

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.2.11](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.2.11)

УДК 539.52

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХУРОВНЕВОЙ КОНСТИТУТИВНОЙ МОДