

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.2.18](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.18)

УДК 532.5.032

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СУСПЕНЗИЙ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

О.И. Скульский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Концентрированные суспензии твердых частиц, широко используемые в фармацевтической, косметической и пищевой промышленности, демонстрируют сложную реологию. В реометрических одномерных течениях концентрированных суспензий может наблюдаться плавное или скачкообразное увеличение напряжений при плавном увеличении интенсивности скорости деформации. Это имеет отношение к появлению фазового перехода первого рода. Ранее предложена феноменологическая реологическая модель концентрированной суспензии твердых частиц в ньютоновской дисперсионной жидкости, характеризующаяся S -образной кривой течения и описывающая как непрерывное, так и скачкообразное увеличение интенсивности напряжений при равномерном увеличении интенсивности скорости деформации. Получены точные аналитические формулы для профилей скоростей течений суспензий в ротационных вискозиметрах. Предложенная модель модифицирована для учета неньютоновских свойств дисперсионной среды, при малых интенсивностях напряжений проявляющей псевдопластические свойства, а при больших – дилатантные. В данной статье для исследования особенностей течений в двумерных областях на ее основе создана численная модель расчета методом конечных элементов полей скоростей и диффузионно-конвективного переноса твердых частиц. В результате вычислительных экспериментов выявлены особенности течения высококонцентрированных суспензий в плоских и осесимметричных каналах. Показано, что в плоском диффузоре, в отличие от ньютоновской и псевдопластической жидкостей, продольная скорость суспензии замедляется у стенок, где напряжения максимальны, а в центральной части канала увеличивается. У затопленной струи в ограниченной стенками области обнаружено, что с ростом средней скорости поступающей чистой жидкости более, чем на 0,01 м/с, наблюдается образование локального вихря скорости, ограниченного слоем с высокой концентрацией частиц и более вязкой средой. Внутри вихря концентрация частиц минимальна.

Ключевые слова: высококонцентрированные суспензии, реологическая модель, неньютоновская дисперсионная среда, диффузионно-конвективный перенос, численное решение, плоские и осесимметричные течения

FEATURES OF THE FLOW OF CONCENTRATED SUSPENSIONS OF SOLID PARTICLES

O.I. Skul'skiy

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

Concentrated suspensions of solids, widely used in the pharmaceutical, cosmetic and food industries, exhibit complex rheology. In the rheometric one-dimensional flows of concentrated suspensions, a smooth or abrupt increase in stresses with a smooth increase in the strain rate intensity can be observed. This is related to the appearance of a first-order phase transition. In our previous work, a phenomenological rheological model of a concentrated suspension of solid particles in a Newtonian dispersion liquid has been developed. This model is characterized by an S -shaped flow curve and describes both continuous and abrupt increases in the stress intensity with a uniform increase in the strain rate intensity. In this work, exact analytical formulas are obtained for the flow velocity profiles of suspensions measured using rotary viscometers. The model proposed before is modified to take into account the non-Newtonian properties of the dispersion medium, which demonstrates pseudoplastic properties at low stress intensities and dilatant properties at high stress intensities. Based on the developed numerical model, the features of the flow of highly concentrated suspensions in plane and axisymmetric channels are analyzed. It is shown that in a flat diffuser, in contrast to Newtonian and pseudoplastic fluids, the longitudinal velocity of the suspension slows down near the walls, where the stresses are maximum, and accelerates in the central part of the channel. Calculations for the submerged jet in the area bounded by the walls show that, with an increase in the average velocity of the incoming pure liquid by more than 0.01 m/s, there occurs a local velocity vortex bounded by a layer with high particle concentration and more viscous medium; particle concentration inside the vortex is minimum.

Key words: highly concentrated suspensions, rheological model, non-Newtonian dispersion medium, diffusion-convective transfer, numerical solution, plane and axisymmetric flows

1. Введение

Суспензии концентрированных твердых частиц широко используются в медицине, парфюмерии, химической, нефтяной и газовой промышленности при гидравлическом разрыве пласта. Отличительной особенностью суспензий твердых частиц является непрерывное или скачкообразное увеличение напряжений с ростом скорости сдвига. При высоких концентрациях частиц может происходить заклинивание потока.

Реологии концентрированных суспензий и математическому моделированию их течений посвящено большое количество публикаций [1–18]. В последнее время появился ряд работ, содержащих результаты экспериментальных исследований и теоретического моделирования реологических свойств высококонцентрированных суспензий, демонстрирующих скачкообразный отклик напряжений на плавное увеличение скорости сдвига [19–24]. При известной интенсивности напряжений кривая течения однозначна, но немонотонна и имеет S -образный вид. Такая неньютоновская реология возникает

из-за фрикционного взаимодействия частиц. Дополнительные эффекты вносят неньютоновские свойства чистой дисперсионной фазы [25–27].

Простейшая модель, учитывающая линейное возрастание вязкости при увеличении среднего напряжения, использована в работе [28], где получены аналитические выражения для распределения давления и профиля продольной скорости при напорном течении в плоском, круглом и кольцевом каналах с подвижной границей. Однако эта модель не способна описать скачкообразный рост напряжения в ответ на увеличение скорости сдвига.

В предыдущей статье [29] автором предложена феноменологическая модель суспензии с ньютоновской дисперсионной фазой, позволяющая получить точные аналитические выражения для основных реометрических течений, необходимых для перехода от измеряемых в эксперименте интегральных характеристик к кривой течения, а также для определения материальных констант, входящих в модель.

В случае если дисперсионная жидкость является неньютоновской, при малых скоростях деформации суспензия проявляет псевдопластические свойства, а при больших — дилатантные. Неньютоновская реология концентрированных суспензий является результатом конкуренции и баланса между гидродинамическими (диссипативными) и термодинамическими (консервативными) силами, которые приводят к неравновесной микроструктуре в потоке. Суспензии твердых частиц склонны к образованию различных структур при механических воздействиях. На рисунках 1 и 2 приведены примеры структур при различных концентрациях и знакопеременных нагрузках из статьи [32].

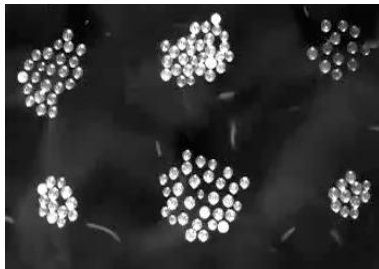


Рис. 1. Кластеры, образующиеся при низкой концентрации частиц (суспензия проявляет псевдопластические свойства)

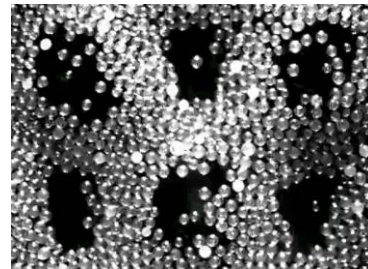


Рис. 2. Антикластеры, образующиеся при высокой концентрации частиц (суспензия проявляет дилатантные свойства)

Также в статье [29] для учета неньютоновских свойств дисперсионной среды предлагается модификация модели, заключающаяся в добавлении закона Эллиса [2, 10] для дисперсионной фазы:

$$\eta_{ef} = \frac{\mu_0}{1 + a(S/S_0)^{b-1}} + \eta_0 \left[1 + (S/S_0)^c \right] / \left(1 + \varepsilon (S/S_0)^c \right), \quad (1)$$

где $S = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau})}$ — интенсивность напряжения, $\varepsilon = m \frac{\phi^* - \phi}{\phi^*}$ — параметр, ϕ, ϕ^* — локальная и предельная концентрации, S_0, η_0 — характерные значения напряжения и вязкости, μ_0, a, b, c — параметры модели, m — подгоночный параметр.

Типичный вид зависимости эффективной вязкости от интенсивности напряжений представлен на рисунке 2. Модель (1) при $\varepsilon=1$ описывает монотонно убывающую вязкость чистой дисперсионной фазы. Как показали пробные численные расчеты плоского течения Пуазейля, в зависимости от величины приложенного давления на входе и параметров модели, профили скорости в поперечном сечении и скорости сдвига могут иметь разнообразие сложные формы.

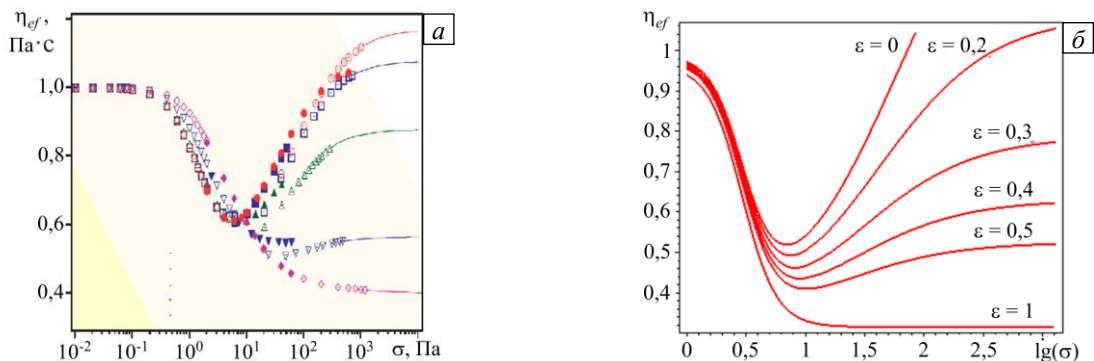


Рис. 3. Типичный вид кривых течения: эксперимент (а), расчет по модели (1) (б)

Целью данного исследования является дальнейшее развитие методов численного моделирования двухмерных задач течения суспензий с неоднородным распределением концентрации твердых частиц.

2. Постановка задачи

В общем случае течения концентрированных суспензий твердых частиц с неньютоновской дисперсионной фазой описываются системой дифференциальных уравнений, отражающих законы сохранения импульса и массы:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[\eta_{ef} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \right], \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (3)$$

и конвективно-диффузионный перенос:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla \phi), \quad (4)$$

где t — время, \mathbf{V} — вектор скорости, ∇ — оператор дифференцирования, p — давление (шаровая часть тензора напряжений), η_{ef} — эффективная вязкость, ρ — плотность, λ — коэффициент диффузии, ϕ — концентрация частиц.

Система (2)–(4) с реологическим уравнением (1) замыкается соответствующими граничными условиями. Так, задаются условия прилипания для скорости $\mathbf{V}_\Gamma = 0$ на неподвижных стенках или условия Коши по напряжениям $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}$ на свободных границах. Для концентрации ставятся условия первого ($\phi = \phi_\Gamma$) или третьего рода ($\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = h(\phi - \phi^*)$, где $\nabla \phi$, \mathbf{n} — нормаль к границе, h — коэффициент передачи).

