

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.3.26](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.26)

УДК 539.3

## К ИССЛЕДОВАНИЮ КОЛЕБАНИЙ ЦИЛИНДРА С ВЯЗКОУПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ

А.О. Ватульян<sup>1,2</sup>, В.В. Дударев<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*<sup>2</sup>*Южный математический институт, Владикавказ, Российская Федерация*

Рассматривается задача об установившихся продольно-радиальных колебаниях упругого полого цилиндра с вязкоупругим покрытием. Вязкоупругие свойства и плотность покрытия изменяются только по радиальной координате. Торцы цилиндра находятся в условиях скользящей заделки, периодическая во времени нагрузка приложена ко всей внешней боковой поверхности цилиндра. Выбран четный закон изменения нагрузки по осевой координате. В рамках модели стандартного вязкоупругого тела, следуя принципу соответствия, переменные параметры Ламе заменены на комплексные функции радиальной координаты и частоты колебаний. Решение получено с использованием двух подходов. В рамках первого подхода решение строится с помощью метода разделения переменных и сводится к набору краевых задач для канонических систем дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами. Далее каждая из этих задач решается численно методом пристрелки. Второй подход основан на методе конечных элементов, реализованном в пакете FlexPDE. Проведено сравнение найденных решений при заданных законах изменения характеристик неоднородности и фиксированной частоте на примере графиков вещественных и мнимых частей компонент радиальных смещений и напряжений. Показана сходимость решения, полученного методом конечных элементов, в зависимости от числа узлов аппроксимирующей расчетную область сетки для значений функций радиального смещения, измеренного в трех точках. Построены графики амплитудно-частотной характеристики на внешней поверхности системы «цилиндр–покрытие» при различных значениях времени релаксации. Выявлено влияние переменных свойств покрытия на функцию смещения. Описаны преимущества каждого из подходов и области их практического применения.

*Ключевые слова:* цилиндр, вязкоупругое покрытие, функционально-градиентный материал, переменные свойства, колебания, метод пристрелки, метод конечных элементов

## A STUDY OF VIBRATIONS OF A CYLINDER WITH A VISCOELASTIC COATING

A.O. Vatulyan<sup>1,2</sup> and V.V. Dudarev<sup>1,2</sup><sup>1</sup>*Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences named after I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, Russian Federation*<sup>2</sup>*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz, Russian Federation*

The paper presents the problem of steady-state longitudinal-radial vibrations of an elastic hollow cylinder with a viscoelastic coating. The properties of the coating change along the radial coordinate only and are described by the variable Lamé parameters and density. The ends of the cylinder are under sliding interface conditions, and the outer side surface is subject to periodic loads. Within the framework of the model of a standard viscoelastic body and following the principle of correspondence, the variable Lamé parameters are replaced by the complex functions of the radial coordinate and vibration frequency. The solution was obtained using two approaches. Within the framework of the first approach, the solution is constructed using the method of separation of variables and is reduced to solving a set of boundary value problems for canonical systems of first-order differential equations with variable coefficients. The solution to each of these problems is obtained numerically using the shooting method. The second approach is based on the finite element method implemented in the FlexPDE package. We compared the obtained solutions for the given laws of variation of the Lamé parameters and a fixed frequency by analyzing the graphs of the real and imaginary parts of radial displacement and stress components. The convergence of the solution found using the finite element method is shown as a function of the number of nodes for the values of the radial displacement functions measured at three points. The graphs of the amplitude-frequency characteristics measured on the outer surface are plotted for different values of the relaxation time. The effect of variable properties of the coating on the displacement function is estimated. The advantages of each approach are described, and the areas of their practical application are revealed.

*Key words:* cylinder, viscoelastic coating, functionally graded material, variable properties, vibrations, shooting method, finite element method

### 1. Введение

Современные технологии позволяют создавать так называемые функционально-градиентные материалы (ФГМ), свойства которых изменяются по пространственным координатам [1–3]. Они получают при механическом соединении материалов с резко отличающимися значениями физико-химических параметров, и их основным преимуществом, по сравнению, например, с обычными слоистыми композитами, является существенное уменьшение вероятности появления трещин и отслоений. Кроме того, покрытия из них способны изменить некоторые характеристики несущего их объекта: коррозионную стойкость, прочность, диэлектрическое сопротивление, термостойкость, акустическую проницаемость и другие. Учет переменности упругих свойств покрытия позволяет проводить для системы «покрытие–объект» более точные расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) и осуществлять оценку прочности. Важной прикладной задачей также является анализ влияния законов неоднородности материала на акустические свойства кусочно-однородных тел, которые могут находиться при эксплуатации в режиме установившихся колебаний.

Цилиндрические формы являются одними из наиболее распространенных элементов конструкций и инженерных коммуникаций. Обширный обзор работ за 2005–2015 годы, посвященных математическому описанию структур ФГМ, представлен в статье [4]. В рамках одного из подходов для моделирования свойств таких материалов используется классическая теория упругости. При этом упругие модули и плотность полагаются переменными по пространственным координатам.

При решении задач для неоднородных объектов обычно принимаются некоторые допущения. Среди них можно назвать следующие: коэффициент Пуассона считается постоянным; все характеристики изменяются по одному закону; выбирается частный вид неоднородности с конечным числом параметров. Эти исходные положения позволяют в некоторых случаях строить аналитические решения. В случае общего вида неоднородности решение задачи может быть найдено только численно. При этом в настоящее время среди наиболее распространенных методов получения приближенных решений можно отметить метод конечных элементов (МКЭ). В то же время классические методы и подходы продолжают использоваться для исследования в отдельных современных задачах. Например, задача об установившихся вынужденных колебаниях упругого однородного цилиндра конечной длины решается с помощью метода разделения переменных [5]. Аналогичный метод применяется при изучении некоторых симметричных объектов, изготовленных из ФГМ [6].

В связи с развитием технологий, повышением требований к долговечности и экономичности инженерных сооружений все большее распространение находят металлические трубы с покрытиями из полимерных материалов или целиком изготовленные из них (например, из поливинилхлорида или полиэтилена). Основным преимуществом этих материалов является коррозионная стойкость, малый вес и простота монтажа с помощью пайки. Учет переменных свойств материала покрытия позволяет проводить более точный расчет НДС изделия. Анализ изменения акустических характеристик конструкции в зависимости от вида присутствующей в ней неоднородности может быть использован при диагностике в процессе эксплуатации.

В настоящей работе рассмотрена задача об установившихся продольно-радиальных колебаниях цилиндра с неоднородным вязкоупругим покрытием. Реализованы два численных подхода к построению решений, ранее апробированные при исследовании упругого цилиндра без покрытия [6]. Выявлены особенности и возможности каждого из подходов.

## 2. Постановка задачи

Пусть имеется полый упругий цилиндр высотой  $2h$  с известными внутренним ( $r_1$ ) и внешним ( $r_2$ ) радиусами. Для решения задачи выберем цилиндрическую систему координат  $O r \varphi z$ . На внешнюю боковую поверхность цилиндра нанесено неоднородное вязкоупругое покрытие в области  $D = \{(r, \varphi, z) \in R^3 \mid r \in [r_1, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], z \in [-h, h]\}$ . Свойства покрытия изменяются только по радиальной координате. Торцы цилиндра находятся в условиях скользящей заделки. На внутренней поверхности цилиндра нагрузки отсутствуют, а к внешней поверхности покрытия приложена нормальная распределенная нагрузка, изменяющаяся по координате  $z$  и вызывающая продольно-радиальные колебания системы с частотой  $\omega$  (см. Рис. 1).

Учитывая осевую симметрию геометрии исследуемого объекта, вид нагружения и закон изменения свойств покрытия для системы «цилиндр–покрытие» можно записать уравнения установившихся колебаний и граничные условия в виде:

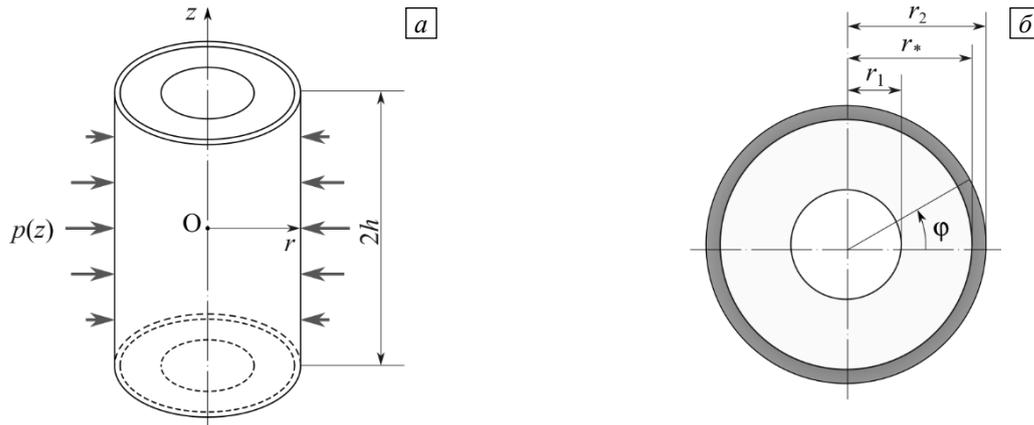
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho \omega^2 u_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho \omega^2 u_z = 0, \\ u_z = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r \in [r_1, r_2], \quad z = \pm h, \\ \sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_1, \quad z \in [-h, h], \\ \sigma_{rr} = -p(z), \quad \sigma_{rz} = 0, \quad r = r_2, \quad z \in [-h, h], \end{cases}$$

где  $\sigma_{rr} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{rr}$ ,  $\sigma_{rz} = \sigma_{rz} = 2\mu\varepsilon_{rz}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}$  — компоненты тензора напряжений Коши,  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}$ ,  $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$ ,  $\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right)$  — компоненты тензора малых деформаций,  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$  — объемная деформация,  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  — переменные характеристики материала и плотность соответственно,  $u_r = u_r(r, z)$ ,  $u_z = u_z(r, z)$  — компоненты вектора перемещений

в радиальном и продольном направлениях,  $p(z) = p^0 q(z)$ ,  $p^0$  и  $q(z)$  — амплитуда нагрузки и закон ее изменения. Для определенности будем считать, что функция  $q(z)$  является четной и допускает разложение в ряд вида:

$$q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k \cos(v_k z),$$

в котором коэффициенты вычисляются по формулам:  $P_0 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q(z) dz$ ,  $P_k = \frac{1}{h} \int_{-h}^h q(z) \cos(v_k z) dz$ ,  $v_k = \frac{\pi k}{h}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).



