

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.3.21](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.3.21)  
УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ТЕРМОЗАЩИТНЫМ ПОКРЫТИЕМ

А.О. Ватульян<sup>1,2</sup>, С.А. Нестеров<sup>2</sup>, В.О. Юров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

<sup>2</sup>Южный математический институт – филиал ВЦ РАН, Владикавказ, Российская Федерация

Проведено исследование напряженно-деформированного состояния бесконечно длинного термоупругого цилиндра с учетом масштабных эффектов. На внешнюю боковую поверхность цилиндра нанесено термозащитное покрытие, термомеханические характеристики которого являются функциями радиальной координаты. На свободных от напряжений боковых поверхностях заданы тепловые граничные условия 1-го рода. Для учета масштабных эффектов применяется однопараметрическая градиентная теория термоупругости Аифантиса. Задаются дополнительные граничные условия и условия сопряжения для моментных напряжений. Перемещения и напряжения представляются в виде суммы решений задачи термоупругости в классической постановке и градиентных частей. После нахождения радиального распределения температуры задача термоупругости в классической постановке относительно радиальных перемещений и напряжений решается численно методом пристрелки. Добавочные пограничные слагаемые для радиальных перемещений при малых значениях градиентного параметра находятся с помощью асимптотического метода решения линейных дифференциальных уравнений с пространственно изменяющимися коэффициентами (метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна – метода ВКБ). На конкретных примерах проведены вычисления радиальных перемещений, напряжений Коши, моментных напряжений и полных напряжений в случае как однородного, так и неоднородного покрытия. Выяснено следующее: напряжения Коши и полные напряжения испытывают скачок на границе цилиндра и покрытия; моментные напряжения при малых значениях градиентного параметра намного меньше полных напряжений; увеличение масштабного параметра снижает значения радиальных перемещений и полных напряжений; деформации непрерывны, как в случае однородного покрытия, так и неоднородного. Проведено сравнительное исследование влияния величины параметра неоднородности на распределение перемещений и полных напряжений.

*Ключевые слова:* градиентная термоупругость, полый цилиндр, задачи Коши, метод пристрелки, ВКБ-метод, термозащитное покрытие, неоднородные материалы

## SOLUTION OF THE GRADIENT THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A CYLINDER WITH A HEAT-PROTECTED COATING

A.O. Vatulyan<sup>1,2</sup>, S.A. Nesterov<sup>2</sup> and V.O. Yurov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

<sup>2</sup>South Mathematical Institute – branch of VSC RAS, Vladikavkaz, Russian Federation

The investigation of the stress-strain state of an infinitely long thermoelastic cylinder is carried out taking into account the scale effects. A thermal protective coating is applied to the outer side surface of the cylinder, the thermomechanical characteristics of which are functions of the radial coordinate. Thermal boundary conditions of the first kind are set on the stress-free side surfaces of the cylinder. To take into account the scale effects, the one-parameter gradient theory of thermoelasticity proposed by Aifantis is used. Additional boundary conditions and conjugation conditions for couple stresses are specified. The displacements and stresses are represented as the sum of the solutions of the thermoelasticity problem in the classical formulation and the gradient parts. After finding the radial temperature distribution, the thermoelasticity problem in the classical formulation with respect to radial displacements and stresses is solved numerically by the shooting method. Additional boundary layer terms for radial displacements at small values of the gradient parameter are found using the asymptotic method for solving linear differential equations with spatially varying coefficients (the Wentzel–Kramers–Brillouin method – WKB method). Calculations of radial displacements, Cauchy stresses, couple stresses and total stresses in the case of both homogeneous and inhomogeneous coatings are carried out using specific examples. It has been found that the Cauchy stresses and total stresses experience a jump at the boundary between the cylinder and the coating. The couple stresses at small gradient parameters are much less than the total stresses. An increase of the scale parameter reduces the values of radial displacements and total stresses. Deformations are continuous in both cases of coating (homogeneous and inhomogeneous). A comparative study of the influence of the value of the inhomogeneity parameter on the distribution of displacements and total stresses is carried out.

*Key words:* gradient thermoelasticity, hollow cylinder, Cauchy problems, shooting method, WKB method, thermal protection coating, inhomogeneous materials

### 1. Введение

Термозащитные покрытия предназначены для предохранения от преждевременного разрушения структурных элементов конструкций, работающих в высокотемпературном окружении. Главная особенность термозащитных покрытий — низкий коэффициент теплопроводности, вследствие чего температура металлической подложки становится во много раз меньше температуры на поверхности покрытия. Покрытия обычно изготавливают из однородных материалов, например, керамики. Однако вследствие различия термомеханических свойств покрытия и подложки на их поверхности раздела могут возникать области концентрации напряжений, способных привести к отслоению покрытия. В качестве альтернативы однородным и слоистым покрытиям в последние годы выступают неоднородные

покрытия, у которых термомеханические свойства не константы, а функции координат [1]. При их применении скачки материальных свойств на поверхности раздела «покрытие–подложка» отсутствуют.

Наиболее распространенным методом исследования состояния неоднородных тел является метод конечных элементов [2]. Используются и другие приближенные методы. Так, в работе [3] предложен экономный численно-аналитический метод решения задачи термоупругости для вытянутого прямоугольника, состоящего из теплозащитных покрытий двух типов — однородного и функционально-градиентного. Для каждого типа покрытия представлена своя модель термоупругого деформирования системы «покрытие–подложка». В основу моделей деформирования положены специальные законы распределения компонент вектора перемещений и температуры по толщине покрытия, позволившие учесть влияние неоднородности термомеханических характеристик, удовлетворить условия сопряжения полей перемещений, напряжений, температуры и теплового потока. Неизвестные функции, входящие в выражения для трансформант температуры и перемещений, определялись с помощью вариационного принципа термоупругости и метода Канторовича.

При расчетах напряженного состояния в микроразмерных объектах применяется градиентная теория упругости. В этой теории учитываются масштабные эффекты, то есть зависимость напряженно-деформированного состояния (НДС) от характерных размерных параметров. Градиентная теория упругости, сформулированная в середине прошлого века в работах Тупина [4] и Миндлина [5], в дальнейшем получила свое обобщение на теорию термоупругости [6].

Впервые задача Ламе с позиций градиентной теории упругости рассмотрена в [7] для трубы бесконечной длины и сферической оболочки, которые находятся под действием равномерного внешнего и внутреннего давления. Однако практическое использование модели Тупина–Миндлина натолкнулось на вопрос об идентификации 5 дополнительных градиентных модулей. В целях упрощения определяющих уравнений были предложены прикладные градиентные модели Айфантиса [8–11] и Лурье [12], в определяющие уравнения которых включается только один градиентный параметр. В рамках однопараметрической модели Айфантиса в работе [13] на основе вариационного принципа получены уравнения равновесия и граничные условия задачи о равновесии однородного толстостенного полого цилиндра при механическом нагружении, найдено аналитическое решение задачи с помощью аппарата модифицированных функций Бесселя. Аналитические решения получены и для задачи определения НДС неоднородного полого цилиндра при степенных законах неоднородности теплового и механического нагружений [14–16].