3. Метод решения

Система дифференциальных уравнений (2)–(4) записывается в форме Галеркина:

$$\int_V \rho \mathbf{U} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) - (\nabla \cdot \mathbf{U}) p + \nabla \mathbf{U} : \left[\eta_{ef} (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T) \right] dV = \int_S \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} dS, \quad (5)$$

$$\int_V \phi (\nabla \cdot \mathbf{V}) dV = 0,$$

$$\int_V \left[\chi \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \phi \right) + \nabla \chi \cdot (\lambda \nabla \phi) \right] dV = \int_S \chi h (\phi - \phi^*) dS,$$

где \mathbf{U} , ϕ , χ — взвешивающие функции

Для решения системы (5) методом конечных элементов (МКЭ) использовался оригинальный пакет FEM FLOW, снабженный пре- и постпроцессором, разработанный при участии автора [35]. Решение сводилось к последовательности линеаризованных задач, в которых нелинейные члены рассчитывались по результатам предыдущих итераций. На каждой итерации дискретизация линеаризованных задач осуществлялась с помощью треугольных конечных элементов с линейной аппроксимацией компонент вектора скорости и концентрации, а давление принималось кусочно-постоянным в пределах четырехугольников, состоящих из двух треугольных элементов. Сходимость итерационного процесса оценивалась по эффективной вязкости, зависящей от локальных значений концентрации и интенсивности напряжений и вычисляемой для каждого элемента до выполнения условия:

$$\max \left| \left(\eta_{ef}^k - \eta_{ef}^{k-1} \right) / \eta_0 \right| < \delta,$$

где $\delta = 10^{-3}$ — заданное малое число, k — номер итерации.

4. Течение в плоском канале суспензии с ньютоновской дисперсионной фазой известной постоянной концентрации

Численно решены задачи течения суспензии в плоском диффузоре при заданной постоянной концентрации частиц.

Система уравнений метода конечных элементов в форме Галеркина для плоского канала имеет вид:

$$\int_0^L \int_0^h \left\{ \rho u_x \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial u_x}{\partial x} p + \eta_{ef} \left[2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy = F_x \int_0^h u_x dy,$$

$$\int_0^L \int_0^h \left\{ \rho u_y \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial u_y}{\partial y} p + \eta_{ef} \left[2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy = 0,$$

$$\int_0^L \int_0^h \alpha \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\eta_{ef} = \frac{\mu_0}{1 + a(S/S_0)^{b-1}} + \eta_0 \left[1 + (S/S_0)^c \right] / \left(1 + \varepsilon(S/S_0)^c \right),$$

где v_x, v_y, p — компоненты вектора скорости и давление, u_x, u_y, α — взвешивающие функции.

Во входном сечении канала задавалась поверхностная нагрузка F_x , в числовом выражении равная давлению на входе. На неподвижных верхней и нижней границах ставились условия прилипания. Использовалась модель (1) с материальными константами $\varepsilon = 0,29$, $\phi^* = 0,56$, $\mu_0 = 1,34$ Па·с, $\eta_0 = 0,63$ Па·с, $S_0 = 1$ Па, $a = 40$, $b = 6$, $c = 1$.

Результаты расчетов полей скоростей ньютоновской, псевдопластической жидкостей и суспензии в плоском диффузоре на сетке, состоящей из 50000 треугольных элементов, приведены на рисунке 4.

