

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.2.16](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.16)

УДК 519.3

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ
НЕОДНОРОДНО ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ
С ЛЕГИРОВАННЫМИ НИКЕЛЕМ СТЕНКАМИ ПОР
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ОБЪЕМНЫХ ДОЛЕЙ МЕТАЛЛА И ПОР**

А.В. Наседкин¹, М.Э. Нассар^{1,2}

¹*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

²*Университет Менуфия, Эль-Менуфия, Египет*

В работе рассматривается пористый пьезоэлектрический композит с металлическими слоями, нанесенными на границы раздела между пьезоэлектрической и вакуумной фазами. Такие металлические слои могут быть добавлены технологически для улучшения механических и электромеханических свойств композита. Для отыскания эффективных модулей анализируется простой представительный кубический объем (элементарная ячейка), состоящий из пьезоэлектрической матрицы с составной сферической порой в центре. В свою очередь составная пора включает собственно пору и полый металлический шар на ее поверхности. Все три фазы композита моделируются как пьезоэлектрические материалы, причем для пор задаются пренебрежимо малые модули, а для проводящего интерфейсного слоя принимаются очень большие диэлектрические проницаемости, малые пьезомодули и упругие свойства металла. Приводится математическая постановка краевой задачи гомогенизации с условиями полного контакта на интерфейсных границах, основанная на энергетическом критерии Хилла. Путем решения методом конечных элементов девяти краевых задач электроупругости с различными граничными условиями для перемещений и электрического потенциала устанавливается полный набор эффективных модулей пьезокомпозита. Отмечается важность учета неоднородной поляризации при наличии пор и металлических включений. Предлагается приближенный способ определения неоднородного поляризованного поля в пьезокерамической матрице, базирующийся на предварительном решении задачи электростатики диэлектриков и на нахождении элементарных систем координат, повернутых вдоль вектора поляризации. Описываются результаты вычислительных экспериментов для пьезокомпозита, состоящего из пьезокерамической матрицы PZT-5H, пор и никелевых слоев на поверхностях пор. Проводится сравнение эффективных свойств данного композита, содержащего разные объемные доли металла, и обычного пористого пьезокомпозита в зависимости от пористости и неоднородности поляризации. Отмечается существенные отличия рассматриваемого композита в части значений некоторых пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей, перспективных для практических приложений в пьезоактуаторах, работающих на использовании явления поперечного пьезоэффекта.

Ключевые слова: пьезоэлектрические композиты, пористая пьезокерамика, пьезоэлектрический металлокерамический композит, задача гомогенизации, эффективные свойства, метод конечных элементов, пьезоэлектрические преобразователи, неоднородная поляризация

**NUMERICAL ANALYSIS OF THE EFFECTIVE PROPERTIES
OF INHOMOGENEOUSLY POLARIZED POROUS PIEZOELECTRIC CERAMICS
WITH NI-DOPED PORE WALLS TAKING INTO ACCOUNT
THE INFLUENCE OF VOLUME FRACTIONS OF METAL AND PORES**

A.V. Nasedkin¹ and M.E. Nassar^{1,2}

¹*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

²*Menoufia University, Menouf, Egypt*

The paper considers a porous piezoelectric composite with metal layers deposited on the interface between the piezoelectric and vacuum phases. Such metal layers can be added technologically to improve the mechanical and electromechanical properties of the composite. To find the effective moduli, we designed a simple representative cubic volume of a unit cell consisting of a piezoelectric matrix with a compound spherical pore in its center. In turn, the compound pore includes the pore itself and a hollow metal sphere on its surface. The composite's three phases were all modeled as piezoelectric materials. The conducting interface layer was modeled as a piezoelectric material with very high dielectric constants, small piezoelectric moduli, and elastic properties of the employed metal, while the vacuum pore was modeled as a piezoelectric material with marginal moduli. The mathematical formulation of boundary value homogenization problems with full contact conditions on the interface boundaries, based on the Hill energy criterion, was described. By solving nine boundary value problems of electroelasticity with different boundary conditions for displacements and electric potential by the finite element method, a complete set of effective moduli of the piezoelectric composite is determined. The importance of considering the inhomogeneous polarization due to the presence of pores and metallic inclusions was discussed. An approximate method was proposed for determining the inhomogeneous polarization field in a piezoceramic matrix, based on a preliminary solution of the electrostatic problem for dielectrics and locating the element coordinate systems rotated along the polarization vector. The paper describes the results of computational experiments for a piezocomposite consisting of PZT-5H piezoceramic matrix, pores, and nickel layers on the pore surfaces. Comparisons between the effective properties of this composite with different volume fractions of metal and the conventional porous piezocomposite were provided, depending on the porosity and taking into account the inhomogeneous polarization. Significant differences were observed for some piezomoduli and dielectric constants, which are promising for various practical applications of the considered composites in piezoactuators using the phenomenon of the transverse piezoelectric effect.

Key words: piezoelectric composites, porous piezoceramics, piezoelectric ceramic-metal composite, homogenization problem, effective properties, finite element method, piezoelectric transducers, nonuniform polarization

1. Введение

Благодаря уникальному свойству связанности электромеханических полей, пьезоэлектрические материалы находят многочисленные применения в разных современных приложениях, например, в ультразвуковой медицинской технике, аэрокосмической промышленности, технологиях интеллектуальных материалов, микроэлектромеханических системах, неразрушающем контроле, и другом [1–5]. Пьезоэлектрическая керамика является наиболее часто используемым пьезоэлектрическим материалом, поскольку она имеет высокие пьезоэлектрические модули, а технологии ее создания позволяют управлять ее основными характеристиками. Более того, путем введения в пьезоэлектрический материал контролируемой пористости можно существенно повысить эффективность пьезоэлектрических ультразвуковых устройств [6, 7]. По сравнению с плотной пьезокерамикой пористые пьезокомпозиты отличаются более высокими значениями модулей пьезоэлектрического напряжения, низким акустическим импедансом и лучшими характеристиками при гидростатических приложениях [8, 9]. Однако пьезокерамики и, следовательно, пористые пьезокерамические композиты являются достаточно хрупкими материалами, и это накладывает некоторые ограничения на их применение [10, 11]. Деградация жесткостных свойств пористых пьезокомпозитов при большой пористости может вызвать механические повреждения, пробой диэлектрика и низкую надежность устройств, выполненных из этих материалов [12, 13].

Включение частиц металла в пьезоэлектрическую матрицу может значительно улучшить ее механические свойства, в частности понизить вязкость разрушения [14, 15]. Для оптимизации механических, электрических и функциональных свойств пористых пьезокерамических композитов А.Н. Рыбьянец и соавторы [16, 17] разработали новый подход изготовления пьезокомпозитов, при котором в процессе производства в керамическую матрицу вводятся полимерные микрогранулы различных форм, заполненные или покрытые металлосодержащими микро- или наночастицами. В результате можно получить пористый пьезокомпозит с металлическими слоями, нанесенными на границы между пьезоэлектрической матрицей и вакуумными включениями. В настоящей работе такой пористый пьезокерамический композит для краткости обозначается как СМПП — система с металлизированными поверхностями пор. При этом просто пористый пьезокомпозит называется обычной пористой системой — ОПС.

Для СМПП задача установления эффективных свойств имеет ряд особенностей: СМПП представляет собой трехфазный композит с закрытой пористостью и, соответственно, с закрытой структурой металлизации, то есть композит 3-0-0 связности (в соответствии с терминологией Р.Э. Ньюмена [18]). При закрытой пористости СМПП в макромасштабе — среда диэлектрическая, хотя находящиеся в ней включения из металла являются проводящими. Поэтому, вообще говоря, определяющие соотношения материалов пьезокерамической матрицы и включений существенно различаются. Однако, аналогично работам [19, 20], при гомогенизации СМПП металлические включения можно рассматривать как пьезоэлектрические материалы с очень большими коэффициентами диэлектрических проницаемостей и с очень малыми пьезомодулями.

Другая особенность СМПП состоит в ее существенной неоднородности на микроуровне. Если сплошная пьезокерамическая среда обычно считается трансверсально-изотропным материалом, однородно поляризованным относительно оси Ox_3 , то для СМПП, а также для ОПС, это допущение является значительно менее обоснованным. Действительно, даже у ОПС свойства материала пьезокерамической матрицы вблизи пор могут отличаться от свойств соответствующего плотного пьезокерамического материала. Неоднородность значительно усиливается в СМПП, и модули пьезокерамической матрицы вблизи стенок пор с металлическими включениями становятся функциями пространственных координат. В связи с этим в данной работе исследуется влияние неоднородности поля поляризации на эффективные модули. Следуя методологии, развитой ранее в [19, 21–23], неоднородность векторов поляризации в представительном объеме композита определяется на основе решения задачи электростатики, имитирующей поляризацию пьезокерамики. После этого задачи гомогенизации для СМПП и для ОПС могут решаться с учетом пересчитанных модулей однородно поляризованной пьезокерамики при переходе от глобальной системы координат в локальные системы координат с осями Ox_3 , параллельными направлениям найденных векторов поляризации.

Влияние неоднородности поляризации на эффективные свойства СМПП изучалось ранее в [19]. Однако в этой работе предполагалось, что металлический слой, нанесенный на поверхность пор, имеет незначительную толщину, и поэтому его упругие свойства не учитывались. Здесь, в развитие подхода из [19], в модель СМПП добавляются жесткостные свойства металлического слоя. Как и в [19], эффективные свойства СМПП и ОПС определяются методом эффективных модулей при конечно-элементном решении задач гомогенизации в простом представительном объеме, имеющем вид куба из пьезокерамики со сферической порой в центре и с шаровым металлическим слоем на границе раздела пьезоэлектрической и вакуумной фаз. Для проведения численных расчетов разработан набор программ на макроязыке APDL пакета ANSYS, реализующих все этапы решения задач гомогенизации рассматриваемых пьезокомпозитных структур.

В результате численных экспериментов получены зависимости эффективных модулей от объемной доли пористости и доли металлических включений с учетом неоднородности поляризованного поля. Обнаружено, что пьезоэлектрические коэффициенты наиболее сильно меняются при учете неоднородности поля поляризации. При этом толщина и упругая жесткость металлического слоя также оказывают заметное влияние на эффективные пьезоэлектрические модули.

2. Математическая модель

Определяющие уравнения, условия на межфазных границах, граничные условия и структура представительного объема являются основными составляющими постановки задачи гомогенизации для обсуждаемых пьезокомпозитов. Как и в [19, 20, 22, 24], уравнения записываются в рамках линейной теории электроупругости, а граничные условия выбираются в соответствии с теорией эффективных модулей.

2.1. Представительный объемный элемент

Для того чтобы выявить главные особенности исследуемых типов пьезокомпозитов, рассмотрим достаточно простую модель представительного объема (элементарной ячейки). Для СМПП представительный объем примем в виде куба Ω , внутри которого располагается составная сферическая пора Ω_p (центры куба и сферы совпадают), а остальная часть куба Ω_{pz} заполнена основным пьезоэлектрическим материалом, то есть $\Omega = \Omega_{pz} \cup \Omega_p$. В свою очередь составная пора Ω_p состоит из вакуумной поры Ω_v и металлического полого шара Ω_m , нанесенного на ее границу: $\Omega_p = \Omega_v \cup \Omega_m$. Примем, что длина ребра куба равна L , а наибольший радиус составной сферической поры определим по формуле: $R = L\sqrt[3]{3v_p/(4\pi)}$, где $v_p = |\Omega_p|/|\Omega|$ — объемная доля составной поры. В такой модели имеется достаточно жесткое ограничение на пористость: $v_p < 0,52$, поскольку должно выполняться неравенство $R < L/2$. Если обозначить толщину металлического слоя через h , то радиус вакуумной поры Ω_v будет равен $R-h$, а внутренний и внешний радиусы полого шара Ω_m , соответственно, $R-h$ и R . Объем металлического полого шара можно вычислить по формуле $|\Omega_m| = (4\pi/3)(R^3 - (R-h)^3) = v_m |\Omega_p|$, где $v_m = |\Omega_m|/|\Omega_p|$ — объемная доля металлического слоя Ω_m в составной поре Ω_p . Для ОПС элементарная ячейка упрощается, поскольку слой Ω_m отсутствует и $\Omega^p = \Omega^v$.

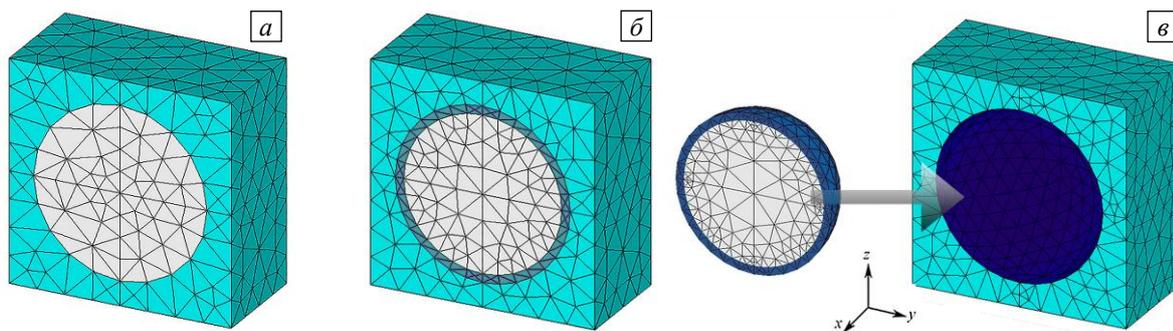


Рис. 1. Половины представительных объемов для ОПС (а), СМПП ($v_m = 0,27$) (б) и СМПП ($v_m = 0,01$, $h, v_m \rightarrow 0$) (в) при пористости $v_p = 0,25$; ■ – пьезокерамическая матрица, ■ – вакуум, ■ – металлический слой с электропроводящими и упругими свойствами, ■ – электропроводящий слой, ■ – упругая оболочка

На рисунках 1а и 1б показаны примеры элементарных ячеек для ОПС и СМПП, соответственно, в разрезе плоскостью, проходящей через центр поры. Здесь же демонстрируются варианты используемых в разных фазах композита конечно-элементных сеток, построенных с помощью ANSYS. Пора считается заполненной фиктивным пьезоэлектрическим материалом с диэлектрической проницаемостью вакуума и слабыми пьезоэлектрическими и упругими свойствами. Также предполагается, что металлический слой представляет собой пьезоэлектрический материал с упругими свойствами никеля, незначительными пьезоэлектрическими свойствами и очень высокой диэлектрической проницаемостью.

На рисунке 1б толщина металлического слоя равна $h = R/10$, когда $v_m = 0,27$. Если толщина металлического слоя в СМПП является существенно меньшей ($h, v_m \rightarrow 0$), то использование

представительного объема, аналогичного представленному на рисунке 1б, не целесообразно, поскольку малые размеры элементов в слое приведут к большому числу узлов в конечно-элементных сетках. В связи с этим для тонких металлических слоев представительный объем для СМПП (Рис. 1б) строится другим способом, а именно металлический слой задается как электрически высокопроводящий слой, заключенный в упругую оболочку. Оболочечные конечные элементы SHELL281 имеют упругие свойства металла и нужную толщину h . Объемные конечные элементы моделируют электропроводность металлического слоя как пьезоэлектрического материала с очень высокой диэлектрической проницаемостью и небольшими пьезоэлектрическими и упругими свойствами. Как отмечалось в [19, 20], толщина такого слоя, полностью покрывающего границу поры, незначительна, поэтому описанный метод позволяет рассматривать слой металла с малой толщиной, но с учетом его упругих свойств. Тип конечных элементов, показанный на рисунке 1б, в основном используется для моделирования СМПП при незначительной толщине металлического слоя. При этом в СМПП со средней толщиной металлического слоя ($v_m \leq 0,27$) результаты расчетов эффективных модулей при обоих способах создания представительного объема оказываются примерно одинаковыми.

Отметим, что для построения объемной конечно-элементной модели применялись 10-узловые тетраэдральные элементы SOLID227 с опциями пьезоэлектрического анализа. Конечно-элементные сетки получались методами «свободного разбиения» из пакета ANSYS с заданием максимального размера ребра элемента. При ограничении максимальной длины ребра элемента до $L/8$, $L/10$ и $L/16$ для ОПС, для СМПП при $v_m = 0,01$ и для СМПП при $v_m = 0,27$, соответственно, результаты вычислений имели приемлемую точность.

2.2. Краевая задача гомогенизации

Для нахождения эффективных модулей исследуемых композитов решались следующие краевые задачи усреднения в объеме Ω [19, 20, 22–24]:

$$\mathbf{L}^*(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^* \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \tag{2}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi, \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0, \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega, \tag{4}$$

$$\mathbf{L}(\nabla) = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

В выражениях (1)–(5) принято: ∇ — набла-оператор; σ_{ij} — компоненты тензора напряжений (здесь и далее $i, j = 1, 2, 3$); ε_{ij} — компоненты тензора деформаций; \mathbf{D} — вектор электрической индукции; \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля; \mathbf{c}^E — (6×6) матрица упругих жесткостей $c_{\alpha\beta}^E$, измеренных при постоянном электрическом поле (здесь и далее $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$); \mathbf{e} — (3×6) матрица пьезоэлектрических модулей $e_{j\alpha}$; $\boldsymbol{\varepsilon}^S$ — (3×3) матрица диэлектрических проницаемостей ε_{ii}^S , измеренных при постоянной деформации; \mathbf{u} — вектор смещения; ϕ — электрический потенциал; $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ — матричный оператор, зависящий от вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, который также может быть набла-оператором; \mathbf{S}_0 — 6-мерный массив постоянных значений $S_{0\beta}$; \mathbf{E}_0 — вектор постоянных значений E_{0j} ; $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x, y, z\}$ — вектор пространственных координат; символ «*» обозначает операцию транспонирования, а $(\dots) \cdot (\dots)$ — скалярное произведение.

Граничные условия (4) стандартны для теории эффективных модулей, требуется их дополнительное уточнение.

Как обычно для композитных материалов, предполагалось выполнение условий полной непрерывности между двумя соседними фазами на межфазных границах $\Gamma_i = \Gamma_v \cup \Gamma_m$:

$$[\mathbf{u}] = 0, \quad \mathbf{L}^*(\mathbf{n}) \cdot [\mathbf{T}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad (6)$$

$$[\varphi] = 0, \quad \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}] = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i, \quad (7)$$

где $\Gamma_v = \partial\Omega_v$ и $\Gamma_m = \partial\Omega_m$ — границы сферической вакуумной поры и полого металлического шара, $[(...)]$ — скачок величины (...) при переходе через фазовую границу.

2.3. Моделирование неоднородной поляризации

Процесс поляризации пьезокерамического образца может быть осуществлен путем приложения сильного электрического поля, превышающего коэрцитивное поле. Для этого обычно на торцы образца наносятся электроды, перпендикулярно одному из направлений. Тогда в поляризованном образце пьезокерамики диполи будут располагаться преимущественно вдоль этого направления. Для плотной пьезокерамики, как правило, предполагается, что материал однородно поляризован в направлении Ox_3 .

Между тем пористые пьезокерамические композиты на микроуровне являются неоднородными, поэтому диполи и векторы поляризации вокруг пор не параллельны основному направлению поляризации поля. В [19] демонстрируется, что неоднородность поля поляризации влияет на эффективные свойства пьезокерамических композитов ОПС, но не очень значительно по сравнению с СМПП. Действительно, СМПП содержит металлические слои на поверхности пор, которые являются электропроводящими и обуславливают существенную неоднородность поля поляризации.

Следуя работам [19, 22–24], неоднородную поляризацию будем определять по конечно-элементному решению соответствующей задачи электростатики диэлектриков в представительном объеме ОПС или СМПП. Для кубического объема Ω такая задача может быть сформулирована следующим образом:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

$$\varphi = -E_c/L, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi 1}, \quad \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\varphi 2}, \quad (9)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q, \quad (10)$$

где $\Gamma = \Gamma_{\varphi 1} \cup \Gamma_{\varphi 2} \cup \Gamma_q$, $\Gamma_{\varphi 1}$ и $\Gamma_{\varphi 2}$ — электродированные поверхности при $x_3 = -L/2$ и $x_3 = L/2$, E_c — значение напряженности поляризации поля, Γ_q — внешние поверхности представительного объема без электродов, $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x})$ — кусочно-постоянная функция диэлектрической проницаемости (при $\mathbf{x} \in \Omega_{pc}$ $\varepsilon = (2\varepsilon_{11}^s + \varepsilon_{33}^s)/3$; в металлическом слое $\mathbf{x} \in \Omega_m$ функция ε имеет очень большое значение; в поре $\mathbf{x} \in \Omega_v$ $\varepsilon = \varepsilon_0$; в вакууме $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м). К задаче (8)–(10) еще необходимо добавить интерфейсные электрические граничные условия (7).

Задача (7)–(10) решается методом конечных элементов на сетке той же геометрии, что и последующая задача гомогенизации (1)–(7), но составленной из конечных элементов SOLID227 с опцией электростатической задачи. Из решения этой задачи находятся векторы электрической индукции \mathbf{D}^{ek} и напряженности электрического поля \mathbf{E}^{ek} в центральной точке каждого конечного элемента Ω^{ek} с номером k в объеме пьезокерамической матрицы Ω_{pc} . В результате можно вычислить элементные векторы поляризации \mathbf{P}^{ek} по формуле:

$$\mathbf{P}^{ek} = \mathbf{D}^{ek} - \varepsilon_0 \mathbf{E}^{ek}. \quad (11)$$

Поскольку диэлектрические проницаемости пьезоэлектрической фазы значительно превосходят диэлектрическую проницаемость вакуума, то, согласно второй формуле из (8) и с учетом (11), векторы поляризации \mathbf{P}^{ek} будут почти совпадать с векторами электрической индукции \mathbf{D}^{ek} . Рисунок 2 иллюстрирует распределения векторов \mathbf{D}^{ek} для ОПС (Рис. 2а) и СМПП с $v_m = 0,01$ (Рис. 2б). Из их сравнения видно, что неоднородность вектора поляризации в СМПП значительно больше, чем в ОПС. Это можно объяснить наличием в СМПП электрически проводящего слоя Ω_m . Отметим, что направления векторов поляризации в СМПП с различными толщинами слоя Ω_m , например, при $v_m = 0,01$ и $v_m = 0,27$, практически одинаковы, поскольку толщина h проводящего слоя не оказывает влияния на решение электростатической задачи.

Затем для каждого конечного элемента Ω^{ek} создается локальная (элементная) система координат $Ox_1^{ek} x_2^{ek} x_3^{ek}$, в которой ось Ox_3^{ek} совпадает с направлением вектора поляризации \mathbf{P}^{ek} . Если ось Ox_3^{ek}

не параллельна оси Ox_3 глобальной декартовой системы координат, то ось Ox_1^{ek} определяется по линии пересечения плоскости, перпендикулярной оси Ox_3^{ek} , и плоскости Ox_1x_2 . Тогда направление оси Ox_2^{ek} легко находится как линия, перпендикулярная осям Ox_3^{ek} и Ox_1^{ek} . Отметим, что для пьезокерамики, являющейся в каждой точке трансверсально-изотропным материалом, важно только положение оси Ox_3^{ek} , а оси Ox_1^{ek} и Ox_2^{ek} могут быть направлены произвольно в плоскости, перпендикулярной Ox_3^{ek} .

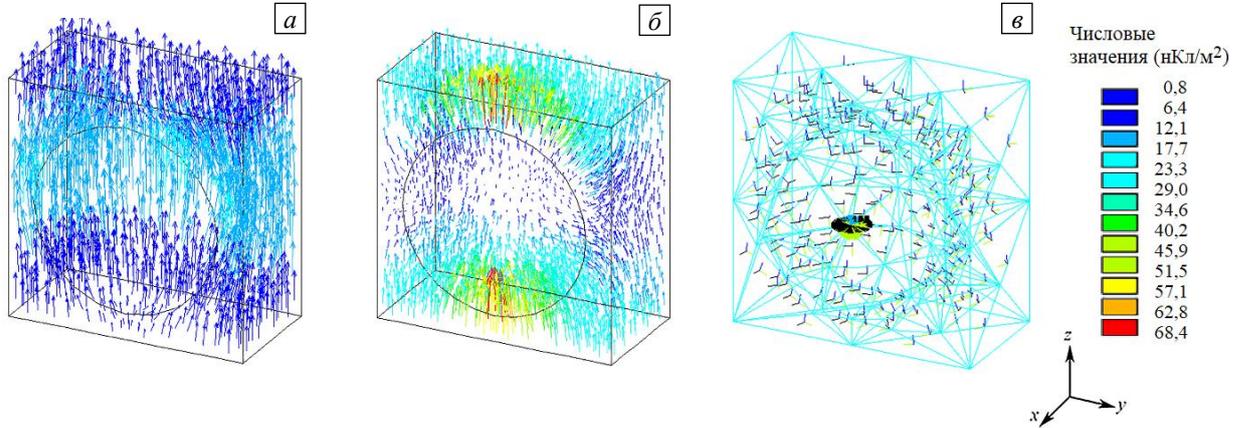


Рис. 2. Векторы электрической индукции D^{ek} при $v_p = 0,25$ для ОПС (а), СМПП при $v_m = 0,01$, $v_p = 0,25$ (б); и элементные системы координат для СМПП при $v_m = 0,01$, $v_p = 0,25$ (в)

Построенные по описанному алгоритму элементные системы координат показаны на рисунке 2в для СМПП с $v_m = 0,01$. При этом на рисунке 2в для наглядности использована очень грубая конечно-элементная сетка, для которой максимальная длина ребер элементов составляет $L/2$. В реальности же при расчетах применяются более мелкие сетки, единообразные для задач электростатики (7)–(10) и для задач гомогенизации (1)–(7). Далее, при учете неоднородной поляризации, для задач (1)–(7) диэлектрические элементы SOLID227 заменяются на пьезоэлектрические с их материальными свойствами в соответствии со свойствами фаз пьезоэлектрического композита, и для каждого конечного элемента определяется своя элементная система координат, совпадающая с локальной системой координат $Ox_1^{ek} x_2^{ek} x_3^{ek}$, найденной на предыдущем этапе. При таком способе неоднородность поляризации пьезокерамики учитывается только пересчетом модулей $c_{\alpha\beta}^E$, $e_{j\alpha}$ и ϵ_{ii}^S , первоначально заданных в глобальной декартовой системе координат, в соответствующие модули в элементных системах координат. Отметим, что такой пересчет в конечно-элементном пакете ANSYS осуществляется автоматически.

2.4. Метод эффективных модулей для пьезоэлектрических композитов

Для определения величин эффективных модулей пьезокерамических композитов для ОПС и СМПП используется технология [19, 20], включающая решение краевых задач электроупругости (1)–(7) с различными ненулевыми значениями в граничных условиях (4). Так, задачи (1)–(7) решаются девять раз: шесть раз при одном ненулевом значении S_0 , когда в (4) принимаются равенства: $S_{0\beta} = S_0 \delta_{\beta\zeta}$, $\zeta = 1, 2, \dots, 6$, $E_{0j} = 0$, и три раза при одном ненулевом значении E_0 , то есть при $S_{0\beta} = 0$, $E_{0j} = E_0 \delta_{jk}$, $k = \zeta - 6$, $\zeta = 7, 8, 9$.

После получения решений $(u_1)_\zeta$, $(u_2)_\zeta$, $(u_3)_\zeta$, $(\varphi)_\zeta$, для каждой из задач (1)–(7) с $\zeta = 1, 2, \dots, 9$ вычисляются компоненты тензора напряжений $(T_1)_\zeta = (\sigma_{11})_\zeta$, $(T_2)_\zeta = (\sigma_{22})_\zeta$, $(T_3)_\zeta = (\sigma_{33})_\zeta$, $(T_4)_\zeta = (\sigma_{23})_\zeta$, $(T_5)_\zeta = (\sigma_{13})_\zeta$, $(T_6)_\zeta = (\sigma_{12})_\zeta$ и компоненты вектора электрической индукции $(D_i)_\zeta$ в объеме Ω . Далее находятся интегральные значения этих величин по формуле:

$$\langle \langle \dots \rangle \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (\dots) d\Omega. \tag{12}$$

В итоге осредненные значения напряжений и электрической индукции (12) позволяют определить полный набор эффективных модулей $c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}}$, $e_{i\beta}^{\text{eff}}$, и $\epsilon_{ij}^{S\text{eff}}$ пьезоэлектрического композитного материала.

Так, из решений задач (1)–(7) при различных ненулевых граничных условиях в перемещениях, когда в (4) для фиксированного индекса $\zeta = 1, 2, \dots, 6$ принимаются равенства

$$S_{0\beta} = S_0 \delta_{\beta\zeta}, \quad E_{0j} = 0, \quad (13)$$

могут быть получены эффективные модули жесткости $c_{\alpha\zeta}^{E\text{eff}}$ и эффективные пьезомодули $e_{i\zeta}^{\text{eff}}$ по следующим формулам:

$$c_{\alpha\zeta}^{E\text{eff}} = \langle (T_\alpha)_\zeta \rangle / S_0, \quad e_{i\zeta}^{\text{eff}} = \langle (D_i)_\zeta \rangle / S_0, \quad (14)$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, 6$, $i = 1, 2, 3$.

После решения задач (1)–(7) с разными ненулевыми электрическими воздействиями, когда в (4) для $\zeta = 7, 8, 9$, $k = \zeta - 6$, то есть для $k = 1, 2, 3$ принимаются условия:

$$S_{0\beta} = 0, \quad E_{0j} = E_0 \delta_{jk}, \quad (15)$$

еще раз могут быть вычислены эффективные пьезомодули $e_{k\alpha}^{\text{eff}}$ и эффективные диэлектрические проницаемости $\varepsilon_{ik}^{S\text{eff}}$ согласно выражениям:

$$e_{k\alpha}^{\text{eff}} = -\langle (T_\alpha)_\zeta \rangle / E_0, \quad \varepsilon_{ik}^{S\text{eff}} = \langle (D_i)_\zeta \rangle / E_0. \quad (16)$$

Обоснование представленного способа определения эффективных модулей приведено в работах [20, 24], причем оно распространяется как на пьезокомпозиты с неоднородной поляризацией пьезокерамической матрицы, так и на композиты с проводящими включениями. Для частного случая пористых диэлектрических композитов с металлизированными поверхностями пор корректность используемого подхода строго доказана в [25, 26] на основе предельных переходов в аналитических решениях задач гомогенизации.

Отметим, что данный метод гомогенизации основан на энергетических соотношениях между композитом и гомогенной средой и на соотношениях Хилла для осредненных величин в пьезоэлектрических композитах [20, 24, 27]:

$$\langle \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \langle \mathbf{S} \rangle, \quad \langle \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{D} \rangle \cdot \langle \mathbf{E} \rangle, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \mathbf{S}_0, \quad \langle \mathbf{D} \rangle = \mathbf{D}_0. \quad (17)$$

Естественно, что задачи гомогенизации (1)–(7) с (12)–(16) также могут быть решены без учета неоднородности поля поляризации. В этом более простом случае пьезокерамическая матрица считается обычным пьезоэлектрическим материалом кристаллографического класса *bmm*, который предполагается однородно поляризованным вдоль оси Ox_3 .

Заметим, что при определении полного набора эффективных модулей проверялся тип анизотропии результирующего гомогенного материала и установлено, что он сохраняет класс сингонии *bmm* пьезокерамической матрицы, небольшое отличие имеют лишь модули $c_{66}^{E\text{eff}}$ и $(c_{11}^{E\text{eff}} - c_{12}^{E\text{eff}})/2$. Таким образом, основными модулями пьезокомпозита оказываются 10 эффективных модулей: $c_{11}^{E\text{eff}}$, $c_{12}^{E\text{eff}}$, $c_{13}^{E\text{eff}}$, $c_{33}^{E\text{eff}}$, $c_{44}^{E\text{eff}}$, e_{31}^{eff} , e_{33}^{eff} , e_{15}^{eff} , $\varepsilon_{11}^{S\text{eff}}$ и $\varepsilon_{33}^{S\text{eff}}$. Однако такой класс анизотропии может не сохраняться у представительных объемов с ярко выраженной геометрической асимметрией.

