

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.2.13](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.13)

УДК 532.517

ПЛОСКОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ

В.Н. Колодежнов

Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация

Представлен краткий анализ публикаций, посвященных вопросам экспериментального и теоретического исследования спиральных течений жидкости. Течения такого рода реализуются, в частности, в окрестности сливных отверстий, а также постоянно наблюдаются в природе в форме смерчей и торнадо. Проведено математическое моделирование плоского течения в цилиндрическом слое при подводе вязкой несжимаемой жидкости по нормали к его внешней поверхности и, соответственно, вихревом стоке через внутреннюю поверхность. При этом за основу принято известное общее решение задачи вихревого течения в неограниченном пространстве. Предложен вариант записи двух граничных условий для определения азимутальной составляющей скорости. Первое граничное условие заключается в требовании отсутствия азимутальной составляющей скорости на входе в цилиндрический слой. Второе, менее очевидное, граничное условие принято в форме, когда на входе в цилиндрический слой задается значение второго инварианта тензора скоростей деформаций. Приводится обоснование такого вида второго граничного условия. В итоге стало возможным построение точного решения задачи в общей постановке. Показано, что на выходе из слоя азимутальная составляющая скорости, которая изначально на входе в слой отсутствовала, может на порядок и более превышать радиальную составляющую скорости. Для рассматриваемого течения в полярной системе координат построено семейство линий тока и показано, что в общем случае эти линии тока должны иметь точку перегиба. Численно получена зависимость от числа Рейнольдса радиальной координаты положения точки перегиба. Также демонстрируется, что в окрестности выхода из цилиндрического слоя давление в жидкости принимает значения ниже, чем в чисто радиальном течении. Предлагается альтернативный вариант второго граничного условия – постановка по давлению, при определении констант интегрирования в выражении для азимутальной составляющей скорости.

Ключевые слова: вязкая несжимаемая жидкость, плоское спиральное течение, граничные условия, второй инвариант тензора скоростей деформаций, линии тока, точка перегиба

PLANE VORTEX FLOW IN A CYLINDRICAL LAYER

V.N. Kolodezhnov

Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation

This paper presents brief analysis of publications dealing with the issues of experimental and theoretical studies of spiral fluid flows. The flows of this kind occur, in particular, in the vicinity of drain holes and are also observed in nature as storms and tornadoes. A mathematical modeling of a plane flow in a cylindrical layer has been carried out assuming that the viscous incompressible fluid is supplied along the normal to its outer surface and, accordingly, the vortex flow happens through its inner surface. The well-known general solution of the problem of vortex flow in unlimited space has been taken as a basis. A variant setting of the two boundary conditions for determining the velocity azimuthal component is proposed. The first boundary condition is the requirement for the azimuthal velocity component absence at the cylindrical layer entrance. The second, less obvious, boundary condition is adopted in the form when the strain rate tensor second invariant value is set at the cylindrical layer entrance. The rationale for such variant setting of the second boundary condition is given. Finally, it became possible to find an accurate solution to the problem in a general setting. It is shown that at the layer exit, the velocity azimuthal component, which was initially absent at the layer entrance, can exceed the radial velocity component by an order of magnitude or more. A family of streamlines is constructed for the examined flow in the polar coordinate system. It is shown that, in the general case, the streamlines for the flow under consideration must have an inflection point. The numerical dependence of the inflection point position radial coordinate on the Reynolds number was obtained. It is also shown that in the cylindrical layer exit vicinity the fluid pressure takes on lower values than for the purely radial flow case. An alternative formulation of the second boundary condition for the pressure is presented for determining the integration constants in the azimuthal velocity component expression.

Key words: viscous incompressible fluid, plane spiral flow, boundary conditions, the second invariant of the strain rate tensor, streamlines, inflection point

1. Введение

С точки зрения моделирования природных явлений и функционирования технических устройств представляют интерес спиральные течения. Такие течения возникают, например, в сливных отверстиях. Различные вопросы, касающиеся экспериментального исследования расходных характеристик и условий формирования воронок при истечении жидкостей, обсуждаются в работах [1–6]. Хорошо известны природные спиральные течения в атмосфере и водоемах Земли, которые реализуются в виде воронок, смерчей и торнадо [7–10]. Подробный обзор подобных исследований приведен в работе [11].

Весьма обширна библиография, отражающая теоретическое изучение, а также математическое моделирование динамики вихревых течений. Теория динамики вращающейся жидкости и ее аспекты применительно к некоторым техническим проблемам изложены в монографиях [12–15]. Анализ различных вариантов постановки краевых условий представлен в [16]. Целый ряд важных результатов получен в [17–30]. Во многих случаях вихревые течения рассматриваются в областях, ограниченных цилиндрическими поверхностями.

В работе [31] рассмотрена задача течения газа через цилиндрическую поверхность во вращающейся системе координат. Показано, что после возникновения радиального течения при стоке газа внутрь цилиндра сразу же начинается формирование спирального течения под действием силы Кориолиса. Решение задачи проводится в рамках модели сжимаемого идеального газа для случая, когда пренебрежение его вязкостью допустимо.

Хорошо известна задача о вращательном течении Тейлора–Куэтта для вязкой жидкости в зазоре между коаксиальными цилиндрами. Начиная с результатов Тейлора [32], которые в дальнейшем получили развитие в работах разных авторов [33–36], установлено, что при превышении угловой скоростью вращения внутреннего цилиндра некоторого критического значения у частиц жидкости «генерируются» поперечные к ранее существовавшим круговым линиям тока составляющие скорости, и в зазоре начинают формироваться вихревые структуры. При этом линии тока у таких структур представляют собой спирали, навитые на торы.

Задача течения между двумя коаксиальными полубесконечными цилиндрами при заглушенном с одного конца зазоре между цилиндрами рассматривалась в [37]. Моделируется асимптотическое течение, которое может формироваться на достаточно большом удалении от свободного торцевого сечения коаксиальных цилиндров. Показано, что в осесимметричном случае структура замкнутых линий тока в зазоре в направлении продольной оси цилиндров приобретает ячеистый характер. При ширине зазора, пренебрежимо малой по сравнению с радиусом внешнего цилиндра, асимптотическое решение получено аналитически.

В работах [38, 39] рассмотрен один класс решений уравнений динамики вязкой жидкости в цилиндрической системе координат для установившегося течения при условии, что радиальная и азимутальная составляющие скорости зависят лишь от радиальной координаты.

К этому же классу относится задача вихревого осесимметричного течения вязкой жидкости в неограниченном пространстве; ее общее решение для радиальной и азимутальной составляющих скорости представлено в работе [40]. Полученное общее решение для азимутальной составляющей скорости содержит две неопределенных константы интегрирования. В [40] приводится частный случай этого общего решения, при этом одна из констант интегрирования априори принимается равной нулю, а вторая константа определяется посредством задаваемой циркуляции потока.