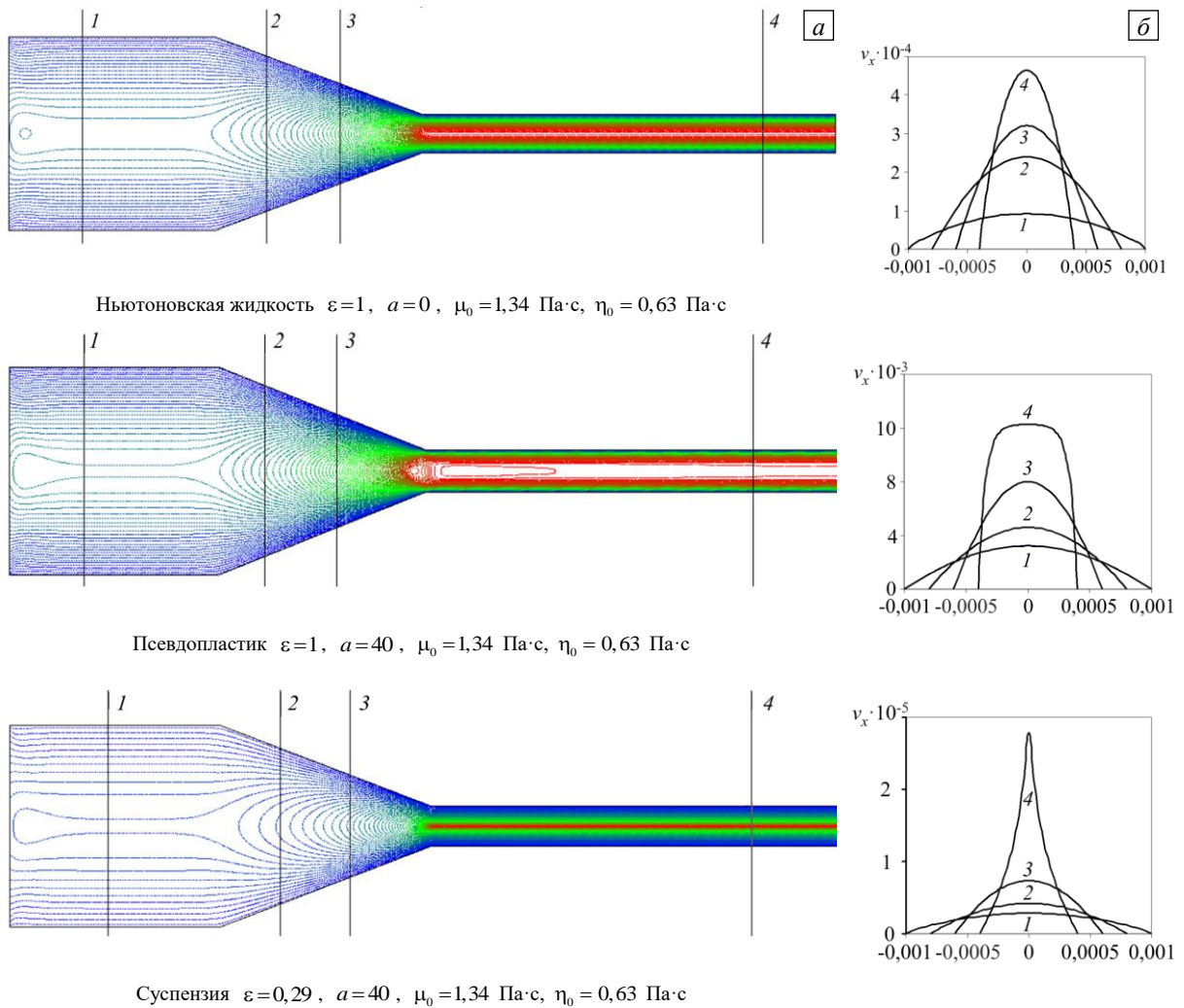


Рис. 4. Изолинии продольной скорости (а) и профили продольной скорости по сечениям (б)

Отметим, что, в отличие от ньютоновской и псевдопластической жидкости, у суспензии продольная скорость замедляется у стенок, где напряжения максимальны, а в центральной части канала она возрастает.

5. Течение суспензии с неньютоновской дисперсионной фазой в осесимметричном канале

Рассмотрим более сложную задачу, имеющую отношение к теории затопленных струй [34]. На рисунке 5 приведена упрощенная схема прибора, применяемого для изучения бактериальной микрофлоры [30].



Рис. 5. Схема прибора

Расчетная область представляется как стакан с вставленной в него трубкой, не доходящей до дна. В исходном состоянии пространство между стаканом и трубкой заполнено твердыми частицами. Через некоторое время после начала подачи в трубку чистой дисперсионной среды под действием приложенного на входе в трубку давления P_0 или заданной средней скорости V_0 некоторая доля частиц выносится за пределы области. На шероховатых внутренних стенках канала образуется слой, определяемый конкурирующими процессами: прилипанием частиц и их смывом потоком. В итоге устанавливается равновесный режим. В данной модели принимается, что граничные слои имеют постоянную предельную концентрацию ϕ^* .

Система уравнений в форме Галеркина, описывающая ламинарное течение суспензии в осесимметричном канале длиной L и радиусами R_z (наружным) и $R(0)$ (внутренним) при решении задачи методом конечных элементов имеет вид:

$$2\pi \int_0^L \int_0^{R(z)} \left\{ \rho u_r \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) p + \eta_{ef} \left[2 \frac{u_r v_r}{r^2} + 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{\partial u_r}{\partial z} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \right\} r dr dz = 0,$$

$$2\pi \int_0^L \int_0^{R(z)} \left\{ \rho u_z \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial z} p + \eta_{ef} \left[2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial u_z}{\partial r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right] \right\} r dr dz = 2\pi \int_0^{R(0)} u_z F_z r dr,$$

$$2\pi \int_0^L \int_0^{R(z)} \phi \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) r dr dz = 0,$$

$$2\pi \int_0^L \int_0^{R(z)} \left\{ \chi \left(v_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + \lambda \left(\frac{\partial \chi}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} r dr dz = 2\pi \int_0^{R(0)} \chi \alpha (\phi - \phi^*) r dr,$$

$$\eta_{ef} = \frac{\mu_0}{1 + a(S/S_0)^{b-1}} + \eta_0 \left[1 + (S/S_0)^c \right] / \left(1 + \varepsilon (S/S_0)^c \right),$$

где v_r , v_z , p — компоненты вектора скорости и давление, ϕ — локальная концентрация частиц, u_x , u_y , ϕ , χ — взвешивающие функции, $F_z = P_0$ — распределенная нагрузка, равная давлению на входе,

$\varepsilon = \frac{\phi^* - \phi}{\phi^*}$ — параметр, зависящий от локальной концентрации частиц.

На стенках канала для скорости задавались условия прилипания, для концентрации — граничные условия первого рода.

В расчетах использовалась модель с материальными константами: $\phi^* = 0,56$, $\mu_0 = 1,34$ Па·с, $\eta_0 = 0,63$ Па·с, $S_0 = 1$ Па, $a = 40$, $b = 6$, $c = 1$. Расчеты выполнялись на сетке из 6000 треугольных элементов. В зависимости от параметров задачи для сходимости решения требовалось от 70 до 100 итераций.

Сначала рассмотрим результаты расчета распределения основных переменных процесса в канале при известном на входе давлении P_0 . Несмотря на немонотонный характер кривой течения, в этом случае поле интенсивности напряжений однозначно определяет поле интенсивности скоростей деформации. При этом все переменные, представленные на рисунке 6, ведут себя достаточно предсказуемо.

При известной на входе скорости поступающей в трубку дисперсионной среды с немонотонной кривой течения принципиально отличается от выше рассмотренного случая. При S -образном виде кривой течения заданное поле скорости деформации может вызывать от одного до трех состояний поля напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, причем одно из состояний неустойчивое. Какое из двух устойчивых состояний реализуется, определяется предысторией, роль которой здесь играет конвективный перенос.