3. Численные результаты

Вычислительные эксперименты проведены для композита с матрицей из пьезокерамики PZT-5Н, включениями из никеля и вакуумными порами. В расчетах использовались следующие модули пьезокерамики PZT-5Н: $c_{11}^E = 12,6 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{12}^E = 7,95 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{13}^E = 8,41 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{33}^E = 11,7 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{44}^E = 2,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $e_{31} = -6,5$ Кл/м², $e_{33} = 23,3$ Кл/м², $e_{15} = 17$ Кл/м², $\varepsilon_{11}^S = 1700\varepsilon_0$, $\varepsilon_{33}^S = 1470\varepsilon_0$. Вакуумная пора моделировалась как пьезоэлектрический материал с пренебрежимо малыми модулями: $(c_{\alpha\beta}^E)_v = \eta c_{\alpha\beta}^E$, $(e_{i\alpha})_v = \eta$ Кл/м², $\eta = 10^{-10}$, $(\varepsilon_{ii}^S)_v = \varepsilon_0$. Металл (никель) считался упругим пьезоэлектрическим материалом

с пренебрежимо малыми пьезомодулями: $(e_{\alpha})_m = \eta \text{ Кл/м}^2$ и очень высокими модулями диэлектрической проницаемости: $(\epsilon_{ii}^s)_m = \chi \epsilon_0$, $\chi \gg 1$. Как показали тестовые расчеты для СМПП, значения эффективных модулей становились стабильными уже при $\chi = 10^8$. Однако множитель χ , для большей надежности всей серии вычислений, полагался равным 10^{12} .

Никель рассматривался как изотропный материал с модулем Юнга $E_m = 20,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ и коэффициентом Пуассона $\mu_m = 0,31$. Выбор никеля в качестве компонента композита был сделан из-за его достаточно высокой механической жесткости и относительно низкой стоимости [28, 29]. Так, для исследуемого материала продольная упругая жесткость никеля составляла около 225% от максимального модуля упругости c_{11}^E пьезокерамики PZT-5Н.

Отметим, что конечные элементы в объеме Ω_v можно было не включать в общую модель, поскольку, в силу пренебрежимо малых модулей фиктивного материала поры, напряжения \mathbf{T} и электрические индукции \mathbf{D} являются здесь практически нулевыми и не оказывают влияния на значения эффективных модулей (14), (16). Однако, для проверки корректности вычислений, в программах APDL ANSYS проводился подсчет интегральных характеристик во всех фазах композита, и проверялось выполнение соотношений Хилла (17), справедливых для различных вариантов композитов ОПС и СМПП при учете механических и электрических полей в поре и в металлическом слое.

На следующих рисунках представлены эффективные свойства композитов типа ОПС и СМПП в сравнении со свойствами (соответствующими модулями) плотной пьезокерамической матрицы. Например, относительные модули упругости определяются в виде $r(c_{\alpha\beta}^E) = c_{\alpha\beta}^{E \text{ eff}} / c_{\alpha\beta}^E$, и аналогичным образом находятся относительные пьезомодули и диэлектрические проницаемости. На рисунках 3–5 кривые для ОПС, СМПП с $v_m = 0,01$ и СМПП с $v_m = 0,27$ помечены цифрами 1, 2 и 3 соответственно. Кроме того, сплошными линиями изображены эффективные свойства композитов с однородно поляризованной пьезокерамической матрицей, а пунктирными линиями — кривые, построенные для композитов с учетом неоднородности полей поляризации.

На рисунках 3а и 3б показаны кривые относительных эффективных модули жесткости $r(c_{33}^E)$ и $r(c_{13}^E)$, соответственно, в зависимости от объемной доли пористости v_p . Как видно, с увеличением пористости они монотонно уменьшаются, что вполне очевидно, поскольку считается, что фиктивный материал поры имеет пренебрежимо малые значения модулей упругости. Эффективные модули упругости для СМПП можно повысить по сравнению с ОПС за счет увеличения доли металла. Например, при $v_p = 0,25$ и $v_m = 0,27$ модули упругости $r(c_{33}^E)$ и $r(c_{13}^E)$ для СМПП увеличиваются на 42% и 41,7% соответственно по сравнению с теми же модулями ОПС. Неоднородность поляризованного поля незначительно влияет на модули упругой жесткости. Так, для $v_p = 0,25$ при учете неоднородности вектора поляризации относительный модуль упругости $r(c_{33}^E)$, по сравнению с композитом с однородно поляризованной пьезокерамической матрицей, уменьшается на 4,06% для ОПС, но увеличивается на 5,5% и 4,08%, соответственно, для СМПП с $v_m = 0,01$ и для СМПП с $v_m = 0,27$. Интересно, что хотя в СМПП с $v_m = 0,01$ имеется металлический слой, более жесткий, чем пьезокерамическая матрица,

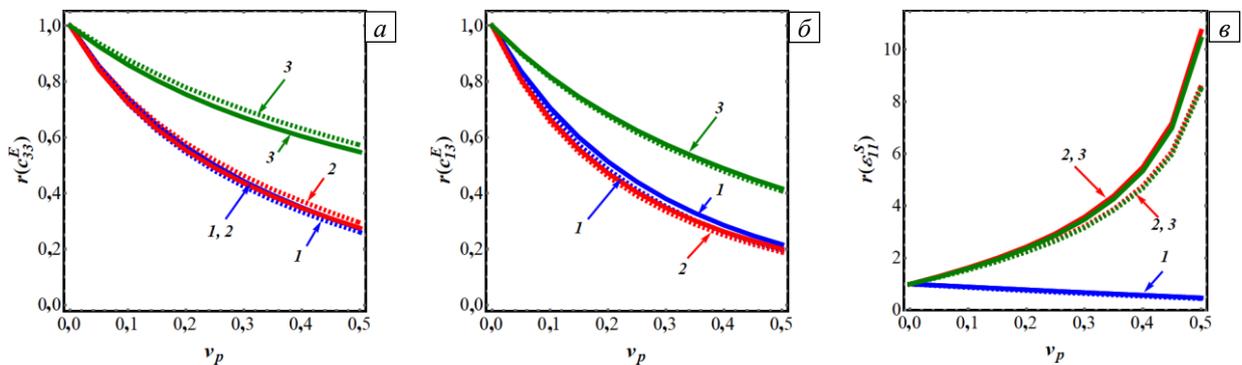


Рис. 3. Характер относительных эффективных модулей жесткости $r(c_{33}^E)$ (а), $r(c_{13}^E)$ (б) и относительного модуля диэлектрической проницаемости $r(\epsilon_{11}^s)$ (в) в зависимости от объемной доли пористости v_p ; ОПС (кривые 1), СМПП с $v_m = 0,01$ (2), СМПП с $v_m = 0,27$ (3); однородное (сплошные линии) и неоднородное (пунктирные линии) поле поляризации

ее эффективные модули упругой жесткости $r(c_{13}^E)$ оказываются меньше аналогичных модулей ОПС. Этот необычный эффект объясняется разной величиной пьезоэлектрического вклада в эквивалентные модули упругости в ОПС и СМПП.

Изменение относительной эффективной диэлектрической проницаемости $r(\epsilon_{11}^S)$ в зависимости от пористости представлено на рисунке 3в. В отличие от ОПС, относительный модуль диэлектрической проницаемости в СМПП монотонно и заметно увеличивается с ростом пористости. Эффективная диэлектрическая проницаемость становится выше и у обычных диэлектрических композитов с металлическими включениями и описывается формулой Максвелла [26, 27]. В СМПП, как и в диэлектриках с проводящими включениями, металлизированная поверхность предотвращает распространение электрического поля в область Ω_p . Поэтому электрическое поле, вызванное электрическим воздействием (15), полностью сосредоточивается в области Ω_{pz} , занятой пьезокерамикой. Его интегральное значение по объему Ω_{pz} больше, чем соответствующее интегральное значение в ОПС при аналогичных условиях. Еще заметнее влияние металлизации поверхностей пор проявляется в интегральном значении поля электрической индукции. В результате для СМПП эффективные коэффициенты диэлектрической проницаемости, определяемые по (16), увеличиваются с ростом пористости, то есть с ростом площади металлизированных поверхностей. При большой степени пористости отличия между эффективными диэлектрическими проницаемостями СМПП и ОПС становятся существенными. Например, относительный модуль диэлектрической проницаемости $r(\epsilon_{11}^S)$ СМПП при $v_p = 0,4$ увеличивается на 853% по сравнению с аналогичным модулем ОПС.

С увеличением пористости относительные диэлектрические проницаемости $r(\epsilon_{11}^S)$ и $r(\epsilon_{33}^S)$ изменяются примерно одинаково. При учете неоднородности поляризации происходит следующее: относительный диэлектрический модуль $r(\epsilon_{11}^S)$ уменьшается у всех композитных систем, что и показано на рисунке 3в; при $v_p = 0,25$ относительный диэлектрический модуль ОПС, СМПП с $v_m = 0,01$ и СМПП с $v_m = 0,27$ уменьшается на 5,48, 8,5 и 7,67% соответственно. Однако учет неоднородной поляризации влияет на эффективный диэлектрический модуль $r(\epsilon_{33}^S)$ для СМПП в меньшей степени.