**Рис. 1.** Схема к постановке задачи: полный цилиндр с неоднородным покрытием под действием нормальной распределенной периодической нагрузки (а); поперечное сечение системы «цилиндр–покрытие» (б)

Для описания изменения вязкоупругих свойств покрытия по радиальной координате воспользуемся трехпараметрической моделью стандартного вязкоупругого тела. Следуя принципу соответствия, параметры Ламе для материала покрытия представим в виде безразмерных комплексных функций радиальной координаты и частоты колебаний [1]:

$$\frac{\lambda(r, \omega)}{\lambda^*} = \Lambda(\xi, \kappa) = \frac{ib\kappa\varphi_{12}(\xi) + \varphi_{11}(\xi)}{1 + ib\kappa} = \Lambda^R + i\Lambda^I,$$

$$\frac{\mu(r, \omega)}{\lambda^*} = M(\xi, \kappa) = \frac{ib\kappa\varphi_{22}(\xi) + \varphi_{21}(\xi)}{1 + ib\kappa} = M^R + iM^I.$$

Здесь:  $\Lambda^R(\xi, \kappa) = \frac{\varphi_{11}(\xi) + b^2\kappa^2\varphi_{12}(\xi)}{1 + b^2\kappa^2}$ ,  $\Lambda^I(\xi, \kappa) = b\kappa \frac{\varphi_{12}(\xi) - \varphi_{11}(\xi)}{1 + b^2\kappa^2}$ ;  $M^R(\xi, \kappa) = \frac{\varphi_{21}(\xi) + b^2\kappa^2\varphi_{22}(\xi)}{1 + b^2\kappa^2}$ ,

$M^I(\xi, \kappa) = b\kappa \frac{\varphi_{22}(\xi) - \varphi_{21}(\xi)}{1 + b^2\kappa^2}$ ;  $\xi = \frac{r}{r_2}$  — безразмерная радиальная координата; параметр  $b = \frac{n}{r_2} \sqrt{\frac{\lambda^*}{\rho}}$

пропорционален времени релаксации  $n$ , а параметр  $\kappa^2 = \frac{\rho^* \omega^2 r_2^2}{\lambda^*}$  — частоте колебаний;  $\lambda^*$  — размерный

параметр (характерное значение  $\lambda$ );  $\rho^*$  — характерное значение плотности.

В рамках рассматриваемой задачи свойства упругого материала цилиндра и неоднородного вязкоупругого материала покрытия описываются следующими характеристиками, которые задаются в виде кусочно-непрерывных функций:

$$\Lambda(\xi, \kappa) = \begin{cases} \lambda_0, & \xi \in [\xi_0, \xi_*], \\ \Lambda^R(\xi, \kappa) + i\Lambda^I(\xi, \kappa), & \xi \in [\xi_*, 1], \end{cases}$$

$$M(\xi, \kappa) = \begin{cases} \mu_0, & \xi \in [\xi_0, \xi_*], \\ M^R(\xi, \kappa) + iM^I(\xi, \kappa), & \xi \in [\xi_*, 1], \end{cases}$$

$$\frac{\rho(r)}{\rho^*} = \begin{cases} \rho_0, & \xi \in [\xi_0, \xi_*], \\ \eta(\xi), & \xi \in [\xi_*, 1], \end{cases}$$

где  $\xi_0 = \frac{r_1}{r_2}$ ,  $\xi_* = \frac{r_*}{r_2}$ . Здесь функции  $\Lambda$  и  $M$  принимают постоянные вещественные значения на упругом цилиндре, то есть при  $\xi \in [\xi_0, \xi_*]$ , и являются переменными комплекснозначными для материала покрытия, при  $\xi \in [\xi_*, 1]$ .

Учитывая вид граничных условий, закон изменения нагрузки и характер свойств материала покрытия, решение можно построить в виде [2]:

$$\begin{aligned} \frac{u_r}{r_2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (u_k^R(\xi) + iu_k^I(\xi)) \cos(v_k z), & \frac{u_z}{r_2} &= \sum_{k=0}^{\infty} (w_k^R(\xi) + iw_k^I(\xi)) \sin(v_k z), \\ \frac{\sigma_{rr}}{\lambda^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} (s_{1k}^R(\xi) + is_{1k}^I(\xi)) \cos(v_k z), & \frac{\sigma_{zr}}{\lambda^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} (s_{2k}^R(\xi) + is_{2k}^I(\xi)) \sin(v_k z), \\ \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\lambda^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} (s_{3k}^R(\xi) + is_{3k}^I(\xi)) \cos(v_k z), & \frac{\sigma_{zz}}{\lambda^*} &= -\sum_{k=0}^{\infty} (s_{4k}^R(\xi) + is_{4k}^I(\xi)) \cos(v_k z). \end{aligned} \quad (1)$$

Следует отметить, что при таких представлениях граничные условия на торцах будут выполняться тождественно. Используя дифференциальные уравнения движения, определяющие соотношения, свойства ортогональности систем функций  $\{\cos(v_k z)\}$ ,  $\{\sin(v_k z)\}$  и выделяя вещественную и мнимую части, можно получить набор канонических систем, включающих дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами и соответствующие краевые условия:

– при  $k = 0$

$$\begin{aligned} s_{10}^{R'} &= -\frac{s_{10}^R - s_{30}^R}{\xi} - \kappa^2 \eta u_0^R, \\ s_{10}^{I'} &= -\frac{s_{10}^I - s_{30}^I}{\xi} - \kappa^2 \eta u_0^I, \\ u_0^{R'} &= \frac{s_{10}^R A^R + s_{10}^I A^I - \frac{u_0^R}{\xi} (\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I) - \frac{u_0^I}{\xi} (\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R)}{A^2}, \\ u_0^{I'} &= -\frac{s_{10}^R A^I - s_{10}^I A^R - \frac{u_0^R}{\xi} (\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R) + \frac{u_0^I}{\xi} (\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I)}{A^2}, \\ s_{10}^R(\xi_0) &= 0, \quad s_{10}^I(\xi_0) = 0, \\ s_{10}^R(1) &= p_0, \quad s_{10}^I(1) = 0; \end{aligned}$$

– при остальных значениях  $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} s_{1k}^{R'} &= -\beta_k s_{2k}^R - \frac{s_{1k}^R - s_{3k}^R}{\xi} - \kappa^2 \eta u_k^R, \\ s_{1k}^{I'} &= -\beta_k s_{2k}^I - \frac{s_{1k}^I - s_{3k}^I}{\xi} - \kappa^2 \eta u_k^I, \\ s_{2k}^{R'} &= s_{4k}^R - \frac{s_{2k}^R}{\xi} - \kappa^2 \eta w_k^R, \\ s_{2k}^{I'} &= s_{4k}^I - \frac{s_{2k}^I}{\xi} - \kappa^2 \eta w_k^I, \\ u_k^{R'} &= \frac{s_{1k}^R A^R + s_{1k}^I A^I - \left(\frac{u_k^R}{\xi} + \beta_k w_k^R\right) (\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I) - \left(\frac{u_k^I}{\xi} + \beta_k w_k^I\right) (\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R)}{A^2}, \end{aligned}$$

$$u_k^{I'} = - \frac{s_{1k}^R A^I - s_{1k}^I A^R - \left( \frac{u_k^R}{\xi} + \beta_k w_k^R \right) (\Lambda^R A^I - \Lambda^I A^R) + \left( \frac{u_k^I}{\xi} + \beta_k w_k^I \right) (\Lambda^R A^R + \Lambda^I A^I)}{A^2},$$

$$w_k^{R'} = \frac{s_{2k}^R M^R + s_{2k}^I M^I}{(M^R)^2 + (M^I)^2} + \beta_k u_k^R,$$

$$w_k^{I'} = - \frac{s_{2k}^R M^I + s_{2k}^I M^R}{(M^R)^2 + (M^I)^2} + \beta_k u_k^I,$$

$$s_{1k}^R(\xi_0) = 0, \quad s_{1k}^I(\xi_0) = 0,$$

$$s_{2k}^R(\xi_0) = 0, \quad s_{2k}^I(\xi_0) = 0,$$

$$s_{1k}^R(1) = p_k, \quad s_{1k}^I(1) = 0,$$

$$s_{2k}^R(1) = 0, \quad s_{2k}^I(1) = 0,$$

где для краткости и удобства записи введены обозначения:

$$s_{3k}^R = A^R \frac{u_k^R}{\xi} + \Lambda^R (u_k^{R'} + \beta_k w_k^R) - A^I \frac{u_k^I}{\xi} - \Lambda^I (u_k^{I'} + \beta_k w_k^I),$$

$$s_{3k}^I = A^R \frac{u_k^I}{\xi} + \Lambda^R (u_k^{I'} + \beta_k w_k^I) + A^I \frac{u_k^R}{\xi} + \Lambda^I (u_k^{R'} + \beta_k w_k^R),$$

$$s_{4k}^R = A^R \beta_k^2 w_k^R + \Lambda^R \left( \beta_k u_k^{R'} + \frac{\beta_k u_k^R}{\xi} \right) - A^I \beta_k^2 w_k^I - \Lambda^I \left( \beta_k u_k^{I'} + \frac{\beta_k u_k^I}{\xi} \right),$$

$$s_{4k}^I = A^R \beta_k^2 w_k^I + \Lambda^R \left( \beta_k u_k^{I'} + \frac{\beta_k u_k^I}{\xi} \right) + A^I \beta_k^2 w_k^R + \Lambda^I \left( \beta_k u_k^{R'} + \frac{\beta_k u_k^R}{\xi} \right),$$

$$A^R = \Lambda^R + 2M^R, \quad A^I = \Lambda^I + 2M^I, \quad A^2 = (\Lambda^R + 2M^R)^2 + (\Lambda^I + 2M^I)^2,$$

$$\beta_k = \frac{\pi k r_2}{h}, \quad p_k = - \frac{p^0 P_k}{\lambda^*}.$$

В общем случае неоднородности материала покрытия решения сформулированных задач можно получить только численно, например, методом пристрелки. Следуя этому методу, представим функции  $u_0^R$ ,  $u_0^I$  при  $k=0$  (нулевую гармонику) в виде:

$$u_0^R = \alpha_1 u_0^{R(1)} + \alpha_2 u_0^{R(2)}, \quad u_0^I = \alpha_1 u_0^{I(1)} + \alpha_2 u_0^{I(2)},$$

где  $u_0^{R(i)}$ ,  $u_0^{I(i)}$  ( $i=1,2$ ) — решения соответствующих задач Коши с начальными условиями:

$$\begin{cases} s_{10}^{R(1)}(\xi_0) = 0, & s_{10}^{R(2)}(\xi_0) = 0, \\ s_{10}^{I(1)}(\xi_0) = 0, & s_{10}^{I(2)}(\xi_0) = 0, \\ u_0^{R(1)}(\xi_0) = 1, & u_0^{R(2)}(\xi_0) = 0, \\ u_0^{I(1)}(\xi_0) = 0, & u_0^{I(2)}(\xi_0) = 1. \end{cases}$$

Вещественные коэффициенты  $\alpha_i$  определяются из условия удовлетворения граничных условий на внешней поверхности покрытия для компоненты радиального напряжения:

$$\begin{cases} s_{10}^R(1) = \alpha_1 s_{10}^{R(1)}(1) + \alpha_2 s_{10}^{R(2)}(1) = p_0, \\ s_{10}^I(1) = \alpha_1 s_{10}^{I(1)}(1) + \alpha_2 s_{10}^{I(2)}(1) = 0. \end{cases}$$

Решения остальных задач (при  $k=1,2,\dots$ ) также могут быть найдены численно из представлений:

$$u_k^R = \gamma_1 u_k^{R(1)} + \gamma_2 u_k^{R(2)} + \gamma_3 u_k^{R(3)} + \gamma_4 u_k^{R(4)}, \quad u_k^I = \gamma_1 u_k^{I(1)} + \gamma_2 u_k^{I(2)} + \gamma_3 u_k^{I(3)} + \gamma_4 u_k^{I(4)},$$