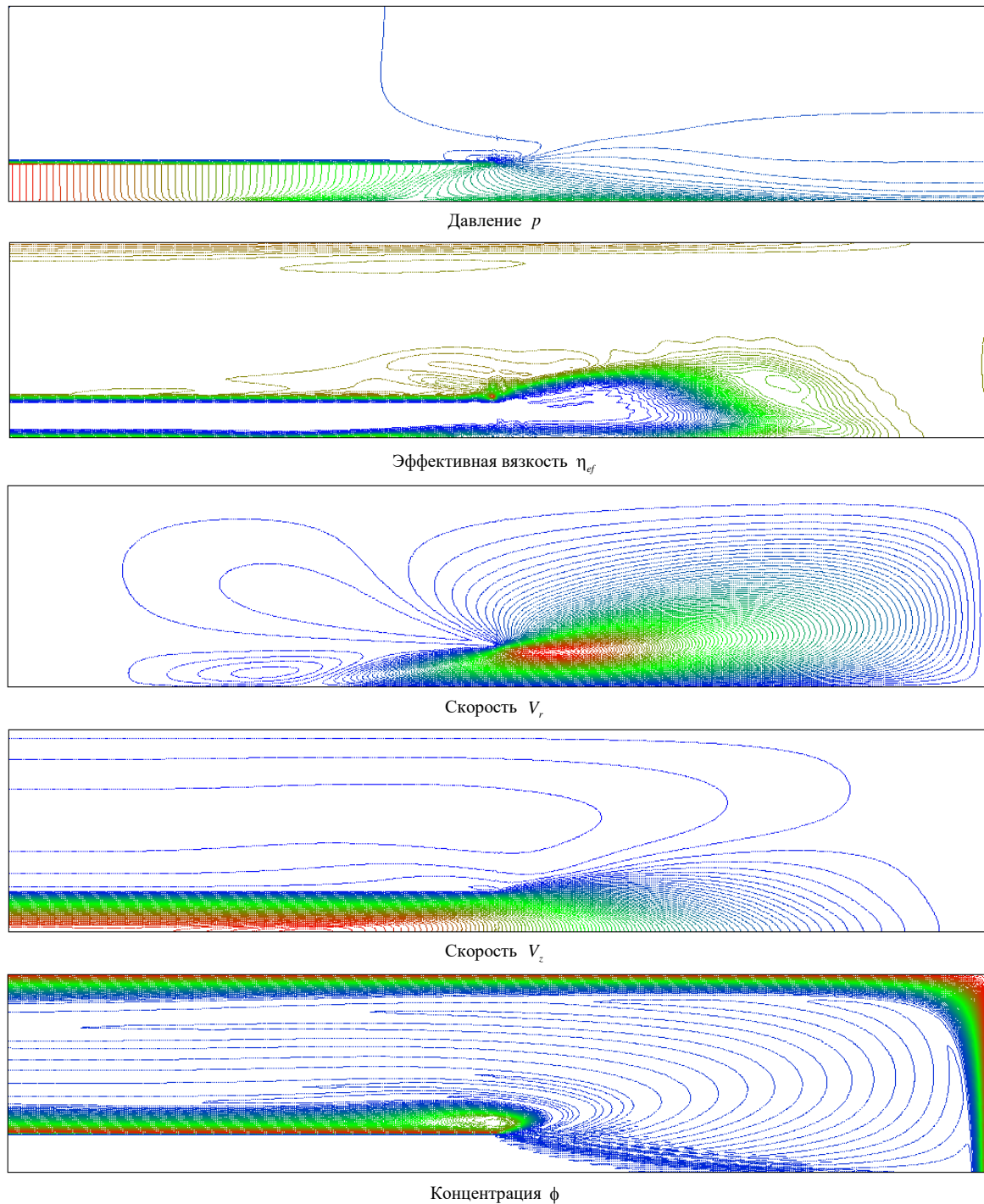


Рис. 6. Распределения основных переменных в канале при известном на входе давлении

На рисунке 7 представлены результаты расчетов распределения относительной концентрации частиц ϕ/ϕ^* в суспензии с неньютоновской дисперсионной средой при различных скоростях поступающей через трубку чистой жидкости. Поскольку в областях встречных потоков имеют место максимальные градиенты скорости, то в точках, в которых интенсивность скорости деформации превышает характерное для данной концентрации значение, интенсивность напряжений скачком возрастает на 2–3 порядка. В результате возникает слой с повышенной вязкостью и концентрацией частиц, который с увеличением средней скорости ддува сначала изгибается вверх, в сторону обратного потока, а затем, при скорости поступающей чистой жидкости, превышающей 0,1 м/с, образуется устойчивый антикластер — замкнутый вихрь, ограниченный слоем высоковязкой среды с высокой концентрацией частиц. Внутри вихря концентрация минимальна.