Следует отметить, что общее решение из [40] может быть принято за основу при рассмотрении задачи о плоском течении в цилиндрическом слое при подводе жидкости через внешнюю цилиндрическую поверхность по нормали к ней (радиально) и, соответственно, при вихревом стоке через внутреннюю поверхность. Однако при получении окончательного выражения для распределения азимутальной составляющей скорости здесь возникает необходимость в задании двух граничных условий для определения двух констант интегрирования. В такой постановке задачи, по крайней мере, вид одного из двух необходимых граничных условий для азимутальной составляющей скорости не совсем очевиден.

В данной работе для вихревого осесимметричного течения вязкой жидкости предлагаются варианты записи двух граничных условий для азимутальной составляющей скорости, что позволяет получить точное решение модельной задачи о вихревом стоке, описывающее распределение компонент скорости и давления в цилиндрическом слое при подводе жидкости через внешнюю поверхность по нормали к ней. Проведен также анализ получаемого решения и обсуждаются особенности поля скорости и распределения давления.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модельную задачу о плоском установившемся осесимметричном ламинарном течении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом слое. Предположим, что жидкость поступает в слой по нормали к его внешней поверхности, имеющей радиус R_2 . На ней поддерживается постоянное давление P_2 . При этом сток жидкости происходит через внутреннюю поверхность радиуса R_1 .

Введем цилиндрическую систему координат традиционным образом. Приняв во внимание следующие допущения: $u_z \equiv 0$, $\partial/\partial\varphi \equiv 0$, $\partial/\partial z \equiv 0$, запишем уравнения динамики и условие неразрывности потока в безразмерной форме [41]:

$$u'_r \cdot \frac{\partial u'_r}{\partial r'} - \frac{u'_\varphi{}^2}{r'} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial P'}{\partial r'} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u'_r}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial u'_r}{\partial r'} - \frac{u'_r}{r'^2} \right), \quad (1)$$

$$u'_r \cdot \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} + \frac{u'_r \cdot u'_\varphi}{r'} = \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u'_\varphi}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial u'_\varphi}{\partial r'} - \frac{u'_\varphi}{r'^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{r'} \cdot \frac{\partial (r' \cdot u'_r)}{\partial r'} = 0. \quad (3)$$

Здесь: $r' = \frac{r}{R_1}$, $u'_r(r') = \frac{u_r}{V_1}$, $u'_\varphi(r') = \frac{u_\varphi}{V_1}$, $P' = \frac{2P}{\rho V_1^2}$ — безразмерные величины (далее помечаются верхним штрихом); $\text{Re} = \frac{\rho V_1 R_1}{\mu} = \frac{\rho V_2 R_2}{\mu} = \frac{\rho Q}{2\pi\mu}$ — число Рейнольдса; r — радиальная координата; ρ , μ — плотность и динамическая вязкость жидкости; u_r , u_φ — радиальная и азимутальная составляющие скорости потока; P — давление; V_1 , V_2 — известные значения модуля радиальной составляющей скорости на внутренней и внешней цилиндрических границах слоя; Q — абсолютный объемный расход жидкости в расчете на единицу длины вдоль оси Oz цилиндрической системы координат.

Для решения системы уравнений (1)–(3) необходимо потребовать выполнения четырех граничных условий. Первые два граничных условия для радиальной составляющей скорости и давления имеют вид:

$$r' = R'_2: \quad u'_r = -V'_2, \quad P' = P'_2. \quad (4)$$

Заметим, что (4) представляют собой граничные условия рассматриваемой задачи, но в тривиальном случае чисто радиального течения ($u_\varphi \equiv 0$). Что же касается еще двух граничных условий, необходимых для определения азимутальной составляющей скорости, то они будут предложены ниже.

Характерной особенностью системы (1)–(3) является то, что она допускает определение искомым функций u'_r , u'_φ , P' на основе последовательного решения входящих в нее уравнений в обратном порядке: (3), (2), (1). При этом на первом шаге решение уравнения (3) для радиальной составляющей скорости с учетом граничного условия (4) и очевидного для рассматриваемой задачи соотношения $V_1 \cdot R_1 = V_2 \cdot R_2$ всегда имеет вид [42]:

$$u'_r = -\frac{1}{r'}. \quad (5)$$

На следующем шаге после подстановки (5) в (2) приходим к дифференциальному уравнению относительно азимутальной составляющей скорости, полученному ранее в [40] и записанному в принятых выше безразмерных обозначениях:

$$\frac{d^2 u'_\varphi}{dr'^2} + (\text{Re} + 1) \cdot \frac{1}{r'} \cdot \frac{du'_\varphi}{dr'} + (\text{Re} - 1) \cdot \frac{u'_\varphi}{r'^2} = 0. \quad (6)$$

Общее решение (6) получено в [40], и в безразмерной форме может быть представлено следующим образом:

$$u'_\varphi(r) = \frac{C_1}{r'} + \frac{C_2}{r'^{\text{Re}-1}}, \quad (7)$$

где C_1 , C_2 — неопределенные константы интегрирования.

Отметим, что авторы [40] в рамках общего решения (7) ограничились рассмотрением лишь частного случая, когда считали $C_2 = 0$. При этом первая константа интегрирования C_1 определялась через задаваемую циркуляцию K и, с учетом безразмерной формы записи (7), равнялась $C_1 = K / (2\pi R_1 V_1)$. Характерной особенностью такого частного случая является то, что в области течения азимутальная составляющая скорости не может в точности равняться нулю.

При конечных размерах области течения в цилиндрическом слое $R_1 \leq r \leq R_2$ определение окончательного вида решения рассматриваемой задачи на основе общего решения (7) при $C_2 \neq 0$ предполагает постановку двух граничных условий для азимутальной составляющей скорости. Приняв во внимание радиальный подвод жидкости в цилиндрический слой через его внешнюю поверхность, одно граничное условие можно получить, потребовав отсутствия такой составляющей скорости на внешней цилиндрической поверхности:

$$r' = R'_2: \quad u'_\varphi = 0. \quad (8)$$

Второе граничное условие для азимутальной составляющей скорости на внешней границе цилиндрического слоя является менее очевидным.

Формально определение азимутальной составляющей скорости из дифференциального уравнения второго порядка (6) в рамках постановки задачи Коши требует удовлетворения еще одному граничному условию для первой производной du'_φ/dr' . Заметим, что первая производная от азимутальной скорости по радиальной координате непосредственно связана со вторым инвариантом I_2 тензора скоростей деформаций. Тогда на модельном уровне отмеченный выше формализм можно реализовать, задав на внешней границе значение I_{2b} модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций:

$$r' = R'_2: \quad |I'_2| = I'_{2b}. \quad (9)$$

При этом $I'_2 = \frac{I_2}{I_{2rad}}$, $I'_{2b} = \frac{I_{2b}}{I_{2rad}}$, $I_{2rad} = \left(\frac{V_2}{R_2}\right)^2$, $I_2(r) = \varepsilon_{rr} \cdot \varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{r\varphi}^2$, $\varepsilon_{rr} = \frac{du_r(r)}{dr}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r(r)}{r}$, $\varepsilon_{r\varphi} = \frac{r}{2} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\varphi(r)}{r} \right)$, где I_{2b} — значение модуля второго инварианта тензора скоростей деформаций на внешней границе цилиндрического слоя, определяемое с учетом (5) для случая чисто радиального течения ($u_\varphi \equiv 0$), ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, $\varepsilon_{r\varphi}$ — компоненты тензора скоростей деформаций.