Однопараметрические градиентные модели механики применяются и для уточнения НДС слоистых упругих [17–20] и термоупругих [21, 22] тел. В [17] в рамках модели межфазного слоя С.А. Лурье численно исследуется равновесие слоя с покрытием под воздействием локализованной нормальной нагрузки. Решение получено с использованием интегрального преобразования Фурье и его численного обращения. В работе [20] решается задача изгиба микробалки с частичным покрытием. Исследовано влияние изменения величины масштабного параметра на характер распределения в балке смещений, напряжений и на положение ее нейтральной линии. В предположении об одномерности задачи в [21] аналитически исследуется НДС тонкослойных композитных структур при тепловом воздействии. Авторами [22] решена задача градиентной термоупругости для составного стержня, при этом для нахождения напряжений Коши применен асимптотический подход Вишика–Люстерника, учитывающий наличие погранслойных решений в окрестности границ и точки сопряжения стержней. Также исследована зависимость скачка напряжений Коши от соотношения физических характеристик стержней и масштабного параметра.

Целями данной работы являются: постановка задачи градиентной термоупругости для полого цилиндра с термозащитным покрытием при эффективном обезразмеривании; выделение на основе асимптотического метода Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна — метода ВКБ, погранслойных частей решения; использование метода пристрелки для решения задачи термоупругости в классической постановке; тестирование метода решения на примере однородного покрытия; вычисление радиальных перемещений, напряжений Коши, полных и моментных напряжений как для однородного, так и неоднородного покрытия; анализ полученных результатов.

## 2. Определяющие соотношения градиентной механики

В градиентной теории упругости плотность энергии деформации зависит не только от деформации, но и от ее первого градиента [5]. В случае линейного изотропного материала выражение для плотности энергии деформации в рамках однопараметрической модели Айфантиса имеет вид [8]:

$$w = (\lambda/2) \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + l^2 \left( (\lambda/2) \varepsilon_{ii,k} \varepsilon_{jj,k} + \mu \varepsilon_{ij,k} \varepsilon_{ij,k} \right), \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — параметры Ламе,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненты тензора деформаций,  $l$  — градиентный параметр,

который характеризует микроструктурное строение материала и имеет размерность длины (например, для поликристаллических тел — это размер зерна).

В градиентной теории упругости компоненты тензора напряжений Коши  $\tau_{ij}$ , тензора моментных напряжений  $m_{ijs}$ , тензора полных напряжений  $\sigma_{ij}$  представляются в виде:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (2)$$

$$m_{ijs} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij,s}} = l^2 \tau_{ij,s}, \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - m_{ijs,s} = (1 - l^2 \nabla^2) \tau_{ij}. \quad (4)$$

Математическая постановка задачи градиентной термоупругости включает [6]:

– уравнения равновесия, записанные в полных напряжениях

$$\sigma_{ij,j} = 0; \quad (5)$$

– механические статические граничные условия

$$\tau_{ij} n_j - m_{ijs} n_j - (m_{ijs,s} n_s)_j + (m_{ijs,s} n_j n_s)_{,z} n_z = t_i, \quad m_{ijs,s} n_j n_s = \rho_i; \quad (6)$$

– механические кинематические граничные условия

$$u_i = v_i, \quad u_{i,j} n_j = \frac{\partial v_i}{\partial n}; \quad (7)$$

– классическое уравнение теплопроводности

$$(k_{ij} T_{,i})_{,j} = 0; \quad (8)$$

– тепловые граничные условия 1-го рода, заданные на поверхности  $S_T$

$$T|_{S_T} = T_0; \quad (9)$$

– тепловые граничные условия 2-го рода, заданные на поверхности  $S_q$

$$q|_{S_q} = q_0. \quad (10)$$

Здесь:  $t_i$ ,  $\rho_i$  — компоненты векторов сил, заданных на поверхности тела;  $n_i$  — компоненты единичного вектора нормали к поверхности тела в рассматриваемой точке;  $T$  — температура;  $k_{ij}$  — компоненты тензора теплопроводности;  $q$  — тепловой поток;  $S = S_q \cup S_T$  — поверхность тела;  $\nabla$  — оператор набла (дифференциальный оператор Гамильтона); запятая в нижнем индексе означает дифференцирование по координате.

В полярной системе координат выражения для ненулевых компонент тензоров (2)–(4) и компонент векторов (6) имеют вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + \lambda \frac{u_r}{r} - \gamma T, & \tau_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{du_r}{dr} - \gamma T, \\ m_{rrr} &= l^2 \frac{d\tau_{rr}}{dr}, & m_{\varphi\varphi r} &= l^2 \frac{d\tau_{\varphi\varphi}}{dr}, & m_{r\varphi\varphi} &= m_{\varphi r\varphi} = \frac{1}{2} l^2 \frac{(\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi})}{r}, \\ \sigma_{rr} &= \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi r} + m_{r\varphi\varphi}), & \sigma_{\varphi\varphi} &= \tau_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{\varphi\varphi r}) - \frac{1}{r} (m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}), \end{aligned}$$

$$t_r = \tau_{rr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r m_{rrr}) + \frac{1}{r} (m_{\varphi\varphi r} + m_{\varphi r\varphi} + m_{r\varphi\varphi}), \quad \rho_r = m_{rrr}.$$

Здесь  $\gamma$  — коэффициент температурных напряжений.

### 3. Постановка задачи градиентной термоупругости для цилиндра

Рассмотрим бесконечно длинный термоупругий цилиндр, на внешнюю боковую поверхность  $r = h_1$  которого нанесено термозащитное покрытие толщиной  $h$ . На внутренней боковой поверхности цилиндра  $r = a$  поддерживается нулевая температура. Внешняя поверхность покрытия  $r = b$ , где  $b = h_1 + h$ , свободна от напряжений и находится при температуре  $T_0$ . Материал цилиндра однородный, характеризуется коэффициентами Ламе  $\lambda_1$  и  $\mu_1$ , коэффициентом теплопроводности  $k_1$ , коэффициентом температурных напряжений  $\gamma_1$ . Материал покрытия имеет характеристики  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$ ,  $k_2$ ,  $\gamma_2$ , зависящие от координаты  $r$ . Представим материальные характеристики системы «цилиндр–покрытие» в виде кусочно-непрерывных функций:

$$F(r) = \begin{cases} F_1 = \text{const}, & \text{при } r \in [a, b], \\ F_2(r), & \text{при } r \in (b, c], \end{cases} \quad (11)$$

где в качестве  $F_1$  (или  $F_2$ ) может выступать любая из материальных характеристик цилиндра (или покрытия).