где  $u_0^{R(i)}, u_0^{I(i)}$  ( $i = \overline{1,4}$ ) — решения задач Коши с начальными условиями:

$$\begin{cases} s_{1k}^{R(1)}(\xi_0) = 0, & s_{1k}^{R(2)}(\xi_0) = 0, & s_{1k}^{R(3)}(\xi_0) = 0, & s_{1k}^{R(4)}(\xi_0) = 0, \\ s_{1k}^{I(1)}(\xi_0) = 0, & s_{1k}^{I(2)}(\xi_0) = 0, & s_{1k}^{I(3)}(\xi_0) = 0, & s_{1k}^{I(4)}(\xi_0) = 0, \\ s_{2k}^{R(1)}(\xi_0) = 0, & s_{2k}^{R(2)}(\xi_0) = 0, & s_{2k}^{R(3)}(\xi_0) = 0, & s_{2k}^{R(4)}(\xi_0) = 0, \\ s_{2k}^{I(1)}(\xi_0) = 0, & s_{2k}^{I(2)}(\xi_0) = 0, & s_{2k}^{I(3)}(\xi_0) = 0, & s_{2k}^{I(4)}(\xi_0) = 0, \\ u_k^{R(1)}(\xi_0) = 1, & u_k^{R(2)}(\xi_0) = 0, & u_k^{R(3)}(\xi_0) = 0, & u_k^{R(4)}(\xi_0) = 0, \\ u_k^{I(1)}(\xi_0) = 0, & u_k^{I(2)}(\xi_0) = 1, & u_k^{I(3)}(\xi_0) = 0, & u_k^{I(4)}(\xi_0) = 0, \\ w_k^{R(1)}(\xi_0) = 0, & w_k^{R(2)}(\xi_0) = 0, & w_k^{R(3)}(\xi_0) = 1, & w_k^{R(4)}(\xi_0) = 0, \\ w_k^{I(1)}(\xi_0) = 0, & w_k^{I(2)}(\xi_0) = 0, & w_k^{I(3)}(\xi_0) = 0, & w_k^{I(4)}(\xi_0) = 1. \end{cases}$$

Значения коэффициентов  $\gamma_i$  устанавливаются из решения алгебраической системы, которая следует из условия удовлетворения граничных условий для компонент нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{cases} s_{1k}^R(1) = \gamma_1 s_{1k}^{R(1)}(1) + \gamma_2 s_{1k}^{R(2)}(1) + \gamma_3 s_{1k}^{R(3)}(1) + \gamma_4 s_{1k}^{R(4)}(1) = p_k, \\ s_{1k}^I(1) = \gamma_1 s_{1k}^{I(1)}(1) + \gamma_2 s_{1k}^{I(2)}(1) + \gamma_3 s_{1k}^{I(3)}(1) + \gamma_4 s_{1k}^{I(4)}(1) = 0, \\ s_{2k}^R(1) = \gamma_1 s_{2k}^{R(1)}(1) + \gamma_2 s_{2k}^{R(2)}(1) + \gamma_3 s_{2k}^{R(3)}(1) + \gamma_4 s_{2k}^{R(4)}(1) = 0, \\ s_{2k}^I(1) = \gamma_1 s_{2k}^{I(1)}(1) + \gamma_2 s_{2k}^{I(2)}(1) + \gamma_3 s_{2k}^{I(3)}(1) + \gamma_4 s_{2k}^{I(4)}(1) = 0. \end{cases}$$

С помощью описанной процедуры можно строить численное решение исходной задачи для системы «цилиндр—покрытие» при заданных законах изменения свойств неоднородного вязкоупругого покрытия и удержании конечного числа слагаемых в представлениях (1). Следует отметить, что в правых частях дифференциальных уравнений для задач при  $k = 0, 1, 2, \dots$  отсутствуют производные от функций  $\Lambda^R, \Lambda^I, M^R, M^I$ . Благодаря этому при моделировании колебаний цилиндра с вязкоупругим покрытием можно использовать широкий класс законов изменения свойств материала покрытия (монотонные, немонотонные, кусочно-постоянные).

Основой другого численного подхода, с помощью которого можно исследовать рассматриваемую задачу, является МКЭ. В качестве пакета, в котором реализован этот метод, выбран FlexPDE. Его основные преимущества — это возможность задавать в явном виде уравнения колебаний и определяющие соотношения; наличие встроенного функционала для работы с комплексными величинами; легкая установка на компьютере и невысокие требования к его техническим характеристикам.

Уравнения колебаний и граничные условия, которые соответствуют безразмерной постановке задачи и реализованы в программной среде FlexPDE, имеют вид:

$$\begin{cases} S_{11,\xi} + S_{12,x} + \frac{S_{11} - S_{22}}{\xi} + \kappa^2 u_1^* = 0, \\ S_{13,\xi} + S_{33,x} + \frac{S_{13}}{\xi} + \kappa^2 u_3^* = 0, \\ u_3^* = 0, \quad S_{13} = 0, \quad x = \pm h^*, \quad \xi \in [\xi_0, 1], \\ S_{11} = 0, \quad S_{13} = 0, \quad \xi = \xi_0, \quad x \in [-h^*, h^*], \\ S_{11} = p, \quad S_{13} = 0, \quad \xi = 1, \quad x \in [-h^*, h^*], \end{cases} \quad (2)$$