Принимая во внимание (5) и (8), граничное условие (9) — второе для азимутальной составляющей скорости условие, после некоторых преобразований может быть представлено следующим образом:

$$r' = R'_2: \quad \frac{du'_\varphi}{dr'} = \pm \frac{2}{R_2^2} \cdot \sqrt{I'_{2b} - 1}. \quad (10)$$

Варианты выбора знака, заложенные в (10), указывают на возможность реализации двух эквивалентных и противоположных направлений «подкрутки» потока в рамках решения одной и той же исходной системы уравнений. Конкретизация направления течения в ходе его реализации, по-видимому, может определяться особенностями начальной стадии его «запуска» или дополнительными факторами.

Важно, что граничное условие (10) имеет смысл лишь для значений $I'_{2b} \geq 1$. Физическая интерпретация постановки граничного условия для азимутальной составляющей скорости в подобном виде в смысле его связи с более традиционными механическими характеристиками будет приведена ниже.

Таким образом, решение рассматриваемой задачи о плоском течении несжимаемой жидкости (о вихревом стоке) при подводе жидкости в цилиндрический слой по нормали к его внешней поверхности должно удовлетворять граничным условиям (4), (8) и (10).

3. Распределения составляющих скорости и давления

Решение задачи для радиальной составляющей скорости имеет хорошо известный, приведенный выше вид (5). Теперь, приняв во внимание граничные условия (8), (10), найдем константы интегрирования в (7) и после соответствующих преобразований получим выражение для определения азимутальной составляющей скорости:

$$u'_\varphi(r') = \pm \frac{2\sqrt{I'_{2b} - 1}}{\text{Re} - 2} \cdot \frac{1}{r'} \cdot \left[1 - \left(\frac{R'_2}{r'} \right)^{\text{Re} - 2} \right]. \quad (11)$$

Заметим, что случай, когда второй инвариант тензора скоростей деформаций на внешней границе цилиндрического слоя принимает значение, отвечающее чисто радиальному течению ($I'_{2b} = 1$), из (11) сразу же приводит к ожидаемому результату: $u'_\varphi(r') \equiv 0$.

Теперь, подставив (5) и (11) в уравнение (1), после интегрирования с учетом граничного условия (4) найдем выражение для распределения давления:

$$P'(r') = P'_2 - f_1(r') + \frac{4(I'_{2b} - 1)}{(\text{Re} - 2)^2} \cdot \left\{ -f_1(r') + \frac{4R_2^{\text{Re} - 2}}{\text{Re}} \cdot f_2(r') - \frac{R_2^{2\text{Re} - 4}}{(\text{Re} - 1)} \cdot f_3(r') \right\}. \quad (12)$$

Здесь для краткости записи приняты обозначения:

$$f_1(r') = \left(\frac{1}{r'^2} - \frac{1}{R_2'^2} \right), \quad f_2(r') = \left(\frac{1}{r'^{\text{Re}}} - \frac{1}{R_2'^{\text{Re}}} \right), \quad f_3(r') = \left(\frac{1}{r'^{2\text{Re}-2}} - \frac{1}{R_2'^{2\text{Re}-2}} \right).$$

При допущении чисто радиального ($u_\phi = 0$) установившегося течения в цилиндрическом слое $R_1 \leq r \leq R_2$, когда $I'_{2b} = 1$, из (12) для распределения давления вытекает следующий результат:

$$P'_{rad}(r') = P'_2 - f_1(r'). \quad (13)$$

При конкретных значениях числа Рейнольдса Re , представляющего собой параметр дифференциального уравнения (6), вид общего решения (7) изменяется. При этом другими становятся и выражения (11) и (12) для распределений азимутальной составляющей скорости и давления. Проведем анализ решения задачи о вихревом стоке для частных значений Re .

Пусть $\text{Re} = 1$. В такой ситуации уравнение (6) упрощается, и его общее решение принимает вид:

$$u_\phi^{(1)}(r) = \frac{C_1^{(1)}}{r'} + C_2^{(1)}.$$

Найдя константы интегрирования $C_1^{(1)}$, $C_2^{(1)}$ с учетом граничных условий (8), (10), приходим к следующему выражению для азимутальной составляющей скорости:

$$u_\phi^{(1)}(r') = \mp \frac{2\sqrt{I'_{2b}-1}}{r'} \cdot \left[1 - \left(\frac{r'}{R_2'} \right) \right]. \quad (14)$$

Этот же результат может быть получен при прямой подстановке $\text{Re} = 1$ в решение (11).

Что же касается распределения давления, то для такого частного значения числа Re оно после подстановки (5), (14) в (1) и решения последнего с учетом граничного условия (4) определяется следующим образом:

$$P'^{(1)}(r') = P'_2 - f_1(r') + 4(I'_{2b} - 1) \cdot \left\{ -f_1(r') + \frac{4}{R_2'} \cdot \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R_2'} \right) + \frac{2}{R_2'^2} \cdot \ln \left(\frac{r'}{R_2'} \right) \right\}. \quad (15)$$

Если в (12) выполнить предельный переход при $\text{Re} \rightarrow 1$ и раскрыть возникшую при этом неопределенность по правилу Лопитала, то приходим в точности к выражению (15):

$$\lim_{\text{Re} \rightarrow 1} \{P'(r')\} = P'^{(1)}(r').$$

По аналогии рассмотрим другой частный случай, когда $\text{Re} = 2$. Подставив это значение в (6), получим несколько иной вид дифференциального уравнения, общее решение которого для азимутальной составляющей скорости тоже выглядит по-другому:

$$u_\phi^{(2)} = \frac{C_1^{(2)}}{r'} + \frac{C_2^{(2)} \cdot \ln(r')}{r'},$$

где $C_1^{(2)}$, $C_2^{(2)}$ — константы интегрирования, соответствующие значению $\text{Re} = 2$.