Согласно классической постановке задачи на поверхности сопряжения покрытия и цилиндра  $r = h_1$  должны выполняться условия непрерывности по температуре, тепловому потоку, перемещениям и радиальным напряжениям. Поскольку уравнения равновесия в градиентной теории имеют повышенный по сравнению с классической теорией порядок дифференциальных уравнений, то зададим дополнительные граничные условия и условия сопряжения. В качестве дополнительных условий положим: 1) равенство нулю моментных напряжений на боковых поверхностях цилиндра; 2) непрерывность градиентов перемещений и моментных напряжений на поверхности сопряжения цилиндра и покрытия  $r = h_1$  [13]. Для упрощения расчетов градиентный параметр будем считать одинаковым для покрытия и цилиндра, то есть  $l_1 = l_2 = l$ . Таким образом, постановка краевой задачи термоупругого деформирования цилиндра с покрытием примет вид:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad r \in [a, b], \quad (12)$$

$$\sigma_{rr} = \tau_{rr} - l^2 \left( \frac{d^2 \tau_{rr}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{rr}}{dr} - 2 \frac{(\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi})}{r^2} \right), \quad (13)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{\varphi\varphi} - l^2 \left( \frac{d^2 \tau_{\varphi\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tau_{\varphi\varphi}}{dr} - 2 \frac{(\tau_{\varphi\varphi} - \tau_{rr})}{r^2} \right), \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( rk(r) \frac{dT}{dr} \right) = 0, \quad r \in [a, b], \quad (15)$$

$$T^{(1)}(a) = 0, \quad T^{(2)}(b) = T_0, \quad T^{(1)}(h_1) = T^{(2)}(h_1), \quad k_1(h_1) \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r}(h_1) = k_2(h_1) \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r}(h_1), \quad (16)$$

$$t_r^{(1)}(a) = 0, \quad t_r^{(2)}(b) = 0, \quad (17)$$

$$\rho_r^{(1)}(a) = 0, \quad \rho_r^{(2)}(b) = 0, \quad (18)$$

$$u^{(1)}(h_1) = u^{(2)}(h_1), \quad \frac{du^{(1)}}{dr}(h_1) = \frac{du^{(2)}}{dr}(h_1), \quad t_r^{(1)}(h_1) = t_r^{(2)}(h_1), \quad \rho_r^{(1)}(h_1) = \rho_r^{(2)}(h_1). \quad (19)$$

Обезразмерим задачу (12)–(19) согласно формулам:

$$\xi = \frac{r}{b}, \quad U = \frac{u_r}{b}, \quad \Omega_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{\mu_0}, \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\mu_0}, \quad S_{rr} = \frac{\tau_{rr}}{\mu_0}, \quad S_{\varphi\varphi} = \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{\mu_0},$$

$$M_{rrr} = \frac{m_{rrr}}{\mu_0 b}, \quad M_{\varphi\varphi r} = \frac{m_{\varphi\varphi r}}{\mu_0 b}, \quad M_{r\varphi\varphi} = \frac{m_{r\varphi\varphi}}{\mu_0 b}, \quad \bar{t}_r = \frac{t_r}{\mu_0}, \quad \bar{\rho}_r = \frac{\rho_r}{\mu_0 b}, \quad W = \frac{T}{T_0}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_0}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0},$$

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma_0}, \quad R_0 = \frac{h_1}{b}, \quad \beta_0 = \frac{\gamma_0 T_0}{\mu_0}, \quad \alpha = \frac{l}{b}, \quad \bar{a} = \frac{a}{b}, \quad k_0 = \max_{r \in [a,b]} k(r), \quad \mu_0 = \max_{r \in [a,b]} \mu(r), \quad \gamma_0 = \max_{r \in [a,b]} \gamma(r).$$

В безразмерном виде задача (12)–(19) будет следующей:

$$\frac{d\Omega_{rr}}{d\xi} + \frac{\Omega_{rr} - \Omega_{\varphi\varphi}}{\xi} = 0, \quad \xi \in [\bar{a}, 1], \quad (20)$$

$$\Omega_{rr} = S_{rr} - \alpha^2 \left( \frac{d^2 S_{rr}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dS_{rr}}{d\xi} - 2 \frac{(S_{rr} - S_{\varphi\varphi})}{\xi^2} \right), \quad (21)$$

$$\Omega_{\varphi\varphi} = S_{\varphi\varphi} - \alpha^2 \left( \frac{d^2 S_{\varphi\varphi}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dS_{\varphi\varphi}}{d\xi} - 2 \frac{(S_{\varphi\varphi} - S_{rr})}{\xi^2} \right), \quad (22)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \xi \bar{k}(\xi) \frac{dW}{d\xi} \right) = 0, \quad \xi \in [\bar{a}, 1], \quad (23)$$

$$W^{(1)}(\bar{a}) = 0, \quad W^{(2)}(1) = 1, \quad W^{(1)}(R_0) = W^{(2)}(R_0), \quad k_1(R_0) \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \xi}(R_0) = k_2(R_0) \frac{\partial W^{(2)}}{\partial \xi}(R_0), \quad (24)$$

$$\bar{t}_r^{(1)}(\bar{a}) = 0, \quad \bar{t}_r^{(2)}(1) = 0, \quad (25)$$

$$\bar{\rho}_r^{(1)}(\bar{a}) = 0, \quad \bar{\rho}_r^{(2)}(1) = 0, \quad (26)$$

$$U^{(1)}(R_0) = U^{(2)}(R_0), \quad \frac{dU^{(1)}}{d\xi}(R_0) = \frac{dU^{(2)}}{d\xi}(R_0), \quad \bar{t}_r^{(1)}(R_0) = \bar{t}_r^{(2)}(R_0), \quad \bar{\rho}_r^{(1)}(R_0) = \bar{\rho}_r^{(2)}(R_0). \quad (27)$$

При этом безразмерные напряжения Коши запишутся как

$$S_{rr} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{dU}{d\xi} + \bar{\lambda} \frac{U}{\xi} - \beta_0 \bar{\gamma} W, \quad S_{\varphi\varphi} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{U}{\xi} + \bar{\lambda} \frac{dU}{d\xi} - \beta_0 \bar{\gamma} W. \quad (28)$$

#### 4. Решение задачи

Решение задачи несвязанной термоупругости (20)–(27) начнем с нахождения радиального распределения температуры в цилиндре и покрытии. Оно следует из решения задачи теплопроводности в классической постановке (23), (24) и имеет вид:

$$W^{(1)}(\xi) = C_1 f_1(\xi), \quad W^{(2)}(\xi) = C_2 f_2(\xi) + C_3. \quad (29)$$

$$\text{В формуле (29) } f_1(\xi) = \int_{\bar{a}}^{\xi} \frac{d\eta}{\eta \bar{k}_1(\eta)}, \quad f_2(\xi) = \int_{R_0}^{\xi} \frac{d\eta}{\eta \bar{k}_2(\eta)}, \quad C_1 = C_2 = \frac{1}{f_1(R_0) + f_2(1)}, \quad C_3 = \frac{f_1(R_0)}{f_1(R_0) + f_2(1)}.$$

После определения температуры приступим к отысканию перемещений и напряжений, которые, согласно [8], можно представить в виде суммы решения задачи термоупругости в классической постановке и дополнительных градиентных слагаемых:  $U = U_{clas} + U_{grad}$ .

Полагая в (20)–(27)  $\alpha = 0$ , приходим к классической постановке задачи, которая в случае неоднородного материала покрытия может быть решена только численно. Воспользуемся для этого методом пристрелки [23]. После некоторых преобразований получим каноническую систему двух неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно радиальных перемещений  $U_{clas}$  и радиальных напряжений  $\Omega_{clas}$ :

$$U'_{clas} = \frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \Omega_{clas} - \frac{\bar{\lambda}}{(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})\xi} U_{clas} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \beta_0 W, \quad (30)$$

$$\Omega'_{clas} = \frac{1}{\xi} \left( \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} - 1 \right) \Omega_{clas} + \frac{1}{\xi^2} \left( \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \right) U_{clas} + \frac{\bar{\gamma}}{\xi} \left( \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} - 1 \right) \beta_0 W, \quad (31)$$

а также граничные условия:

$$\Omega_{clas}(\bar{a}) = 0, \quad \Omega_{clas}(1) = 0. \quad (32)$$

Согласно методу пристрелки, решение краевой задачи (30)–(32), описываемой неоднородной системой обыкновенных дифференциальных уравнений, можно представить в виде суммы решения неоднородной задачи Коши (30), (31) с нулевыми начальными условиями на внутренней поверхности:  $U_0^{(1)}(\bar{a}) = 0$ ,  $\Omega_0^{(1)}(\bar{a}) = 0$ , и решения однородной задачи Коши (30), (31) с ненулевыми начальными условиями на внутренней поверхности:  $U_1^{(1)}(\bar{a}) = 1$ ,  $\Omega_1^{(1)}(\bar{a}) = 0$ , умноженной на коэффициент  $p$ :

$$\Omega_{clas}(\xi) = \Omega_0(\xi) + p\Omega_1(\xi), \quad U_{clas}(\xi) = U_0(\xi) + pU_1(\xi). \quad (33)$$

При вычислении пар  $(U_0(\xi), \Omega_0(\xi))$ ,  $(U_1(\xi), \Omega_1(\xi))$  в случае функций  $\bar{F}(\xi)$ , не имеющих разрывов 1-го рода, используем стандартные процедуры метода Рунге–Кутты 4–5 порядка точности. Незвестную константу  $p$  определим из начального условия на внешней боковой поверхности цилиндра:  $\Omega_{clas}(1) = \Omega_0(1) + p\Omega_1(1) = 0$ .

При наличии у функций  $\bar{F}(\xi)$  разрыва 1-го рода на поверхности  $\xi = R_0$  осуществим решение задач Коши на отрезке  $[\bar{a}, R_0]$ , затем найденные решения в точке  $\xi = R_0$  зададим как начальные условия для дополнительных задач Коши, которые затем решим на полуинтервале  $[R_0; 1]$ .

Имея решение задачи термоупругости в классической постановке, приступим к нахождению дополнительных градиентных слагаемых при малом значении параметра  $\alpha$  на основе асимптотического метода ВКБ [23]. Для этого вначале составим уравнение равновесия в перемещениях, подставив в (20) выражения для полных напряжений (21), (22), в которые входят напряжения Коши (28). Рассмотрим однородное уравнение равновесия в перемещениях, которое будет представлять уравнение 4-го порядка с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной. Согласно [24], ВКБ-решение будем искать в виде:

$$U_{grad}(\xi) = D(\xi)e^{g(\xi)/\alpha}. \quad (34)$$

Выполним разложение функций  $D(\xi)$  и  $g(\xi)$  по параметру  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} D(\xi) &= D_0(\xi) + D_1(\xi)\alpha^1 + D_2(\xi)\alpha^2 + D_3(\xi)\alpha^3 + \dots, \\ g(\xi) &= g_0(\xi) + g_1(\xi)\alpha^1 + g_2(\xi)\alpha^2 + g_3(\xi)\alpha^3 + \dots. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставим (34) в уравнение равновесия (20) с учетом выражений (35). Группируя слагаемые при одинаковых степенях  $\alpha$ , получим последовательность задач, решая которые найдем

$$D_0(\xi) = \frac{1}{(\bar{\lambda}(\xi) + 2\bar{\mu}(\xi))\sqrt{\xi}} \text{ и два значения } g_0(\xi) \text{ в виде: } g_0(\xi) = \xi \text{ и } g_0(\xi) = -\xi. \text{ Тогда выражения}$$

для градиентной части перемещений цилиндра и покрытия, в силу линейности задачи, представим по параметру  $\alpha$  как линейную комбинацию двух ВКБ-решений:

$$U_{grad}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{(\bar{\lambda}_1(\xi) + 2\bar{\mu}_1(\xi))\sqrt{\xi}} (B_1 e^{-\xi/\alpha} + B_2 e^{\xi/\alpha}), \quad U_{grad}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{(\bar{\lambda}_2(\xi) + 2\bar{\mu}_2(\xi))\sqrt{\xi}} (B_3 e^{-\xi/\alpha} + B_4 e^{\xi/\alpha}). \quad (36)$$

В формуле (36) константы  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  находятся путем удовлетворения граничных условий (26), (27) для моментных напряжений и градиентов радиальных перемещений. Составляются выражения:  $M_{rr} = \alpha^2 S'_{rr}$ , где  $S'_{rr} = \Omega'_{clas} + \Omega'_{grad}$ . Градиентная добавка для радиальных напряжений определяется по формуле:  $\Omega_{grad} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})U'_{grad} + \bar{\lambda}U_{grad}/\xi$ , а для отыскания  $\Omega'_{clas}$  используется выражение (31). При известных теперь константах далее найдем радиальные перемещения и радиальные напряжения Коши, моментные и полные напряжения.

### 5. Результаты расчетов

Рассмотрим результаты вычисления распределения по координате  $\xi$  безразмерных температуры, перемещений, деформаций, напряжений Коши, моментных и полных напряжений в цилиндре с теплозащитным покрытием. Во всех расчетах принято:  $\bar{a} = 0,6$ ;  $R_0 = 0,9$ ;  $\beta_0 = 0,4$ ;  $\bar{\lambda}_1 = \bar{\mu}_1 = \bar{\gamma}_1 = \bar{k}_1 = 1$ .