где по аналогии с первым подходом введены безразмерные величины и функции:

$$\begin{cases} S_{11} = \sigma_{rr}/\lambda^*, \quad S_{22} = \sigma_{\varphi\varphi}/\lambda^*, \quad S_{13} = \sigma_{rz}/\lambda^*, \quad S_{33} = \sigma_{zz}/\lambda^*, \\ u_1^* = u_r/r_2, \quad u_3^* = u_z/r_2, \quad x = z/r_2 \in [-h^*, h^*], \quad h^* = h/r_2. \end{cases}$$

Определяющие соотношения для безразмерных напряжений задаются в явном виде:

$$S_{11} = \Lambda\vartheta + 2M\varepsilon_{11}, \quad S_{13} = 2M\varepsilon_{13}, \quad S_{22} = \Lambda\vartheta + 2M\varepsilon_{22}, \quad S_{33} = \Lambda\vartheta + 2M\varepsilon_{33},$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{u_1^*}{\xi}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3^*}{\partial x}, \quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3^*}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^*}{\partial x} \right), \quad \vartheta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}.$$

Учитывая симметрию задачи, ее решение построим на области, которая представляет собой половину продольного сечения цилиндра с покрытием (Рис. 2).

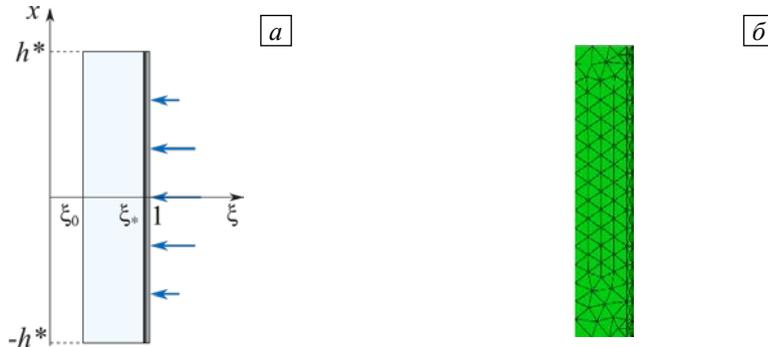


Рис. 2. Часть продольного сечения системы «цилиндр–покрытие» (а) и пример расчетной сетки (б)

Сформулированная безразмерная постановка позволяет осуществлять единые расчеты для цилиндров с покрытием при различных геометрических размерах, но с одинаковым соотношением полувысоты к внешнему радиусу. Следует отметить, что отличительной особенностью подхода на основе МКЭ, по сравнению с первым подходом, является возможность достаточно простого решения задачи при различных видах граничных условий.

Таким образом, с помощью двух описанных подходов можно проводить численное исследование влияния свойств материала покрытия на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) системы «цилиндр–покрытие», строить графики изменения компонент тензора напряжений и поля перемещений в зависимости от геометрических и физико-механических параметров задачи.

### 3. Вычислительные эксперименты

Для оценки точности используемых численных методов и анализа влияния вязкоупругих свойств покрытия на значения компонент функции смещения рассмотрим в качестве примера цилиндр с геометрическими параметрами  $h = 0,5$  м,  $r_1 = 0,8$  м,  $r_* = 0,98$  м,  $r_2 = 1$  м, которым соответствуют безразмерные величины:  $h^* = 0,5$ ,  $\xi_0 = 0,8$ ,  $\xi_* = 0,98$ . Здесь толщина покрытия составляет 10% от толщины цилиндра. Четную функцию изменения нагрузки зададим в виде параболы:  $q(z) = 1 - (z/h)^2$ .

В качестве материала цилиндра возьмем алюминий, у которого следующие физико-механические характеристики: модуль Юнга  $E_{Al} = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu_{Al} = 0,34$  и параметры Ламе

(с точностью до второго знака)  $\lambda_{Al} = \frac{E_{Al}\nu_{Al}}{(1+\nu_{Al})(1-2\nu_{Al})} = \lambda_0\lambda^* = 55,5$  ГПа,

$\mu_{Al} = \frac{E_{Al}}{2(1+\nu_{Al})} = \mu_0\lambda^* = 26,12$  ГПа. Как материал покрытия рассмотрим неоднородный поливинилхлорид

со временем релаксации  $n = 10^{-4}$  с, коэффициентом Пуассона при малых деформациях  $\nu_{PVCi} = 0,38$  и мгновенным модулем упругости  $E_{PVCi} = 2,7$  ГПа на границе раздела ( $\xi = \xi_*$ ). Размерный параметр  $\lambda^*$  зададим единичным:  $\lambda^* = 1$  ГПа. Поскольку исследуется влияние только вязкоупругих свойств покрытия, то примем, что плотность его материала является постоянной ( $\eta(\xi) = 1$ ) и равна плотности алюминия  $\rho^* = 2712$  кг/м<sup>3</sup>. Тогда безразмерный параметр примет значение:  $b = 0,06$ . С учетом того, что длительный модуль больше мгновенного, в качестве законов изменения функций  $\varphi_{ij}$  выберем следующие:

$$\varphi_{11}(\xi) = 1,63 + 1,5\xi, \quad \varphi_{21}(\xi) = 0,19 + 0,81\xi, \quad \varphi_{12}(\xi) = 1,2(1,63 + 1,5\xi), \quad \varphi_{22}(\xi) = 1,2(0,19 + 0,81\xi). \quad (3)$$

На рисунках 3, 4 представлены графики вещественных и мнимых безразмерных функций изменения компонент радиального смещения  $u_1^*(\xi)$  и напряжения  $S_{11}(\xi)$ , построенные по данным решения