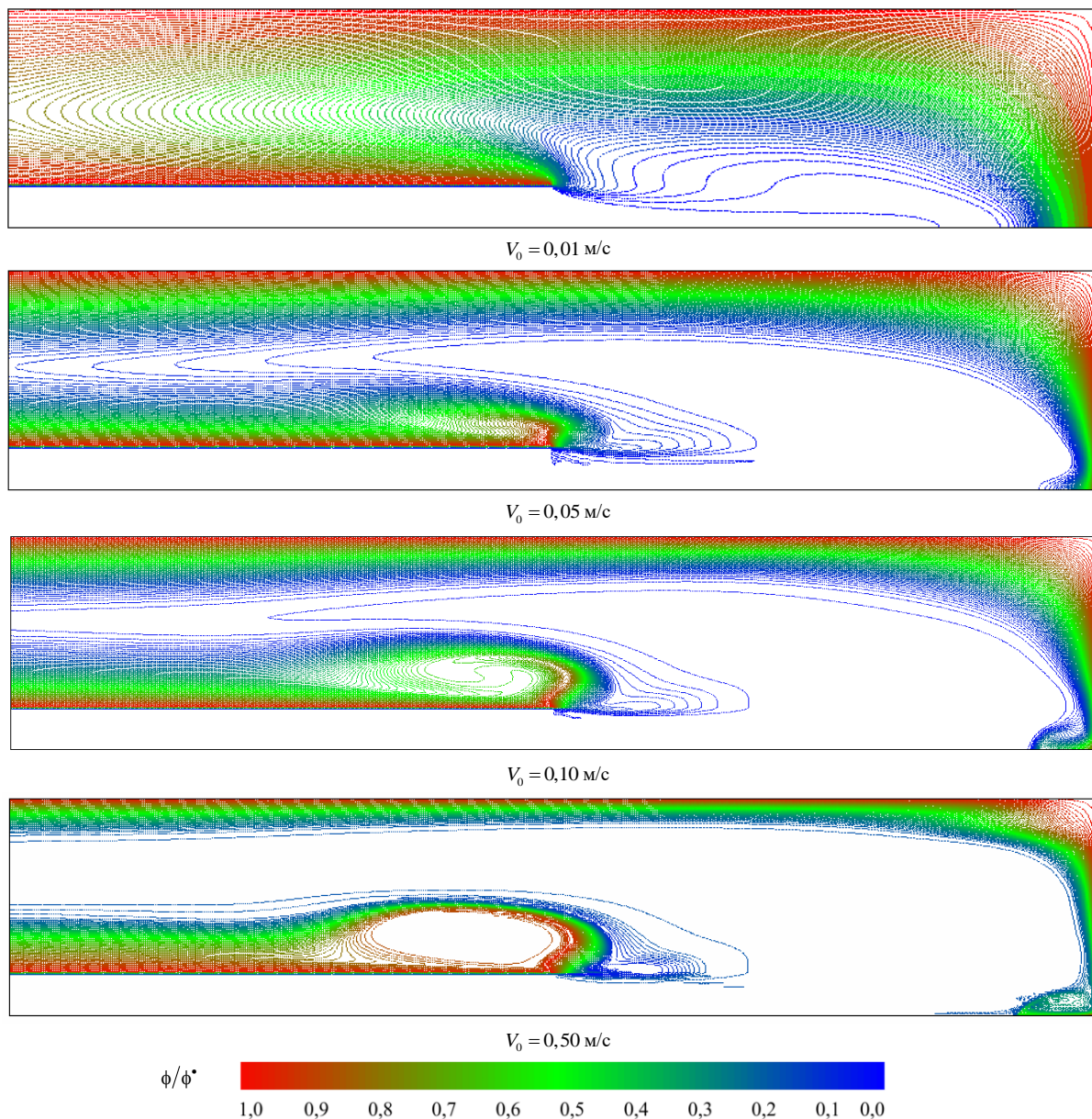


Рис. 7. Распределение относительной концентрации частиц в канале при заданной средней скорости вдува

6. Заключение

Разработана численная модель квазистационарных ламинарных двухмерных течений концентрированных суспензий с неньютоновской дисперсионной фазой, обладающих дилатантными свойствами. На модельных задачах, реализованных методом конечных элементов, показана работоспособность предложенной новой реологической модели концентрированных суспензий, описывающая увеличение кажущейся вязкости с ростом интенсивности напряжений. Выявлены особенности течения высококонцентрированных суспензий в плоских и осесимметричных каналах.

Показано, что в плоском диффузоре, в отличие от ньютоновской и псевдопластической жидкостей, у суспензии продольная скорость уменьшается у стенок, где напряжения максимальны, а в центральной части канала увеличивается.

В модельной задаче вытеснения твердых частиц из цилиндрического стакана под действием заданного давления, несмотря на немонотонный характер кривой течения, поле интенсивности напряжений однозначно определяет распределения основных переменных потока.

При задании на входе в трубку средней скорости свойство немонотонности кривой течения суспензии приводит к существованию от одного до трех состояний поля напряжений, удовлетворяющих уравнениям равновесия, причем два из них устойчивы. Какое из устойчивых состояний будет иметь место, определяет предыстория, роль которой в данном случае играет конвективный перенос.

В результате расчетов обнаружено, что при росте скорости поступающей чистой жидкости и превышении ею значения 0,01 м/с в течении наблюдается образование локального вихря с минимальной концентрацией частиц внутри него. Вихрь ограничен слоем с высокой концентрацией частиц и более вязкой средой. Это явление требует дальнейшего теоретического исследования и экспериментального подтверждения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-45-596020.

