Press, 2005. 680 p.
28. Gross D., Seelig T. *Fracture mechanics*. Springer, 2006. 320 p.
29. Savruk M.P. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov. T. 2. Koeffitsiyenty intensivnosti napryazheniy v telakh s treshchinami* [Fracture mechanics and strength of materials. Vol. 2. Stress intensity factors in bodies with cracks]. Kiyev, Nauk. dumka, 1988. 619 p.
30. Astaf'yev V.I., Radayev Yu.N., Stepanova L.V. *Nelineynaya mekhanika razrusheniya* [Non-linear fracture mechanics]. Samara: Samara University, 2001. 632 p.
31. England A.H. A Crack Between Dissimilar Media. *J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, pp. 400-402. <https://doi.org/10.1115/1.3625813>
32. Erdogan F. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, pp. 403-410. <https://doi.org/10.1115/1.3625814>
33. Rice J.R., Sih G.C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, pp. 418-423. <https://doi.org/10.1115/1.3625816>
34. Sih G.C., Chen E.P. *Cracks in composite materials. A compilation of stress solutions for composite systems with cracks*. Springer, 1981. 620 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-8340-3>
35. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.*, 1968, vol. 35, pp. 379-386. <https://doi.org/10.1115/1.3601206>
36. Cherepanov G.P. Vychisleniye invariantnykh integralov v osobykh tochkakh [Computing the invariant integrals in specific locations] // Vychislitel'nyye metody v mekhanike razrusheniya [Computational methods in the mechanics of fracture], ed. S. Atluri. Moscow, Mir, 1990. Pp. 350-364.
37. Gallo P., Berto F. Some considerations on the J-integral under elastic-plastic conditions for materials obeying a Ramberg–Osgood law. *Phys. Mesomech.*, 2015, vol. 18, pp. 298-306. <https://doi.org/10.1134/S1029959915040037>
38. Murakami Y. (ed.) *Stress intensity factors handbook*. Pergamon Press, 1987. 1456 p.
39. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Delamination model for a composite with a crack. *Fiz. mezomekh. – Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49-57.
40. Korobeynikov S.N. *Nelineynoye deformirovaniye tverdyykh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000. 262 p.
41. MARC 2018. Volume A: Theory and user information. MSC Software Corporation, 2018. 1008 p.
42. Kurguzov V.D., Kornev V.M., Astapov N.S. Fracture model of bi-material under exfoliation. Numerical experiment. *MKMK – Journal on Composite Mechanics and Design*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 462-473.
43. Kornev V.M., Kurguzov V.D., Astapov N.S. Fracture model of bimaterial under delamination of elasto-plastic structured media. *Appl. Compos. Mater.*, 2013, vol. 20, pp. 129-143. <https://doi.org/10.1007/s10443-012-9259-6>
44. Kurguzov V.D., Nemirovskiy Yu.V. Modelirovaniye dinamicheskikh protsessov zabivki ili izvlecheniya svay iz grunta [Simulation of dynamic processes of driving or extracting piles from soil]. *Izv. vuzov. Stroitel'stvo – News of higher educational institutions. Construction*, 2011, no. 7, pp. 82-90.
45. Kurguzov V.D., Nemirovskiy Yu.V. Mathematical model of dynamic extract of plastic-rigid metal fiber from metal composite. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta – Izvestiya of Altai State University*, 2012, no. 1/1, pp. 69-71.

Поступила в редакцию 23.04.2021; после доработки 28.07.2021; принята к опубликованию 13.08.2021