Удовлетворив граничные условия (8), (10), получим следующее выражение для распределения азимутальной составляющей скорости:

$$u_\phi^{(2)} = \pm \frac{2\sqrt{I'_{2b}-1}}{r'} \cdot \ln \left(\frac{r'}{R_2'} \right). \quad (16)$$

Подстановка (5) и (16) в (1) и учет граничного условия (4) дают распределение давления для рассматриваемого числа Re :

$$P'^{(2)}(r') = P'_2 - (1 + 2(I'_{2b} - 1)) \cdot f_1(r') - \frac{4(I'_{2b} - 1)}{r'^2} \cdot \left[1 + \ln\left(\frac{r'}{R'_2}\right) \right] \cdot \ln\left(\frac{r'}{R'_2}\right). \quad (17)$$

Переход в (11) и (12) к пределу при $Re \rightarrow 2$ и раскрытие возникших при этом неопределенностей в точности приводят к только что найденным выражениям (16) и (17):

$$\lim_{Re \rightarrow 2} \{u'_\varphi(r')\} = u'_\varphi^{(2)}(r'), \quad \lim_{Re \rightarrow 2} \{P'(r')\} = P'^{(2)}(r').$$

Иначе говоря, решения, отвечающие значениям $Re = 1$ и $Re = 2$ содержатся в решениях (11) и (12). Это обусловлено тем, что вид (6) для задачи о вихревом стоке удовлетворяет теореме о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра; здесь его роль играет число Рейнольдса.

4. Анализ и некоторые особенности установившегося плоского спирального течения

Прежде всего, отметим следующее: проанализировав соотношения (5) и (11), можно увидеть, что по мере приближения рассматриваемой в области течения точки к внутренней границе цилиндрического слоя азимутальная составляющая скорости существенно растет. В качестве примера на рисунке 1 показан характер изменения модуля отношения азимутальной и радиальной составляющих скорости в зависимости от радиальной координаты при различных значениях числа Рейнольдса:

$$\gamma'_u(r') = \frac{|u'_\varphi(r')|}{|u'_r(r')|} = \frac{2\sqrt{I'_{2b}-1}}{Re-2} \cdot \left[\left(\frac{R'_2}{r'}\right)^{Re-2} - 1 \right]. \quad (18)$$

Влияние параметра R'_2 на величину соотношения (18) в зависимости от числа Рейнольдса на выходе из цилиндрического слоя при $r' = 1$ демонстрируют графики, изображенные на рисунке 2.

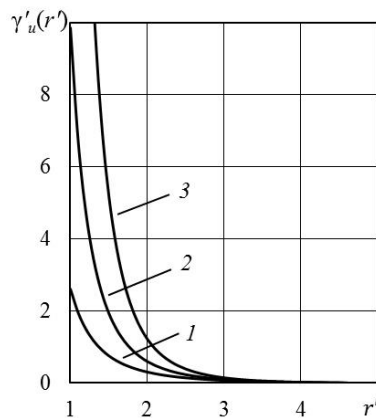


Рис. 1. Изменение соотношения между азимутальной и радиальной составляющими скорости в зависимости от радиальной координаты при $I'_{2b} = 1,001$; $R'_2 = 5$ и различных значениях Re : 5 (кривая 1); 6 (2); 7 (3)

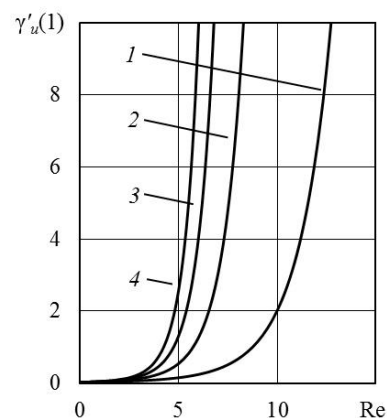


Рис. 2. Изменение соотношения между азимутальной и радиальной составляющими скорости на выходе из цилиндрического слоя в зависимости от Re при $I'_{2b} = 1,001$ и различных значениях R'_2 : 2 (кривая 1); 3 (2); 4 (3); 5 (4)

По представленным на рисунках 1 и 2 кривым видно, что азимутальная составляющая скорости в непосредственной окрестности выхода из цилиндрического слоя начинает доминировать над радиальной составляющей. При этом для исследованных наборов числовых значений исходных параметров азимутальная составляющая скорости на выходе из цилиндрического слоя может превышать радиальную составляющую на порядок и более.

Заметим, что именно такой характер соответствия между составляющими скорости, по крайней мере, на качественном уровне, имеет место для реальных природных вихревых течений в атмосфере типа смерчей и торнадо. Для сравнения скажем, что известное из [40] решение вида (7) при $C_2 = 0$ предсказывает всюду в области течения одну и ту же величину соотношения азимутальной и радиальной составляющих скорости, а именно:

$$\gamma'_u(r') = \frac{u'_\varphi(r')}{u'_r(r')} = \frac{K}{Q} \equiv \text{const}.$$

Рассмотрим некоторые особенности семейства линий тока для полученного распределения компонент вектора скорости (5), (11) в задаче о вихревом стоке в случае установившегося плоского спирального течения. В полярной системе координат уравнение для определения линий тока записывается следующим образом:

$$\frac{d\varphi}{dr'} = \frac{1}{r'} \cdot \frac{u'_\varphi(r')}{u'_r(r')}. \quad (19)$$

Граничное условие для этого уравнения может быть задано как

$$r' = R'_2: \quad \varphi = \varphi_0, \quad (20)$$

где φ_0 — угол, определяющий положение начальной точки на внешней границе цилиндрического слоя для построения линии тока, проходящей через эту точку.

Приняв во внимание (5) и (11), с учетом граничного условия (20) приходим к решению уравнения (19) вида:

$$\varphi(r') = \varphi_0 \pm \frac{2\sqrt{I'_{2b}-1}}{(Re-2)^2} \cdot \left\{ \left[\left(\frac{R'_2}{r'} \right)^{Re-2} - 1 \right] - \ln \left(\frac{R'_2}{r'} \right)^{Re-2} \right\}. \quad (21)$$

Отличительной особенностью поля скоростей рассматриваемого установившегося течения является то, что линии тока, удовлетворяющие решению (21), имеют форму спиралей, которые допускают наличие точки перегиба. Попутно отметим, что большинство известных плоских спиральных кривых (спирали Архимеда, Фибоначчи, логарифмическая, гиперболическая и другие) не имеют точки перегиба. В ряду немногих аналогов можно выделить, пожалуй, лишь так называемую спираль Римского жезла (спираль Lituus), каждая из двух ветвей которой также имеет точку перегиба.