На примере однородного покрытия проведена численная верификация предложенной схемы решения. При этом в расчетах полагалось, что термомеханические характеристики материала покрытия следующие:  $\bar{\lambda}_2 = 2$ ;  $\bar{\mu}_2 = 1,5$ ;  $\bar{\gamma}_2 = 1$ ;  $\bar{k}_2 = 0,1$ . Аналитические выражения для перемещений в случае однородного покрытия, согласно [15], представлялись в виде:

$$\begin{aligned}
 U^{(1)}(\xi) &= G_1 \xi + \frac{G_2}{\xi} + \frac{\bar{\gamma}_1}{(\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\mu}_1)\xi} \beta_0 \int_{\bar{a}}^{\xi} \eta W^{(1)}(\eta) d\eta + G_3 I_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + G_4 K_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right), \\
 U^{(2)}(\xi) &= G_5 \xi + \frac{G_6}{\xi} + \frac{\bar{\gamma}_2}{(\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\mu}_2)\xi} \beta_0 \int_{R_0}^{\xi} \eta W^{(2)}(\eta) d\eta + G_7 I_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right) + G_8 K_1\left(\frac{\xi}{\alpha}\right),
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

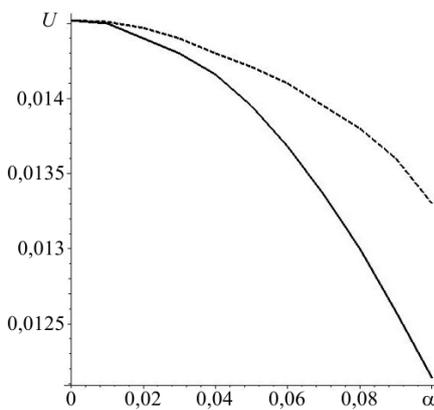


Рис. 1. Зависимость радиального перемещения на внутренней границе цилиндра от градиентного параметра  $\alpha$ ; точное (сплошная линия) и приближенное (штриховая линия) решения

где  $I_1(\xi/\alpha)$ ,  $K_1(\xi/\alpha)$  — модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка. В формуле (37) константы интегрирования  $G_1, \dots, G_8$  определялись путем удовлетворения граничных условий (25)–(27).

На рисунке 1 приведены графики, отражающие зависимость радиального перемещения на внутренней границе цилиндра от параметра  $0 \leq \alpha \leq 0,1$ . При этом для сравнения изображены точное решение, найденное по формулам (37), и приближенное решение с использованием метода пристрелки и асимптотической формулы (36). Максимальное отличие вычисленного перемещения от точного составило 10% при  $\alpha = 0,1$ . При меньших значениях  $\alpha$  решения ближе друг к другу: так, при  $\alpha = 0,01$  они отличаются на 0,07%. Выяснено, что предложенная численная схема решения задачи при  $\alpha < 0,03$  дает погрешность перемещений и напряжений, не превосходящую 1%.

Далее показано распределение температуры (Рис. 2а) и перемещения (Рис. 2б). Для сравнения приведены решения задачи для перемещения в классической постановке при  $\alpha = 0$  и в градиентной постановке при  $\alpha = 0,03$ .

Рисунок 3 содержит распределение радиального напряжения Коши  $S_{rr}$  (Рис. 3а) и моментного напряжения  $M_{rrr}$  (Рис. 3б) при значении масштабного параметра  $\alpha = 0,03$ . На рисунке 3а видно, что радиальные напряжения Коши на границе сопряжения терпят разрыв, что связано как с разностью термомеханических характеристик цилиндра и покрытия, так и с непрерывностью перемещений и их производных на границе раздела разнородных материалов. Из рисунка 3б следует, что моментные

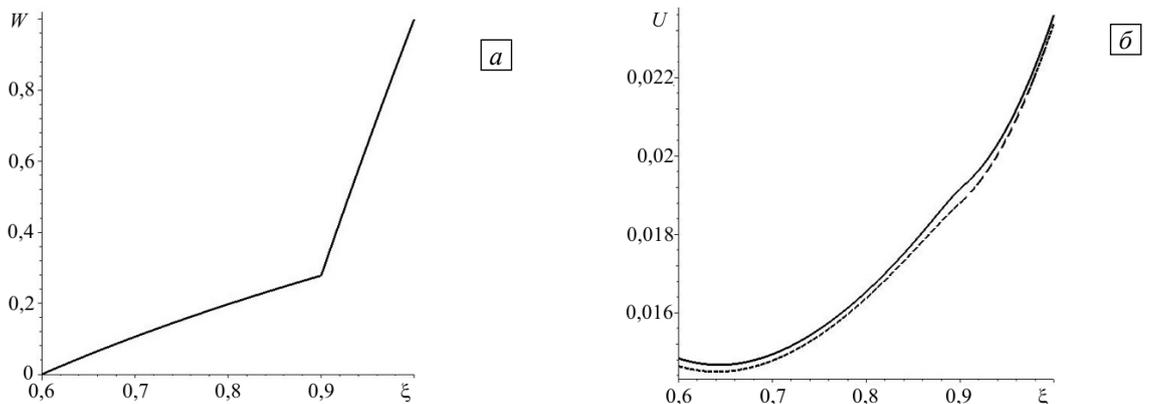


Рис. 2. Распределение по радиальной координате  $\xi$  температуры (а) и перемещения (б); точное решение при  $\alpha = 0$  (сплошная линия) и решение в градиентной постановке при  $\alpha = 0,03$  (штриховая линия)

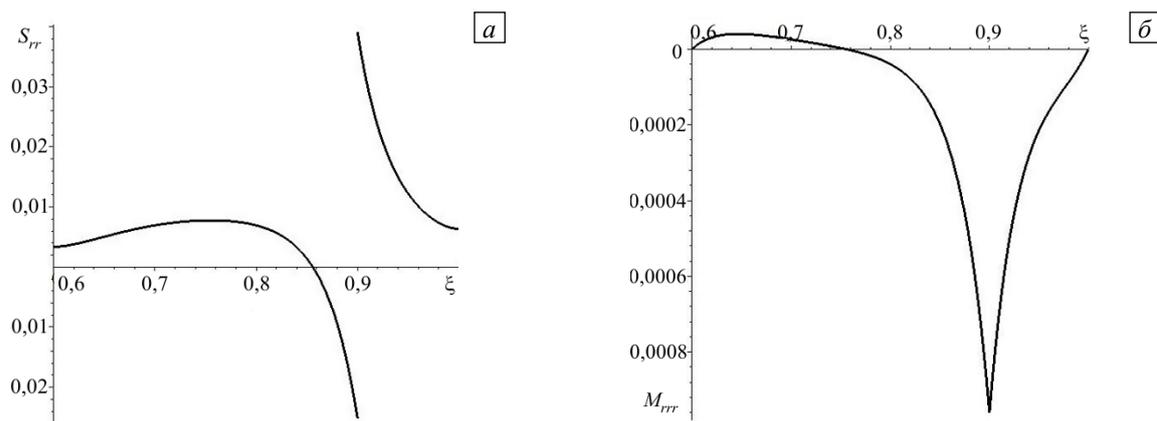


Рис. 3. Распределение по радиальной координате  $\xi$  радиального напряжения Коши (а) и моментного напряжения  $M_{rrr}$  (б) при  $\alpha = 0,03$

напряжения  $M_{rrr}$  при малых значениях градиентного параметра в десятки раз меньше напряжений Коши. Они принимают пиковое значение на поверхности сопряжения.

На рисунке 4 приведено распределение полных напряжений: радиального (Рис. 4а) и окружного (Рис. 4б), в зависимости от радиальной координаты. При этом сплошной линией изображено решение задачи на основе классической постановки, штриховой линией — решение задачи в градиентной постановке при  $\alpha = 0,03$ . По рисункам 2, 4 можно заключить, что с увеличением масштабного параметра уменьшаются значения перемещения и полных окружных напряжений, а полные радиальные напряжения терпят разрыв.