Литература

1. Verdier C. Rheological properties of living materials. From cells to tissues // J. Theor. Med. 2003. Vol. 5. P. 67-91. <https://doi.org/10.1080/10273360410001678083>
2. Ходаков Г.С. Реология суспензий. Теория фазового течения и ее экспериментальное обоснование // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). 2003. Т. XLVII, № 2. С. 33-43.
3. Guillou S., Makhloufi R. Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by direct numerical simulation // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2007. Vol. 144. P. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008>
4. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J., Velazquez-Navarro J.F. Shear-thickening behavior of Aerosil® R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids // Rheol. Acta. 2009. Vol. 48. P. 699-708. <https://doi.org/10.1007/s00397-009-0367-7>
5. Liu A.J., Nagel S.R. The jamming transition and the marginally jammed solid // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2010. Vol.1. P. 347-369. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104045>
6. Seth J.R., Mohan L., Locatelli-Champagne C., Cloitre M., Bonnecaze R.T. A micromechanical model to predict the flow of soft particle glasses // Nature Mater. 2011. Vol. 10. P. 838-843. <https://doi.org/10.1038/nmat3119>
7. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011. Vol. 166. P. 321-325. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001>
8. Boyer F., Guazzell E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. 188301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.188301>
9. Nakanishi H., Nagahiro S., Mitarai N. Fluid dynamics of dilatant fluids // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 011401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011401>
10. Фортъе А. Механика суспензий. М.: Мир, 1971. 264 с.
11. Урьев Н.Б. Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов. М.: Химия, 1988. 255 с.
12. Tanner R.I. Engineering rheology. Oxford University Press, 2000. 586 p.
13. Brown E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspensions: phenomenology, mechanisms and relations to jamming // Rep. Prog. Phys. 2014. Vol. 77. 046602. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/77/4/046602>
14. Denn M.M., Morris J.F. Rheology of non-Brownian suspensions // Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng. 2014. Vol. 5. P. 203-228. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060713-040221>
15. Ardakani H.A., Mitsoulis E., Hatzikiriakos S.G. Capillary flow of milk chocolate // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2014. Vol. 210. P. 56-65. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2014.06.001>
16. Mari R., Seto R., Morris J.F., Denn M.M. Nonmonotonic flow curves of shear thickening suspensions // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91. 052302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.052302>
17. Pan Zh., de Cagny H., Weber B., Bonn D. S-shaped flow curves of shear thickening suspensions: Direct observation of frictional rheology // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 032202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032202>
18. Ness C., Sun J. Shear thickening regimes of dense non-Brownian suspensions // Soft Matter. 2016. Vol. 12. P. 914-924. <https://doi.org/10.1039/c5sm02326b>
19. Vázquez-Quesada A., Ellero M. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with Smoothed Particle Hydrodynamics // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2016. Vol. 233. P. 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.12.009>
20. Nagahiro S., Nakanishi H. Negative pressure in shear thickening bands of a dilatant fluid // Phys. Rev. E. 2016. Vol. 94. 062614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062614>
21. Vázquez-Quesada A., Wagner N.J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation // Phys. Fluid. 2017. Vol. 29. 103104. <https://doi.org/10.1063/1.4997053>
22. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions // J. Rheol. 2018. Vol. 62. P. 457-468. <https://doi.org/10.1122/1.4999237>
23. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension // Phys. Rev. Lett. 2019. Vol. 122. 098004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.098004>
24. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition // J. Rheol. 2005. Vol. 49. P. 719-746. <https://doi.org/10.1122/1.1895800>
25. Skulskiy O.I., Slavnov Ye.V., Shakirov N.V. The hysteresis phenomenon in nonisothermal channel flow of a non-Newtonian liquid // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 1999. Vol. 81. P. 17-26. [https://doi.org/10.1016/S0377-0257\(98\)00091-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0257(98)00091-3)
26. Аристов С.Н., Скульский О.И. Точное решение задачи течения шестиконстантной модели жидкости Джеффриса в плоском канале // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 39-45. (English version <https://doi.org/10.1023/A:1020752101539>)
27. Аристов С.Н., Скульский О.И. Точное решение задачи течения раствора полимера в плоском канале // ИФЖ. 2003. Т. 76, № 3. С. 88-95. (English version <https://doi.org/10.1023/A:1024768930375>)

28. Кузнецова Ю.Л., Скульский О.И., Ситникова М.А. Течение смазочного материала в напорных насадках при волочении в режиме гидродинамического трения // Трение и износ. 2007. Т. 28, № 4. С. 375-380. (English version <https://doi.org/10.3103/S106836660704006X>)
29. Скульский О.И. Реометрические течения концентрированных суспензий твердых частиц // Вычисл. мех. сплош. сред. 2020. Т. 13, № 3. С. 269-278. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21>
30. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. М.: Изд-во АН СССР, 1955. 352 с.
31. Gray J.M.N.T. Particle segregation in dense granular flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 2018. Vol. 50. P. 407-433. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-045201>
32. Sanli C., Lohse D., van der Meer D. From antinode clusters to node clusters: The concentration-dependent transition of floaters on a standing Faraday wave // Phys. Rev. E. 2014. Vol. 89. 053011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.053011>
33. Sánchez-Rosales M., Casillas-Navarrete J., Jiménez-Bernal J.A., Kurdyumov V.N., Medina A. Experimental and numerical study of submerged jets from pipes of different wall thicknesses for $Re < 1$ // Revista Mexicana de Física. 2020. Vol. 66. P. 69-76.
34. Яворский Н.И. Теория затопленных струй и следов. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 1998. 242 с.
35. Скульский О.И., Фонарев А.В., Кузнецова Ю.Л. «FEM FLOW» – конечно-элементная программа для расчета течения вязкоупругой жидкости в каналах со свободной поверхностью с учетом неизотермичности: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2007611760 от 25.04.2007.