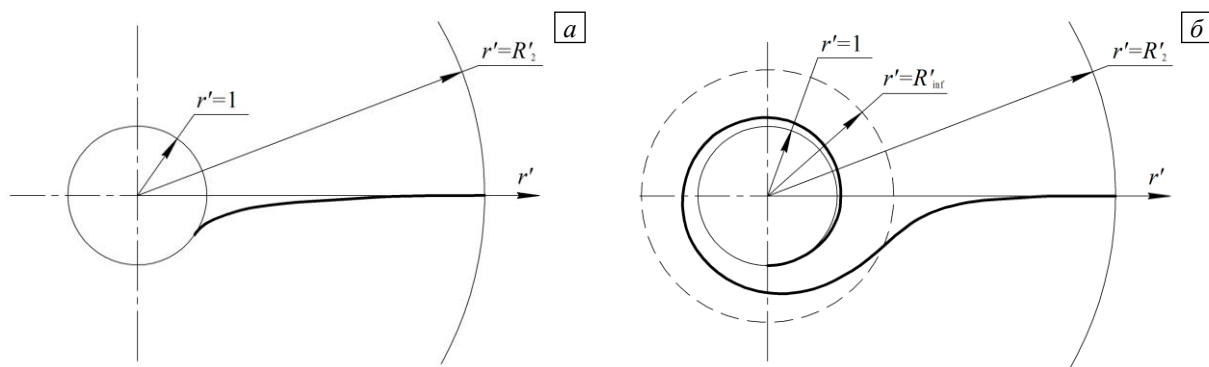


Рис. 3. Линия тока для установившегося течения в цилиндрическом слое при $I'_{2b} = 1,001$, $R'_2 = 5$, $\varphi_0 = 0$ для $Re = 4,25$, $R'_{inf} < 1$ (a) и для $Re = 7$, $R'_{inf} = 1,813$ (б)

Типичные примеры двух различных вариантов линий тока, построенных в соответствии с (21) для сравнительно малого и достаточно большого значений числа Рейнольдса, изображены на рисунке 3. Основное отличие представленных здесь двух видов линий тока заключается в следующем. При сравнительно небольших значениях числа Рейнольдса линия тока не имеет точки перегиба в диапазоне изменения радиальной координаты $1 \leq r' \leq R'_2$ (Рис. 3a). В случае же достаточно больших значений числа Рейнольдса линия тока принимает такую форму, у которой появляется точка перегиба при некотором значении радиальной координаты $r' = R'_{inf} \in [1; R'_2]$ (Рис. 3б).

Условие существования точки перегиба на произвольной линии в полярной системе координат задается следующим дифференциальным соотношением:

$$r' \cdot \frac{d^2 \varphi}{dr'^2} + \left[2 + \left(r' \cdot \frac{d\varphi}{dr'} \right)^2 \right] \cdot \frac{d\varphi}{dr'} = 0. \quad (22)$$

После подстановки (21) в (22) приходим к уравнению для определения радиуса $r' = R'_{inf}$ окружности, на которой в рассматриваемом спиральном течении располагаются точки перегиба семейства линий тока. Уравнение решалось численно, методом секущих. Представление о характере зависимости от числа Рейнольдса корня этого уравнения, определяющего, с учетом (21), положение точки перегиба на линии тока, дают графики, изображенные на рисунке 4.

В диапазоне значений радиальной координаты $R'_{inf} < r' < R'_2$ линия тока монотонно удаляется от радиальной оси. После же прохождения точки перегиба в диапазоне $1 < r' < R'_{inf}$ линия тока отклоняется в другую сторону и начинает закручиваться вокруг оси симметрии вплоть до выхода через внутреннюю границу цилиндрического слоя.

На рисунке 5 приведены распределения давления в малой окрестности выхода из цилиндрического слоя при $I'_{2b} = 1,01$ и $P'_2 = 50$, вычисленные по формуле (12) и отнесенные к соответствующим распределениям давления (13) в случае чисто радиального течения ($I'_{2b} = 1$):

$$\gamma'_p(r') = P'(r') / P'_{rad}(r'). \quad (23)$$

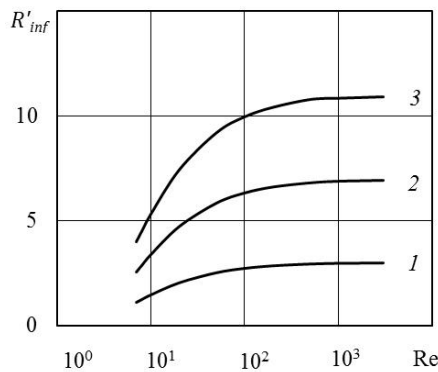


Рис. 4. Влияние величины числа Рейнольдса на положение точки перегиба линии тока при $I'_{2b} = 1,001$ и различных значениях R'_2 : 3 (кривая 1); 7 (2); 11 (3)

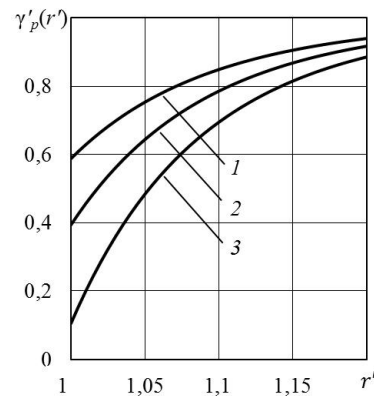


Рис. 5. Зависимость соотношения (23) от радиальной координаты при $R'_2 = 3,6$ и различных значениях числа Рейнольдса Re : 6,2 (кривая 1); 6,4 (2); 6,6 (3)

Из анализа зависимостей, изображенных на рисунке 5, следует, что в плоском спиральном течении давление в достаточно малой окрестности выхода из цилиндрического слоя принимает более низкие значения по сравнению с аналогичным давлением в чисто радиальном течении.

Приняв во внимание отмеченную выше особенность распределения давления в плоском спиральном течении в окрестности выхода из цилиндрического слоя и выполнение условия $P'(1) < P'_{rad}(1)$, сделаем следующее предположение: возможно, возникновение природного эффекта торнадо есть следствие снижения (его причины здесь не обсуждаются) давления на границе «стока» (на условных границах центрального «ствола» торнадо) ниже уровня, соответствующего давлению при чисто радиальной схеме течения.

5. Альтернативный вариант записи второго граничного условия для азимутальной составляющей скорости

Следует отметить, что постановка граничного условия в форме (9) для второго инварианта тензора скоростей деформаций не является традиционной. Это обусловлено тем, что характеристика I_{2b} , вообще говоря, не совсем удобна с точки зрения ее непосредственного экспериментального определения и последующего использования. В этой связи рассмотрим другой по форме, но эквивалентный по своей сути вариант записи второго граничного условия, которое по совокупности с граничным условием (8) позволило бы полностью определить константы интегрирования C_1, C_2 в (7).

Как следует из поведения функции (23), отличительная черта плоского спирального течения заключается в том, что давление $P'(1) = P'_1$ на выходе из цилиндрического слоя принимает значения

меньшие, нежели значения, получаемые при прочих равных параметрах в задаче чисто радиального течения. При этом давление P'_1 , определяемое из (12) на выходе из цилиндрического слоя, по существу, определяется посредством задания на входе в слой значения I'_{2b} . Иначе говоря, между этими величинами имеет место взаимно однозначное соответствие. В этой связи вместо граничного условия (10) для производной функции u'_ϕ по радиальной координате на входе в цилиндрический слой предлагается принять для давления, но на выходе из цилиндрического слоя, следующее условие:

$$r'=1: \quad P' = P'_1. \quad (24)$$

Здесь, естественно, предполагается, что P'_1 является заданной величиной, которая удовлетворяет условию $P'_1 < P'_{rad}(1)$. Отметим также, что (24) в данном случае представляет уже, наряду с (4), второе граничное условие для давления, несмотря на то, что дифференциальное уравнение (1) относительно функции $P(r)$ имеет только первый порядок.