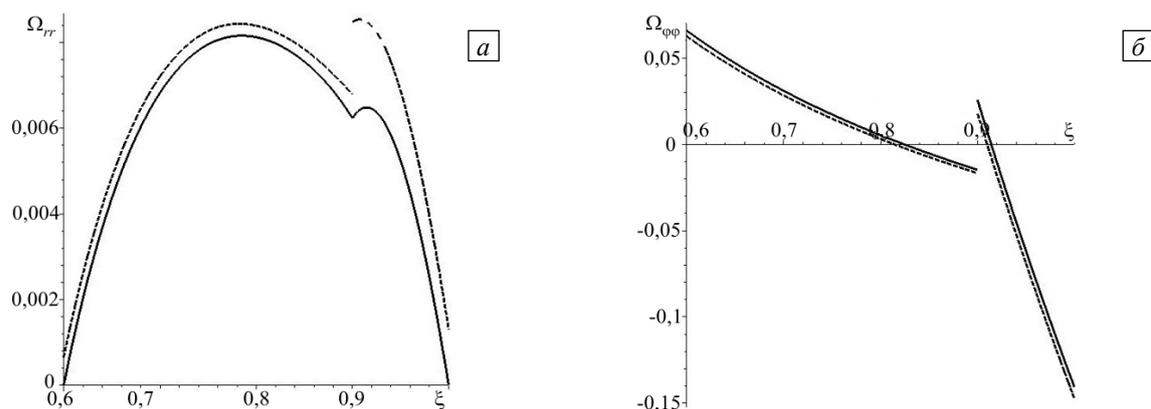


Рис. 4. Распределение по радиальной координате  $\xi$  полных напряжений: радиального напряжения (а) и окружного напряжения (б); точное решение при  $\alpha = 0$  (сплошная линия) и приближенное решение при  $\alpha = 0,03$  (штриховая линия)

Во второй серии расчетов полагалось, что покрытие цилиндра изготовлено из неоднородного материала с законом неоднородности, обеспечивающим непрерывное изменение термомеханических характеристик при переходе через поверхность сопряжения в виде:  $\bar{\lambda}_2(\xi) = 1 + (10\xi - 9)^N$ ,  $\bar{\mu}_2(\xi) = 1 + 0,5(10\xi - 9)^N$ ,  $\bar{\gamma}_2(\xi) = 1$ ,  $\bar{k}_2(\xi) = 1 - 0,9(10\xi - 9)^N$ ,  $N = 1, 2, \dots$

Покажем результаты вычисления перемещений, деформаций и напряжений при показателе неоднородности  $N = 1$ . На рисунке 5 показаны радиальные распределения перемещений (Рис. 5а) и полного окружного напряжения (Рис. 5б). Из рисунка следует, что при неоднородном покрытии, в отличие от случая однородного покрытия, полные окружные напряжения не претерпевают разрыва, а изменяются непрерывно, при этом увеличение градиентного параметра так же, как и при однородном покрытии, приводит к уменьшению перемещений и окружных напряжений.

На рисунке 6 представлено радиальное распределение деформаций  $dU/d\xi$  в системе «цилиндр–покрытие» при однородном и неоднородном ( $N = 1$ ) покрытии. Из рисунка видно, что при  $\alpha = 0$  в случае однородного покрытия деформации терпят разрыв, а при неоднородном покрытии они непрерывны. В градиентной постановке деформации непрерывны при обоих видах покрытия.

Также проведено исследование влияния различных законов неоднородности, характеризующихся параметром  $N$ , на распределение перемещений и напряжений. На рисунке 7 показаны графики радиального распределения перемещений и полных радиальных напряжений при  $\alpha = 0,03$  и различных значениях параметра  $N$ . Из рисунка следует, что закон неоднородности оказывает сильное влияние на распределение перемещений и напряжений.

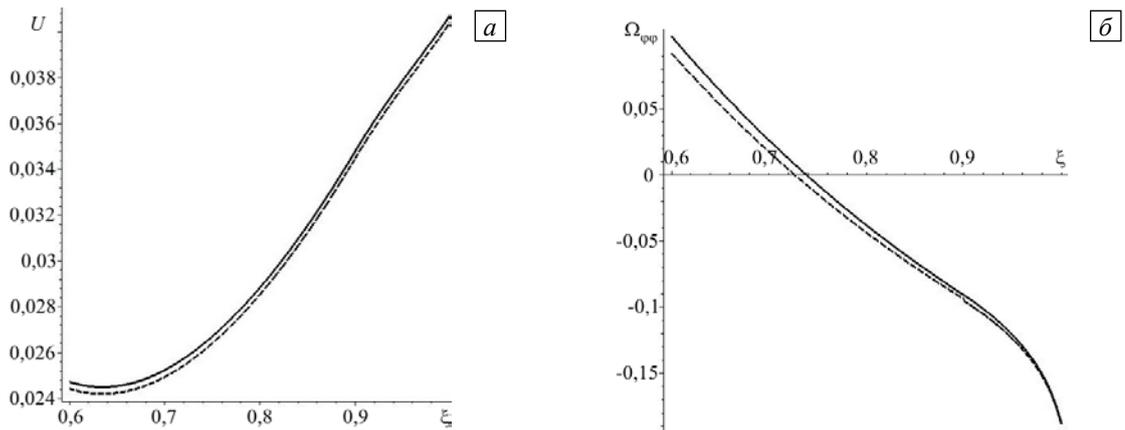


Рис. 5. Распределение по радиальной координате  $\xi$  перемещения (а) и полного окружного напряжения (б); точное решение при  $\alpha = 0$  (сплошная линия) и приближенное решение  $\alpha = 0,03$  (штриховая линия)

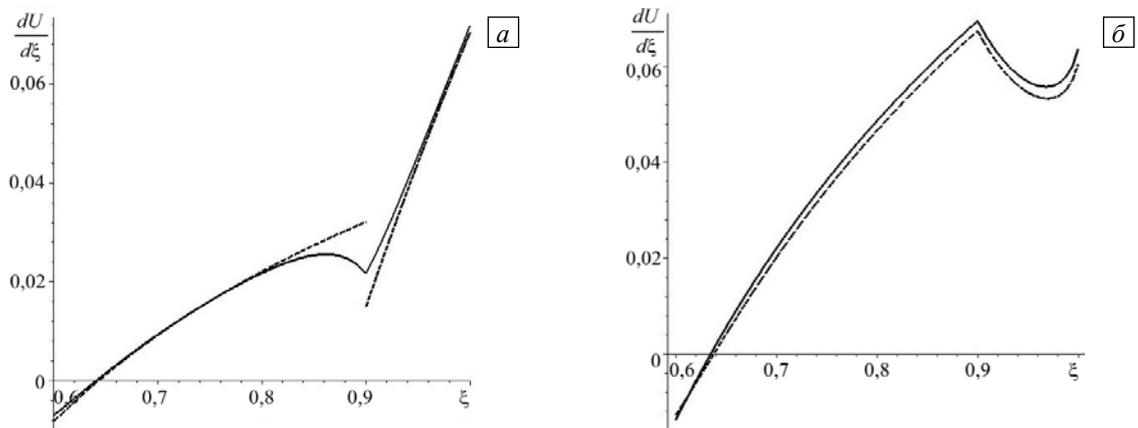


Рис. 6. Распределение по радиальной координате  $\xi$  деформаций  $dU/d\xi$  в случаях однородного (а) и неоднородного (б) покрытия; точное решение при  $\alpha = 0$  (сплошная линия) и приближенное решение при  $\alpha = 0,03$  (штриховая линия)