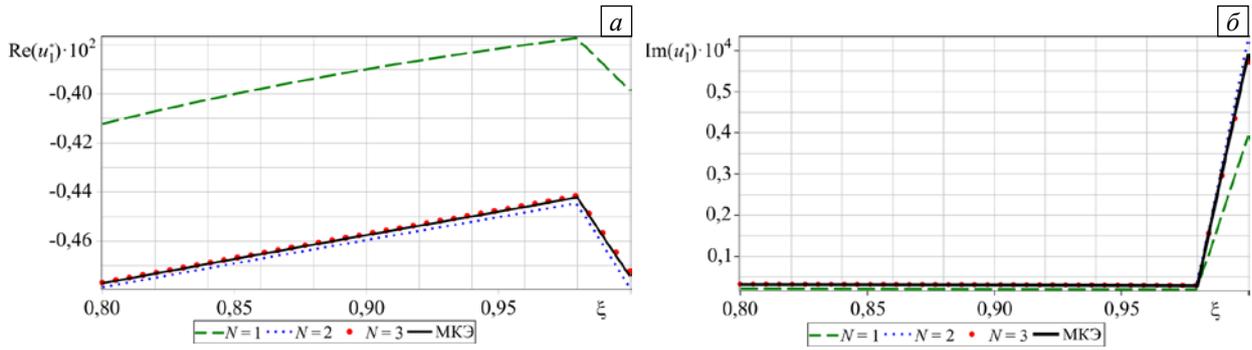


Рис. 3. Графики функций  $Re(u_1^*)$  (а) и  $Im(u_1^*)$  (б)

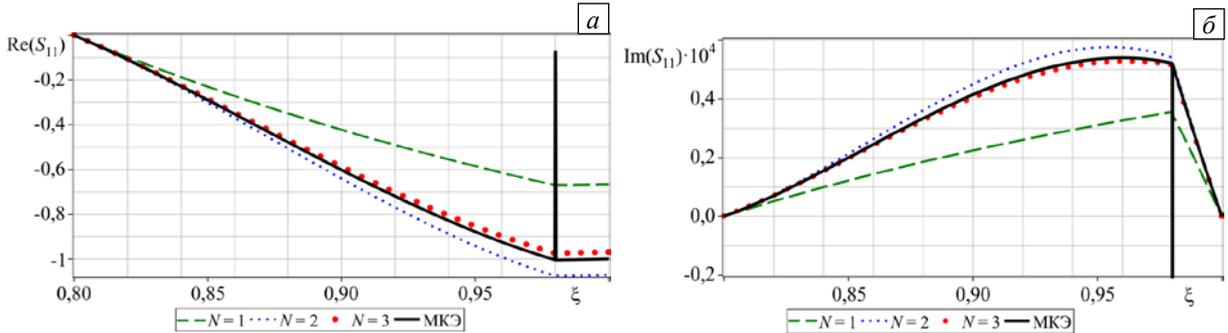


Рис. 4. Графики функций  $Re(S_{11})$  (а) и  $Im(S_{11})$  (б)

задачи (2) с помощью МКЭ при  $x=0$ , и графики соответствующих функций, полученные согласно первому подходу из (1) при различном числе удерживаемых слагаемых  $N$ . Частотный параметр принимает значения:  $\kappa = 1, 2$ . Как видно, имеется сходимость решений. Также наблюдается особенность в графиках функции  $S_{11}(\xi)$  вблизи точки  $\xi = \xi_*$ , отвечающих решению МКЭ. Это обусловлено погрешностью численного определения значений производных от компонент функций смещения в этой точке.

Для оценки сходимости численного решения, реализованного в пакете FlexPDE, были получены значения функции  $Re(u_1^*)$  в трех точках:  $(\xi_0, 0)$ ,  $(\xi_*, 0)$ ,  $(1, 0)$ , при различном числе узлов адаптивной сетки: 56, 102, 239. Число узлов определялось автоматически по заданным в пакете значениям параметра  $ngrid = 1, 14, 28$ , характеризующего плотность генерируемой сетки. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения функции  $Re(u_1^*)$ , вычисленные в трех точках при конечно-элементных сетках

Число узлов сетки	$Re(u_1^*)$		
	$(\xi_0, 0)$	$(\xi_*, 0)$	$(1, 0)$
56	-0,0477131726	-0,0442096610	-0,0474257445
102	-0,0477176110	-0,0442117023	-0,0474274165
250	-0,0477181887	-0,0442122318	-0,0474277848

С помощью используемых методов можно проводить анализ влияния законов неоднородности и параметров материала покрытия на АЧХ и поля смещений кусочно-однородной системы. На рисунке 5а для примера представлены графики  $|u_1^*|$  в точке  $(1, 0)$  при  $\kappa \in [9, 54; 9, 56]$  и различных значениях параметра  $b = 0, 06; 0, 08$ . В качестве других законов изменения свойств рассмотрены следующие:

$$\varphi_{11}(\xi) = 1,63 + 1,5\xi^2, \quad \varphi_{21}(\xi) = 0,19 + 0,81\xi^2, \quad \varphi_{12}(\xi) = 1,2(1,63 + 1,5\xi^2), \quad \varphi_{22}(\xi) = 1,2(0,19 + 0,81\xi^2). \quad (4)$$

Рисунок 5б содержит графики функции  $Re(u_1^*)$ , соответствующие законам (3) и (4) при  $b = 0, 06$  и