Тогда, с учетом нового граничного условия (24), решение задачи об установившемся плоском спиральном течении в цилиндрическом слое должно проводиться в следующей последовательности:

- выражение для радиальной составляющей скорости по-прежнему определяется соотношением (5), поскольку вытекает из условия неразрывности;
- с учетом граничного условия (8) выражение (7) для азимутальной составляющей скорости потока может быть преобразовано к виду:

$$u'_\phi(r') = \frac{C_1}{r'} \cdot \left[1 - \left(\frac{R'_2}{r'} \right)^{\text{Re}-2} \right]; \quad (25)$$

– подстановка (5) и (25) в (1) и последующее интегрирование с учетом граничного условия (4) приводит к следующему выражению для распределения давления:

$$P'(r') = P'_2 - f_1(r') + C_1^2 \cdot \left\{ -f_1(r') + \frac{4 \cdot R_2'^{\text{Re}-2}}{\text{Re}} \cdot f_2(r') - \frac{R_2'^{2\text{Re}-4}}{(\text{Re}-1)} \cdot f_3(r') \right\}, \quad (26)$$

которое структурно, как и следовало ожидать, совпадает с (12);

– в соответствии с граничным условием (24) из (26) следует формула для определения последней неизвестной константы:

$$C_1 = \pm \sqrt{\frac{(P'_2 - P'_1 - f_1(1)) \cdot \text{Re} \cdot (\text{Re}-1)}{\text{Re} \cdot (\text{Re}-1) \cdot f_1(1) - 4(\text{Re}-1) \cdot R_2'^{\text{Re}-2} \cdot f_2(1) + \text{Re} \cdot R_2'^{2\text{Re}-4} \cdot f_3(1)}}}.$$

Таким образом, несмотря на альтернативный вариант второго граничного условия в виде (24), для определения азимутальной составляющей скорости он оказывается эквивалентным граничному условию вида (9). Это обусловлено, как уже отмечалось выше, тем, что между значениями I'_{2b} и P'_1 имеет место взаимно однозначное соответствие.

В силу последнего утверждения из условия $P'_1 \leq P'_{rad}(1)$ непосредственно вытекает результат: $I'_{2b} \geq 1$, при котором имеет смысл граничное условие (10). Действительно, приняв во внимание (5), (25) с учетом граничного условия (8) сразу же получим:

$$|I'_2(R'_2)| = I'_{2b} = 1 + \frac{C_1^2 (\text{Re}-2)^2}{4} \geq 1.$$

Принятое в задаче условие $P'(1) = P'_1 < P'_{rad}(1)$ ставит ограничение на реализацию вихревого течения в цилиндрическом слое при радиальном подводе жидкости через внешнюю поверхность: чтобы оно стало возможным, необходимо обеспечить давление на выходе из слоя ниже уровня, который имел бы здесь место для чисто радиального течения при том же значении давления на входе в слой. В свою очередь, для определения значения P'_1 (уже за рамками приведенной модельной задачи), по-видимому, было бы необходимо решать задачу о вихревом стоке в сопряженной постановке и с учетом трехмерного характера течения жидкости, в том числе и во внутренней области, где $r' < 1$.

6. Заключение

Рассмотрена задача о плоском течении типа вихревого стока в цилиндрическом слое. Предполагается, что подвод жидкости в слой осуществляется через его внешнюю поверхность по нормали к ней (радиально). За основу принято общее решение для азимутальной составляющей скорости течения в неограниченном пространстве, полученное ранее в работе [40]. Окончательное определение констант интегрирования известного общего решения применительно к обсуждаемой задаче требует постановки двух граничных условий для азимутальной составляющей скорости. При этом вид, по крайней мере, одного из них не является очевидным. Такое граничное условие предложено представлять в форме требования обеспечить заданную величину второго инварианта тензора скоростей деформаций на входе в цилиндрический слой. В итоге это позволило записать точное решение рассматриваемой задачи, из которого вытекает, что даже при весьма малых превышениях безразмерным параметром I'_{2b} , характеризующим значение второго инварианта тензора скоростей деформаций на входе в область течения, порогового уровня $I'_{2b} = 1$, может реализоваться установившееся течение с линиями тока типа плоских спиралей. При этом показано, что линии тока могут иметь точку перегиба.

На основе полученного выражения для распределения давления показано, что в окрестности выхода из цилиндрического слоя давление в жидкости принимает значения ниже, чем в чисто радиальном течении. Исходя из этого результата, предложен альтернативный вариант записи второго граничного условия для определения азимутальной составляющей скорости, которое должно быть поставлено для значения давления на выходе из цилиндрического слоя.

Некоторые следствия, вытекающие из анализа рассмотренной схемы вихревого течения, в первом приближении могут представить интерес при моделировании соответствующих гидродинамических эффектов типа торнадо или закручивания потока в окрестности сливного отверстия. При этом результаты решенной в данной работе двумерной модельной задачи следует интерпретировать как первое приближение к описанию более сложного трехмерного течения. В данном случае речь идет о течении в поперечном (по отношению к оси симметрии Oz цилиндрической системы координат) сечении при условии, что в окрестности этого сечения компоненты скорости и давление слабо зависят от координаты z .

Литература

1. Поликовский В.И., Перельман Р.Г. Воронкообразование в жидкости с открытой поверхностью. М.: Госэнергоиздат, 1959. 190 с.
2. Павельев А.А., Штарев А.А. Эксперимент по формированию вихря при вытекании жидкости из бака // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 203-207. (English version <https://doi.org/10.1023/A:1013093406981>)
3. Штарев А.А. Экспериментальное исследование расхода при нестационарном истечении жидкости из заполненной емкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 2. С. 114-122. (English version <https://doi.org/10.1007/s10697-005-0066-8>)
4. Карликов В.П., Розин А.В., Толоконников С.Л. Численный анализ процесса воронкообразования при нестационарном истечении жидкости из вращающегося цилиндрического сосуда // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 5. С. 88-95. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462807050092>)
5. Карликов В.П., Розин А.В., Толоконников С.Л. К проблеме воронкообразования при истечении жидкостей из сосудов // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 3. С. 140-151. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462808030137>)
6. Орлов В.В., Темнов А.Н., Товарных Г.Н. Экспериментальное исследование истечения вращающейся жидкости // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2011. № 2. С. 23-34.
7. Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. 487 с.
8. Yih C.-S. Tornado-like flows // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19. 076601. <https://doi.org/10.1063/1.2742728>
9. Вараксин А.Ю., Ромаиш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 344 с.
10. Курганский М.В. Простая гидродинамическая модель смерчеобразных вихрей // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51, № 3. С. 338-345. <https://doi.org/10.7868/S0002351515030074>
11. Вараксин А.Ю. Воздушные торнадоподобные вихри: математическое моделирование // ТВТ. 2017. Т. 55, № 2. С. 291-316. <https://doi.org/10.7868/S004036441702020X>
12. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеиздат, 1975. 304 с.
13. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
14. Lugt H.J. Vortex flows in nature and technology. Jons Wiley & Sons, 1983. 297 p.
15. Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.
16. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
17. Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободной границей // ДАН СССР. 1972. Т. 202, № 2. С. 302-305.
18. Гольдштик М.А., Яворский Н.И. Вращающийся диск на воздушной подушке // ДАН СССР. 1989. Т. 308, № 4. С. 816-820.
19. Borissov A., Shtern V., Hussain F. Modeling flow and heat transfer in vortex burners // AIAAJ. 1998. Vol. 36. P. 1665-1670. <https://doi.org/10.2514/2.569>