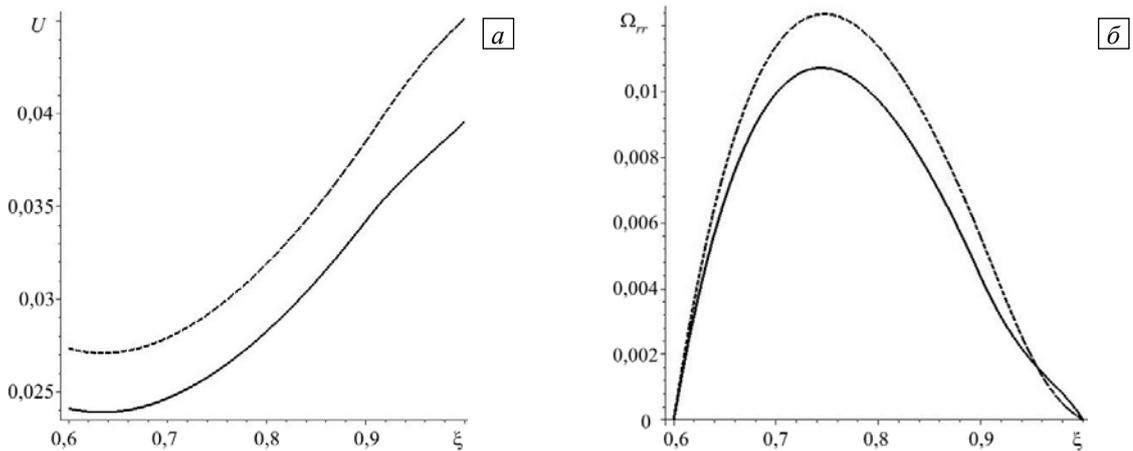


Рис. 7. Распределение по радиальной координате  $\xi$  перемещения (а) и полного радиального напряжения (б) при  $\alpha = 0,03$  и разных значениях параметра неоднородности  $N$ : 1 (сплошная линия) и 2 (штриховая линия)

## 6. Выводы

Исследована задача градиентной термоупругости для цилиндра, имеющего термозащитное покрытие. Перемещения и напряжения представлены в виде суммы решений классической термоупругой задачи и градиентных слагаемых. Задача термоупругости в классической постановке решается методом пристрелки. Градиентные слагаемые получаются при помощи асимптотического метода ВКБ. Показано отличие друг от друга распределений перемещений и напряжений по радиальной координате, рассчитанных по классической теории и найденных с использованием градиентной теории термоупругости. Выяснено, что увеличение значения градиентного параметра снижает значения радиальных перемещений и полных

напряжений. Моментные напряжения при малых значениях градиентного параметра намного меньше полных напряжений. Скачок напряжений Коши в окрестности поверхности сопряжения разнородных материалов объясняется непрерывностью перемещений и их градиентов. Исследовано влияние параметра неоднородности в степенном законе, моделирующем термомеханические характеристики неоднородного покрытия, на распределения по радиальной координате перемещений и полных напряжений.

Учет влияния градиентного параметра при анализе НДС полого цилиндра с покрытием имеет большое практическое значение при расчете на прочность и оценке потери устойчивости термозащитного покрытия. Разработанный подход может быть применен при нахождении приближенного аналитического решения задачи градиентной термоупругости для конечного цилиндра.

## Литература

1. *Padture N.R., Gell M., Jordan E.H.* Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications // *Science*. 2002. Vol. 296. P. 280-284. <https://doi.org/10.1126/science.1068609>
2. *Bialas M.* Finite element analysis of stress distribution in thermal barrier coatings // *Surf. Coating Tech.* 2008. Vol. 202. P. 6002-6010. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2008.06.178>
3. *Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R.* Regarding some thermoelastic models of «coating-substrate» system deformation // *Continuum Mech. Thermodyn.* 2020. Vol. 32. P. 1173-1186. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00824-9>
4. *Toupin R.A.* Elastic materials with couple-stresses // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 385-414. <https://doi.org/10.1007/BF00253945>
5. *Mindlin R.D.* Micro-structure in linear elasticity // *Arch. Rational Mech. Anal.* 1964. Vol. 16. P. 51-78. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>
6. *Ahmadi G., Firoozbakhsh K.* First strain gradient theory of thermoelasticity // *Int. J. Solid. Struct.* 1975. Vol. 11. P. 339-345. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90073-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90073-6)
7. *Лурье М.В.* Задачи Ламе в градиентной теории упругости // *ДАН СССР*. 1968. Т. 181, № 5. С. 1087-1089.
8. *Altan B.S., Aifantis E.C.* On some aspects in the special theory of gradient elasticity // *JMBM*. 1997. Vol. 8. P. 231-282. <https://doi.org/10.1515/JMBM.1997.8.3.231>
9. *Askas H., Aifantis E.C.* Numerical modeling of size effects with gradient elasticity – Formulation, meshless discretization and examples // *Int. J. Fract.* 2002. Vol. 117. P. 347-358. <https://doi.org/10.1023/A:1022225526483>
10. *Askas H., Aifantis E.C.* Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results // *Int. J. Solid. Struct.* 2011. Vol. 48. P. 1962-1990. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>
11. *Aifantis E.C.* Gradient effects at the macro, micro and nano scales // *JMBM*. 1994. Vol. 5. P. 335-353. <https://doi.org/10.1515/JMBM.1994.5.3.355>
12. *Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И.* Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктурой. М.: Изд-во МАИ, 2011. 160 с.
13. *Gao X.-L., Park S.K.* Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem // *Int. J. Solid. Struct.* 2007. Vol. 44. P. 7486-7499. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022>
14. *Chu L., Dui G.* Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity // *Int. J. Mech. Sci.* 2018. Vol. 148. P. 366-373. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011>
15. *Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R.* Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders // *Scientia Iranica B*. 2014. Vol. 21. P. 1415-1423.
16. *Hosseini M., Dini A., Eftekhari M.* Strain gradient effects on the thermoelastic analysis of a functionally graded micro-rotating cylinder using generalized differential quadrature method // *Acta Mech.* 2017. Vol. 228. P. 1563-1580. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1780-5>
17. *Лурье С.А., Соляев Ю.О., Рабинский Л.Н., Кондратова Ю.Н., Волов М.И.* Моделирование напряженно-деформированного состояния тонких композитных покрытий на основе решения плоской задачи градиентной теории упругости для слоя // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2013. № 1. С. 161-181.
18. *Li A., Zhou S., Zhou S., Wang B.* A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory // *Compos. Struct.* 2014. Vol. 108. P. 259-266. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.020>
19. *Li A., Zhou S., Zhou S., Wang B.* A size-dependent model for bi-layered Kirchhoff micro-plate based on strain gradient elasticity theory // *Compos. Struct.* 2014. Vol. 113. P. 272-280. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.03.028>
20. *Fu G., Zhou S., Qi L.* The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam // *Int. J. Mech. Sci.* 2019. Vol. 152. P. 411-419. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037>
21. *Лурье С.А., Фам Т., Соляев Ю.О.* Градиентная модель термоупругости и ее приложения к моделированию тонкослойных композитных структур // *МКМК*. 2012. Т. 18, №3. С. 440-449.
22. *Vatulyan A.O., Nesterov S.A.* On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity // *Materials Physics Mechanics*. 2020. Vol. 46. P. 27-41. [https://doi.org/10.18149/MPM.4612020\\_3](https://doi.org/10.18149/MPM.4612020_3)
23. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to numerical analysis. Springer, 2002. 746 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3>
24. *Маслов В.П.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
25. *Ватulyan A.O., Нестеров С.А.* О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // *Изв. Сарат. Ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, № 1. С. 35-47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