На рисунке 4 представлены зависимости пьезомодулей $r(e_{31})$, $r(e_{33})$, и $r(e_{15})$ от пористости. Относительные пьезомодули $r(e_{31})$, $r(e_{33})$, и $r(e_{15})$ у ОПС уменьшаются с увеличением пористости, поскольку соответствующие пьезомодули вакуумного включения пренебрежимо малы. Между тем, как показано на рисунке 4а, относительный пьезоэлектрический модуль $r(e_{31})$ СМПП монотонно увеличивается с ростом пористости, а пьезомодули $r(e_{33})$ и $r(e_{15})$, напротив, уменьшаются (см. Рис. 4б и 4в). Если в СМПП объемная доля композитной поры сохраняется, а доля металла v_m увеличивается, то это вызывает уменьшение $r(e_{31})$ и рост $r(e_{33})$ и $r(e_{15})$. Отличия между пьезомодулями СМПП и ОПС могут быть достаточно большими, особенно это проявляется на относительных модулях $r(e_{31})$. Так, при $v_p = 0,3$ относительный пьезомодуль $r(e_{31})$ СМПП увеличивается на 726%, а относительный пьезомодуль $r(e_{33})$ СМПП уменьшается на 49% по сравнению с соответствующими модулями ОПС с той же пористостью.

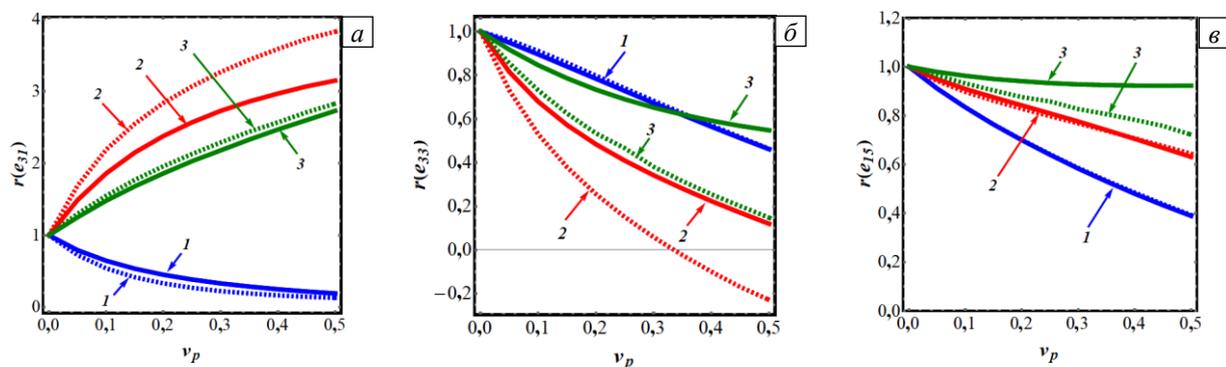


Рис. 4. Характер относительных пьезоэлектрических модулей $r(e_{31})$ (а), $r(e_{33})$ (б), и $r(e_{15})$ (в) в зависимости от объемной доли пористости; ОПС (кривые 1), СМПП с $v_m = 0,01$ (2), СМПП с $v_m = 0,27$ (3); однородное (сплошные линии) и неоднородное (пунктирные линии) поле поляризации

Учет неоднородности поля поляризации в наибольшей степени влияет на относительный пьезомодуль $r(e_{33})$ СМПП, но в меньшей — на пьезоэлектрические модули ОПС, на пьезомодуль $r(e_{15})$ СМПП с $v_m = 0,01$ и на пьезомодуль $r(e_{31})$ СМПП с $v_m = 0,27$ (см. Рис. 4). Например, для ОПС при $v_p = 0,25$ и учете неоднородно поляризованного поля пьезоэлектрический модуль $r(e_{31})$ уменьшается на 30,11%, а пьезомодули $r(e_{33})$ и $r(e_{15})$ увеличиваются на 1,64% и на 0,34% по сравнению с соответствующими модулями ОПС с однородно поляризованной пьезокерамической матрицей. Для СМПП увеличение доли металлического включения ведет к тому, что влияние неоднородного поляризованного поля на пьезомодули $r(e_{31})$ и $r(e_{33})$ ослабевает, но усиливается его воздействие на эффективный пьезомодуль e_{15}^{eff} . Так, в СМПП с $v_p = 0,25$ при учете неоднородности поля поляризации относительный пьезомодуль $r(e_{33})$ уменьшается на 63,1% и 32,5% от своих аналогичных значений для СМПП с однородно поляризованной пьезокерамической матрицей при $v_m = 0,01$ и $v_m = 0,27$ соответственно.

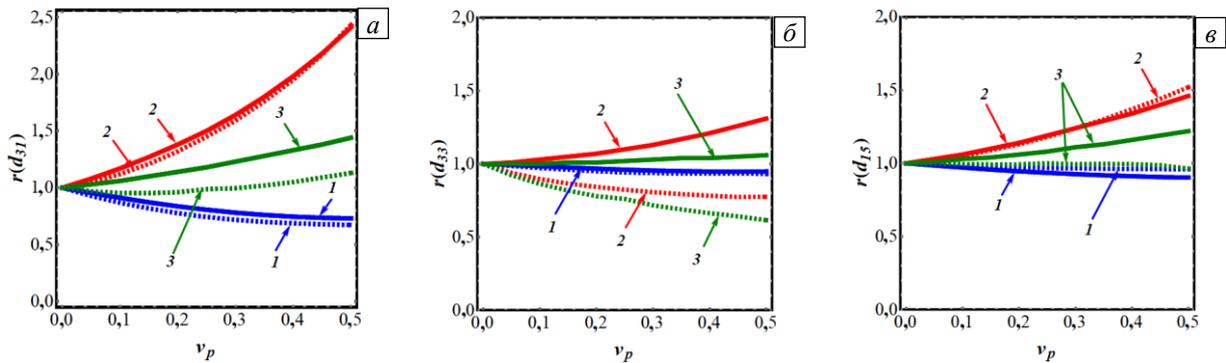


Рис. 5. Характер относительных пьезоэлектрических модулей $r(d_{31})$ (а), $r(d_{33})$ (б) и $r(d_{15})$ (в) в зависимости от объемной доли пористости; ОПС (кривые 1), СМПП с $v_m = 0,01$ (2), СМПП с $v_m = 0,27$ (3); однородное (сплошные линии) и неоднородное (пунктирные линии) поле поляризации

На рисунке 5 представлены относительные коэффициенты пьезоэлектрической деформации $r(d_{31})$, $r(d_{33})$ и $r(d_{15})$. Эти пьезомодули являются важными показателями для оценки эффективности пьезоэлектрических материалов при различных практических применениях и определяются по формулам $\mathbf{d}^{eff} = \mathbf{e}^{eff} \cdot (\mathbf{c}^{E^{eff}})^{-1}$. Для ОПС относительные пьезоэлектрические модули $r(d_{31})$, $r(d_{33})$ и $r(d_{15})$ уменьшаются с увеличением объемной доли v_p , причем значения $r(d_{33})$ и $r(d_{15})$ остаются почти постоянными. Однако для СМПП с однородной поляризацией пьезокерамической матрицы относительные коэффициенты пьезоэлектрической деформации монотонно возрастают с увеличением пористости, особенно это касается коэффициента $r(d_{31})$. Как видно из рисунка 5, относительные пьезомодули $r(d_{31})$, $r(d_{33})$, и $r(d_{15})$ СМПП уменьшаются с увеличением доли металла. Учет неоднородной поляризации незначительно влияет на относительные пьезомодули $r(d_{31})$, $r(d_{33})$ и $r(d_{15})$ ОПС, а также на $r(d_{31})$ и $r(d_{15})$ в СМПП с $v_m = 0,01$. Например, с учетом неоднородности поляризованного поля для ОПС при $v_p = 0,4$ пьезомодули деформации $r(d_{31})$ и $r(d_{33})$ уменьшаются на 7,8 и 1,4% соответственно, но пьезомодуль $r(d_{15})$ возрастает на 5,4%, от аналогичных значений для ОПС с однородной поляризацией. Для СМПП учет неоднородной поляризации оказывает более существенное влияние, причем с увеличением объемной доли металла зависимости коэффициентов пьезоэлектрической деформации от неоднородности поля поляризации усиливаются. Так, при учете неоднородности поляризованного поля и значениях $v_p = 0,3$ и $v_m = 0,27$ пьезомодули $r(d_{31})$, $r(d_{33})$ и $r(d_{15})$ уменьшаются на 19, 30,4 и 10,5% по сравнению с соответствующими модулями композитов с однородно поляризованной пьезокерамической матрицей.