20. Аристов С.Н., Пухначев В.В. Об уравнениях вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // ДАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 611-614. (English version <https://doi.org/10.1134/1.1686882>)
21. Гайфуллин А.М., Зубцов А.В. Диффузия двух вихрей // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 126-142. (English version <https://doi.org/10.1023/B:FLUI.0000024817.33826.8d>)
22. Гайфуллин А.М. Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 29-35. (English version <https://doi.org/10.1007/s10697-005-0091-7>)
23. Shtern V.N., Borissov A.A. Nature of counterflow and circulation in vortex separators // Phys. Fluids. 2010. Vol. 22. 083601. <https://doi.org/10.1063/1.3475818>
24. Журавлева Е.Н., Пухначев В.В. Численное исследование бифуркаций при спиральном течении жидкости со свободными границами // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 1. С. 82-90. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.1.9>
25. Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Изв. вузов. Авиационная техника. 2015. № 4. С. 50-54. (English version <https://doi.org/10.3103/S1068799815040091>)
26. Просвирыков Е.Ю. Точные решения трехмерных потенциальных и завихренных течений Куэтта вязкой несжимаемой жидкости // Вестник НИЯУ МИФИ. 2015. Т. 4, № 6. С. 501-506. <https://doi.org/10.1134/S2304487X15060127>
27. Марков В.В., Сизых Г.Б. Эволюция завихренности в жидкости и газе // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 2. С. 8-15. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462815020027>)
28. Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 25-31. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462816020034>)
29. Yavorsky N.I., Meledin V.G., Kabardin I.K., Gordienko M.R., Pravdina M.K., Kulikov D.V., Polyakova V.I., Pavlov V.A. Velocity field diagnostics inside the Ranque-Hilsh vortex tube with square cross-section // AIP Conf. Proc. 2018. Vol. 2027. 030122. <https://doi.org/10.1063/1.5065216>
30. Сизых Г.Б. Осесимметричные винтовые течения вязкой жидкости // Изв. вузов. Математика. 2019. № 2. С. 49-56. (English version <https://doi.org/10.3103/S1066369X19020063>)
31. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса // ТВТ. 2012. Т. 50, № 3. С. 473-475. (English version <https://doi.org/10.1134/S0018151X12030042>)
32. Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders // Phil. Trans. Roy. Soc Lond. A. 1923. Vol. 223. P. 289-343. <https://doi.org/10.1098/rsta.1923.0008>
33. Cole J.A. Taylor-vortex instability and annulus-length effects // J. Fluid Mech. 1976. Vol. 75. P. 1-15. <https://doi.org/10.1017/S0022112076000098>
34. Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L. Flow regimes in circular Couette system with independently rotating cylinders // J. Fluid Mech. 1986. Vol. 164. P. 155-183. <https://doi.org/10.1017/S0022112086002513>
35. Mesequer A., Marques F. On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Couette flow // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 402. P. 33-56. <https://doi.org/10.1017/S0022112099006679>
36. Reinke P., Schmidt M., Beckmann T. The cavitating Taylor-Couette flow // Phys. Fluids. 2018. Vol. 30. 104101. <https://doi.org/10.1063/1.5049743>
37. Shtern V. A flow in the depth of infinite annular cylindrical cavity // J. Fluid Mech. 2012. Vol. 711. P. 667-680. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.429>
38. Sullivan R.D. A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations // JAS. 1959. Vol. 26. P. 767-768. <https://doi.org/10.2514/8.8303>
39. Гольдштик М.А. Один класс точных решений уравнений Навье-Стокса // ПМТФ. 1966. Т. 7, № 2. С. 106-109. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00916981>)
40. Shtern V., Borissov A., Hussain F. Vortex-sinks with axial flows: Solution and applications // Phys. Fluids. 1997. Vol. 9. P. 2941-2959. <https://doi.org/10.1063/1.869406>
41. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
42. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 520 с.

References

1. Polikovskiy V.I., Perel'man R.G. *Voronkoobrazovaniye v zhidkosti s otkrytoy poverkhnost'yu* [Funnel formation in open surface fluids]. Moscow, Gosenergoizdat, 1959. 190 p.
2. Pavel'ev A.A., Shtarev A.A. Experiment on vortex formation in a fluid flowing out of a reservoir. *Fluid Dyn.*, 2001, vol. 36, pp. 851-854. <https://doi.org/10.1023/A:1013093406981>
3. Shtarev A.A. Experimental study of the rate of unsteady fluid flow from a prefilled vessel. *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40, pp. 266-272. <https://doi.org/10.1007/s10697-005-0066-8>
4. Karlikov V.P., Rozin A.V., Tolokonnikov S.L. Numerical analysis of funnel formation during unsteady fluid outflow from a rotating cylindrical vessel. *Fluid Dyn.*, 2007, vol. 42, pp. 766-772. <https://doi.org/10.1134/S0015462807050092>
5. Karlikov V.P., Rozin A.V., Tolokonnikov S.L. On the problem of funnel formation during liquid outflow from vessels. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, pp. 461-470. <https://doi.org/10.1134/S0015462808030137>
6. Orlov V.V., Temnov A.N., Tovarnykh G.N. Eksperimental'noye issledovaniye istecheniya vrashchayushcheysya zhidkosti [Experimental study of the outflow of a rotating fluid]. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroyeniye – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*, 2011, no. 2, pp. 23-34.
7. Nalivkin D.B. *Uragany, buri i smerchi. Geograficheskiye osobennosti i geologicheskaya deyatel'nost'* [Hurricanes, storms and tornadoes. Geographical features and geological activities]. Leningrad, Nauka, 1969. 487 p.
8. Yih C.-S. Tornado-like flows. *Phys. Fluids*, 2007, vol. 19, 076601. <https://doi.org/10.1063/1.2742728>
9. Varaksin A.Yu., Romash M.E., Kopeytsev V.N. *Tornado*. Begell House, 2015. 394 p.