## References

1. Padture N.R., Gell M., Jordan E.H. Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications. *Science*, 2002, vol. 296, pp. 280-284. <https://doi.org/10.1126/science.1068609>
2. Bialas M. Finite element analysis of stress distribution in thermal barrier coatings. *Surf. Coating Tech.*, 2008, vol. 202, pp. 6002-6010. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2008.06.178>
3. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Regarding some thermoelastic models of «coating-substrate» system deformation. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 2020, vol. 32, pp. 1173-1186. <https://doi.org/10.1007/s00161-019-00824-9>
4. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1962, vol. 11, pp. 385-414. <https://doi.org/10.1007/BF00253945>
5. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, pp. 51-78. <https://doi.org/10.1007/BF00248490>
6. Ahmadi G., Firoozbakhsh K. First strain gradient theory of thermoelasticity. *Int. J. Solid Struct.*, 1975, vol. 11, pp. 339-345. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(75\)90073-6](https://doi.org/10.1016/0020-7683(75)90073-6)
7. Lur'ye M.V. Zadachi Lamé v gradiyentnoy teorii uprugosti [Lamé problems in the gradient theory of elasticity]. *DAN SSSR – Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1968, vol. 181, no. 5, pp. 1087-1089.
8. Altan B.S., Aifantis E.C. On some aspects in the special theory of gradient elasticity. *JMBM*, 1997, vol. 8, pp. 231-282. <https://doi.org/10.1515/JMBM.1997.8.3.231>
9. Askes H., Aifantis E.C. Numerical modeling of size effects with gradient elasticity – Formulation, meshless discretization and examples. *Int. J. Fract.*, 2002, vol. 117, pp. 347-358. <https://doi.org/10.1023/A:1022225526483>
10. Askes H., Aifantis E.C. Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *Int. J. Solid. Struct.* 2011. Vol. 48. P. 1962-1990. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006>
11. Aifantis E.C. Gradient effects at the macro, micro and nano scales. *JMBM*, 1994, vol. 5, pp. 335-353. <https://doi.org/10.1515/JMBM.1994.5.3.355>
12. Lur'ye S.A., Belov P.A., Rabinsky L.N., Zhavoronok S.I. *Masshtabnyye efekty v mekhanike sploshnykh sred. Materialy s mikro- i nanostrukturnoy* [Scale effects in continuum mechanics. Materials from micro- and nanostructures]. Moscow, Izd-vo MAI, 2011. 160 p.
13. Gao X.-L., Park S.K. Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem. *Int. J. Solid. Struct.*, 2007, vol. 44, pp. 7486-7499. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.022>
14. Chu L., Dui G. Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity. *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, vol. 148, pp. 366-373. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011>
15. Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R. Strain gradient thermoelasticity of functionally graded cylinders. *Scientia Iranica B*, 2014, vol. 21, pp. 1415-1423.
16. Hosseini M., Dini A., Eftekhari M. Strain gradient effects on the thermoelastic analysis of a functionally graded micro-rotating cylinder using generalized differential quadrature method. *Acta Mech.*, 2017, vol. 228, pp. 1563-1580. <https://doi.org/10.1007/s00707-016-1780-5>
17. Lurie S.A., Solyaev Yu.O., Rabinsky L.N., Kondratova Yu.N., Volov M.I. Simulation of the stress-strain state of thin composite coating based on solutions of the plane problem of strain-gradient elasticity for layer. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2013, no. 1, pp. 161-181.
18. Li A., Zhou S., Zhou S., Wang B. A size-dependent bilayered microbeam model based on strain gradient elasticity theory. *Compos. Struct.*, 2014, vol. 108, pp. 259-266. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.09.020>
19. Li A., Zhou S., Zhou S., Wang B. A size-dependent model for bi-layered Kirchhoff micro-plate based on strain gradient elasticity theory. *Compos. Struct.*, 2014, vol. 113, pp. 272-280. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.03.028>
20. Fu G., Zhou S., Qi L. The size-dependent static bending of a partially covered laminated microbeam. *Int. J. Mech. Sci.*, 2019, vol. 152, pp. 411-419. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.12.037>
21. Lurie S.A., Pham T., Soliaev J.O. Gradient model of thermoelasticity and its application for the modeling of thin layered composite structures. *MKMK – Journal of Composite Mechanics and Design*, 2012, vol. 18, no. 3, pp. 440-449.
22. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the deformation of a composite rod in the framework of gradient thermoelasticity. *Materials Physics Mechanics*, 2020, vol. 46, pp. 27-41. [https://doi.org/10.18149/MPM.4612020\\_3](https://doi.org/10.18149/MPM.4612020_3)
23. Stoer J., Bulirsch R. *Introduction to numerical analysis*. Springer, 2002. 746 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3>
24. Maslov V.P. *Kompleksnyy metod VKB v nelineynykh uravneniyakh* [Complex WKB method in nonlinear equation]. Moscow, Nauka, 1977. 384 p.
25. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. On the identification problem of the thermomechanical characteristics of the finite functionally graded cylinder. *Izv. Sarat. Un-ta. Nov. ser. Ser. Matematika. Mekhanika. Informatika – Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, no. 1, pp. 35-47. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47>

Поступила в редакцию 14.04.2021; после доработки 16.06.2021; принята к опубликованию 22.06.2021

## Сведения об авторах

Ватульян Александр Ованесович, дфмн, проф., зав. каф., Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета (ИММиКН ЮФУ), 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: aovatulyan@sfsedu.ru

Нестеров Сергей Анатольевич, кфмн, снс, Южный математический институт – филиал ВНИЦ РАН (ЮМИ ВНИЦ РАН), 362027, г. Владикавказ, ул. Ватулина, д. 53; e-mail: 1079@list.ru

Юров Виктор Олегович, б/с, мнс, ИММиКН ЮФУ; e-mail: vyurov@sfsedu.ru