4. Заключение

Итак, в данной статье исследуется задача гомогенизации малоизученного пористого пьезоэлектрического композита, у которого на границах пор имеется металлическое покрытие. Такой

композит, названный СМПП, имеет ряд лучших механических и электромеханических свойств по сравнению с обычной пористой системой (ОПС). Компьютерное моделирование на основе метода конечных элементов позволило проанализировать эффективные свойства исследуемых пьезокомпозитных систем в зависимости от пористости и объемной доли металла, в который заключены поры. Изучено влияние неоднородности поля поляризации на эффективные свойства СМПП и ОПС. Отмечено, что наличие металла увеличивает в СМПП электрическое поле и поляризацию на поверхности раздела между пьезоэлектрической и металлической фазами, что вызывает резкое изменение эффективных пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей в этой системе по сравнению с эффективными модулями ОПС. Между тем, учет неоднородной поляризации оказывает менее значительное влияние на эффективные модули ОПС. Обнаружено, что поперечный пьезомодуль $|d_{31}^{\text{eff}}|$ и сдвиговой пьезомодуль d_{15}^{eff} у СМПП оказываются выше, чем у ОПС, особенно при малых долях металла в их объеме. Данный факт позволяет рекомендовать пористые пьезокомпозиты с металлизированными поверхностями пор в качестве активных материалов для пьезопреобразователей, работающих на использовании поперечных и сдвиговых пьезоэлектрических коэффициентов деформации.

В продолжение проведенных исследований в дальнейшем планируется рассмотреть задачи гомогенизации для более сложных представительных объемов СМПП, с частичным покрытием металлом поверхностей пор, а также провести компьютерное моделирование пьезоизлучателей с активными элементами, выполненными из материалов СМПП.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90102.

Литература

1. *Vijaya M.S.* Piezoelectric materials and devices: Applications in engineering and medical sciences. CRC press, 2012. 186 p. <https://doi.org/10.1201/b12709>
2. *Elahi H., Munir K., Eugeni M., Abrar M., Khan A., Arshad A., Gaudenzi P.* A review on applications of piezoelectric materials in aerospace industry // *Integrated Ferroelectrics*. 2020. Vol. 211. P. 25-44. <https://doi.org/10.1080/10584587.2020.1803672>
3. *Gripp J.A.B., Rade D.A.* Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review // *Mech. Syst. Signal Process.* 2018. Vol. 112. P. 359-383. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.04.041>
4. *Wang L.-P., Wolf R.A., Wang Y., Deng K.K., Zou L., Davis R.J., Trolrier-McKinstry S.* Design, fabrication, and measurement of high-sensitivity piezoelectric microelectromechanical systems accelerometers // *J. Microelectromech. Syst.* 2003. Vol. 12. P. 433-439. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2003.811749>
5. *Brownjohn J.M.W.* Structural health monitoring of civil infrastructure // *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2007. Vol. 365. P. 589-622. <https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1925>
6. *Smith W.A.* The role of piezocomposites in ultrasonic transducers // *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.* 1989. Vol. 2. P. 755-766. <https://doi.org/10.1109/ULTSYM.1989.67088>
7. *Della C.N., Shu D.* The performance of 1–3 piezoelectric composites with a porous non-piezoelectric matrix // *Acta Mater.* 2008. Vol. 56. P. 754-761. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.10.022>
8. *Iyer S., Venkatesh T.A.* Electromechanical response of porous piezoelectric materials: Effects of porosity connectivity // *Appl. Phys. Lett.* 2010. Vol. 97. 072904. <https://doi.org/10.1063/1.3481416>
9. *Iyer S., Venkatesh T.A.* Electromechanical response of (3-0) porous piezoelectric materials: Effects of porosity shape // *J. Appl. Phys.* 2011. Vol. 110. 034109. <https://doi.org/10.1063/1.3622509>
10. *Yoon S.-J., Moon J.H., Kim H.-J.* Piezoelectric and mechanical properties of $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.52}\text{Ti}_{0.48})\text{O}_3\text{-Pb}(\text{Y}_{2/3}\text{W}_{1/3})\text{O}_3$ (PZT–PYW) ceramics // *J. Mater. Sci.* 1997. Vol. 32. P. 779-782. <https://doi.org/10.1023/A:1018516608868>
11. *Mehta K., Virkar A.V.* Fracture mechanisms in ferroelectric-ferroelastic lead zirconate titanate (Zr: Ti=0.54:0.46) ceramics // *J. Am. Ceram. Soc.* 1990. Vol. 73. P. 567-574. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1990.tb06554.x>
12. *Liu W., Li N., Wang Y., Xu H., Wang J., Yang J.* Preparation and properties of 3–1 type PZT ceramics by a self-organization method // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2015. Vol. 35. P. 3467-3474. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.06.007>
13. *Xiang P.-H., Dong X.-L., Chen H., Zhang Z., Guo J.-K.* Mechanical and electrical properties of small amount of oxides reinforced PZT ceramics // *Ceram. Int.* 2003. Vol. 29. P. 499-503. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(02\)00193-1](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(02)00193-1)
14. *Zhang H.L., Li J.-F., Zhang B.-P.* Fabrication and evaluation of PZT/Ag composites and functionally graded piezoelectric actuators // *J. Electroceram.* 2006. Vol. 16. P. 413-417. <https://doi.org/10.1007/s10832-006-9890-4>
15. *Takagi K., Li J.-F., Yokoyama S., Watanabe R.* Fabrication and evaluation of PZT/Pt piezoelectric composites and functionally graded actuators // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2003. Vol. 23. P. 1577-1583. [https://doi.org/10.1016/S0955-2219\(02\)00407-7](https://doi.org/10.1016/S0955-2219(02)00407-7)
16. *Rybyanets A. N., Shvetsov I.A., Lugovaya M.A., Petrova E.I., Shvetsova N.A.* Nanoparticles transport using polymeric nano- and microgranules: novel approach for advanced material design and medical applications // *J. Nano- Electron. Phys.* 2018. Vol. 10. 02005. [https://doi.org/10.21272/jnep.10\(2\).02005](https://doi.org/10.21272/jnep.10(2).02005)
17. *Rybyanets A.N., Naumenko A.A.* Nanoparticles transport in ceramic matrices: A novel approach for ceramic matrix composites fabrication // *J. Mod. Phys.* 2013. Vol. 4. P. 1041-1049. <https://doi.org/10.4236/jmp.2013.48140>
18. *Newnham R.E., Skinner D.P., Cross L.E.* Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites // *Mater. Res. Bull.* 1978. Vol. 13. P. 525-536. [https://doi.org/10.1016/0025-5408\(78\)90161-7](https://doi.org/10.1016/0025-5408(78)90161-7)

19. Nasedkin A., Nassar M.E. Effective properties of a porous inhomogeneously polarized by direction piezoceramic material with full metalized pore boundaries: Finite element analysis // J. Adv. Dielect. 2020. Vol. 10. 2050018. <http://doi.org/10.1142/S2010135X20500186>
20. Наседкин А.В., Наседкина А.А., Нассар М.Э. Гомогенизация пористых пьезокомпозиатов с экстремальными свойствами на границах пор методом эффективных модулей // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 6. С. 82-92. <http://doi.org/10.31857/S057232992005013X>
21. Martínez-Ayuso G., Friswell M.I., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R. Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization // Acta Mater. 2019. Vol. 173. P. 332-341. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.04.021>
22. Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganessian P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package // Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials / Ed. M. Sumbatyan. Springer, 2019. P. 113-131. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_8
23. Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rybyanets A.N. Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces // Materials Physics & Mechanics. 2018. Vol. 40. No. 1. P. 12-21. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4012018_3
24. Nasedkin A.V., Shevtsova M.S. Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity // Ferroelectrics and superconductors: Properties and applications / Ed. I.A. Parinov. New York: Nova Science Publ., 2011. P. 231-254.
25. Kudimova A.B., Nasedkin A.V. Limit transitions in plane homogenization problems for two-phase dielectric composites with extreme material properties of one phase // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. Vol. 1847. 012039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1847/1/012039>
26. Кудимова А.Б., Наседкин А.В. О предельных переходах в пространственных задачах гомогенизации двухкомпонентных диэлектрических композитов с экстремальными модулями одной из фаз // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2021. № 1. С. 25-32. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-1-25-32>
27. Hori M., Nemat-Nasser S. Universal bounds for effective piezoelectric moduli // Mech. Mater. 1998. Vol. 30. P. 1-19. [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(98\)00029-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(98)00029-5)
28. Wang J., Li W. A new piezoelectric hollow cylindrical transducer with multiple concentric annular metal fillers // Mater. Res. Express. 2019. Vol. 6. 055701. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab0318>
29. Du H., Lin X., Zheng H., Qu B., Huang Y., Chu D. Colossal permittivity in percolative ceramic/metal dielectric composites // Journal of Alloys and Compounds. 2016. Vol. 663. P. 848-861. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.12.171>