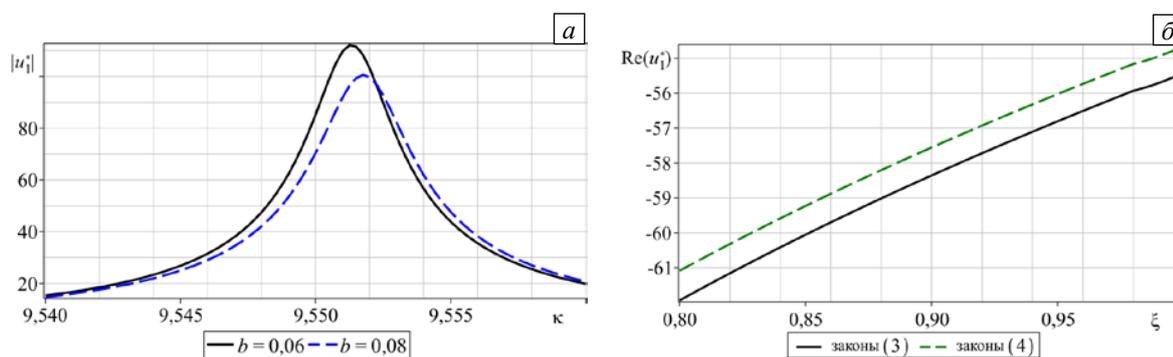


Рис. 5. Графики  $|u_1^*|$ , соответствующие различным значениям параметра  $b$  (а); графики  $\text{Re}(u_1^*)$  при  $b=0,06$  и  $\kappa=9,55$  для законов (3) и (4) (б)

$\kappa = 9,55$ . Следует отметить, что отличие кривых друг от друга наблюдается для частот, близких к частоте, соответствующей максимальному значению  $|u_1^*|$ .

По графикам видно, что имеется существенное влияние свойств материала покрытия на АЧХ системы «цилиндр–покрытие». Такие данные могут быть использованы при исследовании колебательных процессов, соответствующих обратным коэффициентным задачам [8, 9].

#### 4. Заключение

Для решения задачи об установившихся продольно-радиальных колебаниях цилиндра с вязкоупругим покрытием применено два подхода, основанных на численных методах. Проведено сравнение полученных результатов. Как преимущества подхода, базирующегося на представлении (1), можно отметить, во-первых, простоту его реализации в программах, написанных на современных языках программирования C++, Python, C# и других, или в математических пакетах Maple, MATLAB, Mathematica, и, во-вторых, отсутствие особенностей в решении в окрестности границы сопряжения покрытия и цилиндра. О подходе, основанном на МКЭ из пакета FlexPDE, можно сказать, что он позволяет строить решение не только для материалов, свойства которых изменяются лишь по радиальной координате, но и при двумерных законах неоднородности. С помощью МКЭ также допустимо исследование различных видов закреплений и нагрузжений.

Оба подхода дают возможность изучать влияние переменных свойств материала объекта на АЧХ, значения компонент полей перемещений и напряжений, проводить моделирование НДС неоднородных изотропных упругих и вязкоупругих труб, свойства которых описываются переменными параметрами Ламе и плотностью. Вследствие этого на этапе проектирования современных труб (металлопластиковых, из полимерных материалов, в частности, из поливинилхлорида, полиэтилена высокого или низкого давления) становится доступным выбор оптимального материала. Кроме того, выявленный факт влияния переменных свойств материала объекта на его АЧХ и поля смещения может быть полезен при решении обратных коэффициентных задач определения законов изменения этих свойств [8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации (соглашение № 075-15-2019-1928).

#### Литература

1. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. Functionally graded materials: Design, processing and applications. Springer, 1999. 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
2. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 316 с.
3. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Ленанд, 2014. 376 с.
4. Dai H.-L., Rao Y.-N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015 // Compos. Struct. 2016. Vol. 152. P. 199–225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
5. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины // Акустический журнал. 1978. Т. 24, № 6. С. 861–866.
6. Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder // Appl. Math. Comput. 2020. Vol. 382. 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
7. Кристенсен П. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 340 с.
8. Ватульян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
9. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder // Int. J. Mech. Mater. Des. 2021. Vol. 17. P. 321–332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>

## References

1. Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., Ford R.G. *Functionally graded materials: Design, processing and applications*. Springer, 1999. 330 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>
2. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred* [Dynamics of surface of inhomogeneous media]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 316 p.
3. Lomakin V.A. *Teoriya uprugosti neodnorodnykh tel* [The theory of elasticity of inhomogeneous bodies]. Moscow, Lenand, 2014. 376 p.
4. Dai H.-L., Rao Y.-N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Compos. Struct.*, 2016, vol. 152, pp. 199-225. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>
5. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. Osesimmetrichnyye kolebaniya uprugogo tsilindra konechnoy dliny [Axisymmetric vibrations of an elastic cylinder of finite length]. *Akusticheskiy zhurnal – Soviet Physics. Acoustics*, 1978, vol. 24, no. 6, pp. 861-866.
6. Dudarev V.V., Mnukhin R.M., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Effect of material inhomogeneity on characteristics of a functionally graded hollow cylinder. *Appl. Math. Comput.*, 2020, vol. 382, 125333. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125333>
7. Kristensen R.M. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. Academic Press, 1971. 245 p.
8. Vatul'yan A.O. *Koeffitsiyentnyye obratnyye zadachi mekhaniki* [Coefficient inverse problems of mechanics]. Moscow, Fizmatlit, 2019. 272 p.
9. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Mnukhin R.M. Identification of characteristics of a functionally graded isotropic cylinder. *Int. J. Mech. Mater. Des.*, 2021, vol. 17, pp. 321-332. <https://doi.org/10.1007/s10999-020-09527-5>

*Поступила в редакцию 24.05.2021; после доработки 08.07.2021; принята к опубликованию 08.07.2021*

---

### Сведения об авторах

Ватульян Александр Ованесович, дфмн, проф., зав. каф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: aovatulyan@sfnu.ru

Дударев Владимир Владимирович, кфмн, доц., ИММиКН ЮФУ; e-mail: dudarev\_vv@mail.ru