10. Kurgansky M.V. A simple hydrodynamic model of tornado-like vortices. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2015, vol. 51, pp. 292-298. <https://doi.org/10.1134/S000143381503007X>
11. Varaksin A.Yu. Air tornado-like vortices: Mathematical modeling (a Review). *High Temp.*, 2017, vol. 55, pp. 286-309. <https://doi.org/10.1134/S0018151X17020201>
12. Greenspan H.P. *The theory of rotating fluids*. Cambridge University Press, 1968. 327 p.
13. Gol'dshtik M.A. *Vikhrevyye potoki* [Vortex flows]. Novosibirsk, Nauka, 1981. 366 p.
14. Lugt H.J. *Vortex flows in nature and technology*. Jons Wiley & Sons, 1983. 297 p.
15. Alekseyenko S.V., Kuybin P.A., Okulov V.L. Vvedeniye v teoriyu kontsentrirrovannykh vikhrey [Introduction to the theory of concentrated vortices]. Novosibirsk, In-t teplofiziki SO RAN, 2003. 504 p.
16. Andreyev V.K., Gaponenko Yu.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Sovremennyye matematicheskiye modeli konveksii* [Modern mathematical models of convection]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 368 p.
17. Pukhnachev V.V. Invariant solutions of Navier-Stokes equations describing motions with free boundary. *DAN SSSR – Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1972, vol. 202, no. 2, pp. 302-305.
18. Goldshtik M.A., Yavorskii N.I. A rotating disk on an air cushion. *Dokl. Math.*, 1989, vol. 34, pp. 873-875.
19. Borissov A., Shtern V., Hussain F. Modeling flow and heat transfer in vortex burners. *AIAAJ*, 1998, vol. 36, pp. 1665-1670. <https://doi.org/10.2514/2.569>
20. Aristov S.N., Pukhnachev V.V. On the equations of axisymmetric motion of a viscous incompressible fluid. *Dokl. Phys.*, 2004, vol. 49, pp. 112-115. <https://doi.org/10.1134/1.1686882>
21. Gaifullin A.M., Zubtsov A.V. Diffusion of two vortices. *Fluid Dyn.*, 2004, vol. 39, pp. 112-127. <https://doi.org/10.1023/B:FLUI.0000024817.33826.8d>
22. Gaifullin A.M. Self-similar unsteady viscous flow. *Fluid Dyn.*, 2005, vol. 40, pp. 526-531. <https://doi.org/10.1007/s10697-005-0091-7>
23. Shtern V.N., Borissov A.A. Nature of counterflow and circulation in vortex separators. *Phys. Fluids.*, 2010, vol. 22, 083601. <https://doi.org/10.1063/1.3475818>
24. Zhuravleva E.N., Pukhnachev V.V. Numerical study of bifurcations in spiral fluid flow with free boundary. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational continuum mechanics*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 82-90. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.1.9>
25. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russ. Aeronaut.*, 2015, vol. 58, pp. 413-418. <https://doi.org/10.3103/S1068799815040091>
26. Prosviryakov E.Yu. Tochnye resheniya trekhmernykh potentsial'nykh i zavikhrennykh techeniy Kuetta vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti [Exact solutions of three-dimensional potential and vertical Couette flows of a viscous incompressible liquid]. *Vestnik NIYaU MIFI*, 2015, vol. 4, no. 6, pp. 501-506.
27. Markov V.V., Sizykh G.B. Vorticity evolution in liquids and gases. *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, pp. 186-192. <https://doi.org/10.1134/S0015462815020027>
28. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, pp. 148-154. <https://doi.org/10.1134/S0015462816020034>
29. Yavorsky N.I., Meledin V.G., Kabardin I.K., Gordienko M.R., Pravdina M.K., Kulikov D.V., Polyakova V.I., Pavlov V.A. Velocity field diagnostics inside the Ranque-Hilsh vortex tube with square cross-section. *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 2027, 030122. <https://doi.org/10.1063/1.5065216>
30. Sizykh G.B. Axisymmetric helical flows of viscous fluid. *Russ. Math.*, 2019, vol. 63, pp. 44-50. <https://doi.org/10.3103/S1066369X19020063>
31. Bautin S.P., Krutova I.Yu. Twisting of smooth gas flow under the action of gravity and coriolis forces. *High Temp.*, 2012, vol. 50, pp. 444-446. <https://doi.org/10.1134/S0018151X12030042>
32. Taylor G.I. Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc Lond. A*, 1923, vol. 223, pp. 289-343. <https://doi.org/10.1098/rsta.1923.0008>
33. Cole J.A. Taylor-vortex instability and annulus-length effects. *J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 75, pp. 1-15. <https://doi.org/10.1017/S0022112076000098>
34. Andereck C.D., Liu S.S., Swinney H.L. Flow regimes in circular Couette system with independently rotating cylinders. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 164, pp. 155-183. <https://doi.org/10.1017/S0022112086002513>
35. Meseguer A., Marques F. On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Couette flow. *J. Fluid Mech.*, 2000, vol. 402, pp. 33-56. <https://doi.org/10.1017/S0022112099006679>
36. Reinke P., Schmidt M., Beckmann T. The cavitating Taylor-Couette flow. *Phys. Fluids.*, 2018, vol. 30, 104101. <https://doi.org/10.1063/1.5049743>
37. Shtern V. A flow in the depth of infinite annular cylindrical cavity. *J. Fluid Mech.*, 2012, vol. 711, pp. 667-680. <https://doi.org/10.1017/jfm.2012.429>
38. Sullivan R.D. A two-cell vortex solution of the Navier-Stokes equations. *JAS*, 1959, vol. 26, pp. 767-768. <https://doi.org/10.2514/8.8303>
39. Gol'dshtik M.A. A class of exact solutions of the Navier-Stokes equations. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, pp. 70-72. <https://doi.org/10.1007/BF0091698>
40. Shtern V., Borisov A., Hussain F. Vortex-sinks with axial flows: Solution and applications. *Phys. Fluids.*, 1997, vol. 9, pp. 2941-2959. <https://doi.org/10.1063/1.869406>
41. Loitsyanskiy L.G. *Mechanics of liquids and gases*. Pergamon Press, 1966. 804 p.
42. Slezkin N.A. *Dinamika vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti* [Dynamics of a viscous incompressible fluid]. Moscow, Gosudarstvennoye izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1955. 520 p.

Поступила в редакцию 02.02.2021; после доработки 23.04.2021; принята к опубликованию 28.04.2021

Сведения об авторе

Колодежнов Владимир Николаевич, д-р, проф., Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина (ВУНЦ ВВС ВВА), 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, д. 54а; e-mail: kvn117@mail.ru