References

1. Vijaya M.S. *Piezoelectric materials and devices: Applications in engineering and medical sciences*. CRC press, 2012. 186 p. <https://doi.org/10.1201/b12709>
2. Elahi H., Munir K., Eugeni M., Abrar M., Khan A., Arshad A., Gaudenzi P. A review on applications of piezoelectric materials in aerospace industry. *Integrated Ferroelectrics*, 2020, vol. 211, pp. 25-44. <https://doi.org/10.1080/10584587.2020.1803672>
3. Gripp J.A.B., Rade D.A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2018, vol. 112, pp. 359-383. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.04.041>
4. Wang L.-P., Wolf R.A., Wang Y., Deng K.K., Zou L., Davis R.J., Trolier-McKinstry S. Design, fabrication, and measurement of high-sensitivity piezoelectric microelectromechanical systems accelerometers. *J. Microelectromech. Syst.*, 2003, vol. 12, pp. 433-439. <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2003.811749>
5. Brownjohn J.M.W. Structural health monitoring of civil infrastructure. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 2007, vol. 365, pp. 589-622. <https://doi.org/10.1098/rsta.2006.1925>
6. Smith W.A. The role of piezocomposites in ultrasonic transducers. *Proc. IEEE Ultrasonics Symp.*, 1989, vol. 2, pp. 755-766. <https://doi.org/10.1109/ULTSYM.1989.67088>
7. Della C.N., Shu D. The performance of 1-3 piezoelectric composites with a porous non-piezoelectric matrix. *Acta Mater.*, 2008, vol. 56, pp. 754-761. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.10.022>
8. Iyer S., Venkatesh T.A. Electromechanical response of porous piezoelectric materials: Effects of porosity connectivity. *Appl. Phys. Lett.*, 2010, vol. 97, 072904. <https://doi.org/10.1063/1.3481416>
9. Iyer S., Venkatesh T.A. Electromechanical response of (3-0) porous piezoelectric materials: Effects of porosity shape. *J. Appl. Phys.*, 2011, vol. 110, 034109. <https://doi.org/10.1063/1.3622509>
10. Yoon S.-J., Moon J.H., Kim H.-J. Piezoelectric and mechanical properties of $\text{Pb}(\text{Zr}_{0.52}\text{Ti}_{0.48})\text{O}_3\text{-Pb}(\text{Y}_{2/3}\text{W}_{1/3})\text{O}_3$ (PZT-PYW) ceramics. *J. Mater. Sci.*, 1997, vol. 32, pp. 779-782. <https://doi.org/10.1023/A:1018516608868>
11. Mehta K., Virkar A.V. Fracture mechanisms in ferroelectric-ferroelastic lead zirconate titanate (Zr: Ti=0.54:0.46) ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1990, vol. 73, pp. 567-574. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1990.tb06554.x>
12. Liu W., Li N., Wang Y., Xu H., Wang J., Yang J. Preparation and properties of 3-1 type PZT ceramics by a self-organization method. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2015, vol. 35, pp. 3467-3474. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.06.007>
13. Xiang P.-H., Dong X.-L., Chen H., Zhang Z., Guo J.-K. Mechanical and electrical properties of small amount of oxides reinforced PZT ceramics. *Ceram. Int.*, 2003, vol. 29, pp. 499-503. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(02\)00193-1](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(02)00193-1)
14. Zhang H.L., Li J.-F., Zhang B.-P. Fabrication and evaluation of PZT/Ag composites and functionally graded piezoelectric actuators. *J. Electroceram.*, 2006, vol. 16, pp. 413-417. <https://doi.org/10.1007/s10832-006-9890-4>
15. Takagi K., Li J.-F., Yokoyama S., Watanabe R. Fabrication and evaluation of PZT/Pt piezoelectric composites and functionally graded actuators. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2003, vol. 23, pp. 1577-1583. [https://doi.org/10.1016/S0955-2219\(02\)00407-7](https://doi.org/10.1016/S0955-2219(02)00407-7)

16. Rybyanets A. N., Shvetsov I.A., Lugovaya M.A., Petrova E.I., Shvetsova N.A. Nanoparticles transport using polymeric nano- and microgranules: novel approach for advanced material design and medical applications. *J. Nano- Electron. Phys.*, 2018, vol. 10, 02005. [https://doi.org/10.21272/jnep.10\(2\).02005](https://doi.org/10.21272/jnep.10(2).02005)
17. Rybyanets A.N., Naumenko A.A. Nanoparticles transport in ceramic matrices: A novel approach for ceramic matrix composites fabrication. *J. Mod. Phys.*, 2013, vol. 4, pp. 1041-1049. <https://doi.org/10.4236/jmp.2013.48140>
18. Newnham R.E., Skinner D.P., Cross L.E. Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites. *Mater. Res. Bull.*, 1978, vol. 13, pp. 525-536. [https://doi.org/10.1016/0025-5408\(78\)90161-7](https://doi.org/10.1016/0025-5408(78)90161-7)
19. Nasedkin A., Nassar M.E. Effective properties of a porous inhomogeneously polarized by direction piezoceramic material with full metalized pore boundaries: Finite element analysis. *J. Adv. Dielect.*, 2020, vol. 10, 2050018. <http://doi.org/10.1142/S2010135X20500186>
20. Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Nassar M.E. Homogenization of porous piezocomposites with extreme properties at pore boundaries by effective moduli method. *Mech. Solids*, 2020, vol. 55, pp. 827-836. <https://doi.org/10.3103/S0025654420050131>
21. Martínez-Ayuso G., Friswell M.I., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R. Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization. *Acta Mater.*, 2019, vol. 173, pp. 332-341. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.04.021>
22. Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganessian P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package. *Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials*, ed. M. Sumbatyan. Springer, 2019. Pp. 113-131. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_8
23. Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Rybyanets A.N. Numerical analysis of effective properties of heterogeneously polarized porous piezoceramic materials with local alloying pore surfaces. *Materials Physics & Mechanics*, 2018, vol. 40, no. 1, pp. 12-21. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.4012018_3
24. Nasedkin A.V., Shevtsova M.S. Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity. *Ferroelectrics and superconductors: Properties and applications*, ed. I.A. Parinov. New York, Nova Science Publ., 2011. Pp. 231-254.
25. Kudimova A.B., Nasedkin A.V. Limit transitions in plane homogenization problems for two-phase dielectric composites with extreme material properties of one phase. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2021, vol. 1847, 012039. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1847/1/012039>
26. Kudimova A.B., Nasedkin A.V. About limit transitions in spatial homogenization problems for two-component dielectric composites with extremal moduli for one of phases. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki – Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2021, no. 1, pp. 25-32. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-1-25-32>
27. Hori M., Nemat-Nasser S. Universal bounds for effective piezoelectric moduli. *Mech. Mater.*, 1998, vol. 30, pp. 1-19. [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(98\)00029-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(98)00029-5)
28. Wang J., Li W. A new piezoelectric hollow cylindrical transducer with multiple concentric annular metal fillers. *Mater. Res. Express*, 2019, vol. 6, 055701. <https://doi.org/10.1088/2053-1591/ab0318>
29. Du H., Lin X., Zheng H., Qu B., Huang Y., Chu D. Colossal permittivity in percolative ceramic/metal dielectric composites. *Journal of Alloys and Compounds*, 2016, vol. 663, pp. 848-861. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2015.12.171>

Поступила в редакцию 16.04.2021; после доработки 04.05.2021; принята к опубликованию 19.05.2021