References

1. Verdier C. Rheological properties of living materials. From cells to tissues. *J. Theor. Med.*, 2003, vol. 5, pp. 67-91. <https://doi.org/10.1080/10273360410001678083>
2. Khodakov G.S. Reologiya suspenziy. Teoriya fazovogo techeniya i ee eksperimental'noye obosnovaniye [Suspension rheology. The theory of phase flow and its experimental substantiation]. *Ros. khim. zh. (Zh. Ros. khim. ob-va im. D.I. Mendeleeva)*, 2003, vol. XLVII, no. 2, pp. 33-43.
3. Guillou S., Makhloufi R. Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by direct numerical simulation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 144, pp. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008>
4. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J., Velazquez-Navarro J.F. Shear-thickening behavior of Aerosil® R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids. *Rheol. Acta*, 2009, vol. 48, pp. 699-708. <https://doi.org/10.1007/s00397-009-0367-7>
5. Liu A.J., Nagel S.R. The jamming transition and the marginally jammed solid. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2010, vol. 1, pp. 347-369. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104045>
6. Seth J.R., Mohan L., Locatelli-Champagne C., Cloitre M., Bonnecaze R.T. A micromechanical model to predict the flow of soft particle glasses. *Nature Mater.*, 2011, vol. 10, pp. 838-843. <https://doi.org/10.1038/nmat3119>
7. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166, pp. 321-325. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001>
8. Boyer F., Guazzell E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, 188301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.188301>
9. Nakanishi H., Nagahiro S., Mitarai N. Fluid dynamics of dilatant fluids. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, 011401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011401>
10. Fortier A. *Mécanique de suspensions* [Suspension mechanics]. Masson et C-ie, 1967. 176 p.
11. Ur'yev N.B. *Fiziko-khimicheskiye osnovy tekhnologii dispersnykh sistem i materialov* [Physicochemical foundations of the technology of dispersed systems and materials]. Moscow, Khimiya, 1988. 255 p.
12. Tanner R.I. *Engineering rheology*. Oxford University Press, 2000. 586 p.
13. Brown E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspensions: phenomenology, mechanisms and relations to jamming. *Rep. Prog. Phys.*, 2014, vol. 77, 046602. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/77/4/046602>
14. Denn M.M., Morris J.F. Rheology of non-Brownian suspensions. *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.*, 2014, vol. 5, pp. 203-228. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060713-040221>
15. Ardakani H.A., Mitsoulis E., Hatzikiriakos S.G. Capillary flow of milk chocolate. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, vol. 210, pp. 56-65. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2014.06.001>
16. Mari R., Seto R., Morris J.F., Denn M.M. Nonmonotonic flow curves of shear thickening suspensions. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 052302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.052302>
17. Pan Zh., de Cagny H., Weber B., Bonn D. S-shaped flow curves of shear thickening suspensions: Direct observation of frictional rheology. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 032202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032202>
18. Ness C., Sun J. Shear thickening regimes of dense non-Brownian suspensions. *Soft Matter*, 2016, vol. 12, pp. 914-924. <https://doi.org/10.1039/c5sm02326b>
19. Vázquez-Quesada A., Ellero M. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2016, vol. 233, pp. 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.12.009>
20. Nagahiro S., Nakanishi H. Negative pressure in shear thickening bands of a dilatant fluid. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 062614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062614>
21. Vázquez-Quesada A., Wagner N.J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation. *Phys. Fluid.*, 2017, vol. 29, 103104. <https://doi.org/10.1063/1.4997053>
22. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions. *J. Rheol.*, 2018, vol. 62, pp. 457-468. <https://doi.org/10.1122/1.4999237>
23. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 122, 098004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.098004>

24. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition. *J. Rheol.*, 2005, vol. 49, pp. 719-746. <https://doi.org/10.1122/1.1895800>
25. Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V., Shakirov N.V. The hysteresis phenomenon in nonisothermal channel flow of a non-Newtonian liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1999, vol. 81, pp. 17-26. [https://doi.org/10.1016/S0377-0257\(98\)00091-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0257(98)00091-3)
26. Aristov S.N., Skul'skii O.I. Exact solution of the problem on a six-constant Jeffreys model of fluid in a plane channel. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, pp. 817-822. <https://doi.org/10.1023/A:1020752101539>
27. Aristov S.N., Skul'skii O.I. Exact solution of the problem of flow of a polymer solution in a plane channel. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2003, vol. 76, pp. 577-585. <https://doi.org/10.1023/A:1024768930375>
28. Kuznetsova Yu.L., Skul'skii O.I., Sitnikova M.A. Lubricant flow in pressure pipes during wire drawing in a hydrodynamic friction mode. *J. Frict. Wear*, 2007, vol. 28, pp. 359-363. <https://doi.org/10.3103/S106836660704006X>
29. Skul'skiy O.I. Rheometric flows of concentrated suspensions of solid particles. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2020, vol. 13, no. 3, pp. 269-278. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21>
30. Fuks N.A. *Mekhanika aerozoley* [Aerosol mechanics]. Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1955, 352 p.
31. Gray J.M.N.T. Particle segregation in dense granular flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2018, vol. 50, pp. 407-433. <https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122316-045201>
32. Sanli C., Lohse D., van der Meer D. From antinode clusters to node clusters: The concentration-dependent transition of floaters on a standing Faraday wave. *Phys. Rev. E*, 2014, vol. 89, 053011. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.053011>
33. Sánchez-Rosas M., Casillas-Navarrete J., Jiménez-Bernal J.A., Kurdyumov V.N., Medina A. Experimental and numerical study of submerged jets from pipes of different wall thicknesses for $Re < 1$. *Revista Mexicana de Fisica*, 2020, vol. 66, pp. 69-76.
34. Yavorskiy N.I. *Teoriya zatoplennykh struy i sledov* [The theory of submerged jets and trails]. Novosibirsk, In-t teplofiziki SO RAN, 1998. 242 p.
35. Skul'skiy O.I., Fonarev A.V., Kuznetsova Yu.L. «FEM FLOW» – finite element program for calculating the flow of a viscoelastic fluid in channels with a free surface, taking into account non-isothermal. RF Copyright Certificate No. 2007611760, 25 April 2007.

Поступила в редакцию 23.04.2021; после доработки 19.05.2021; принята к опубликованию 22.05.2021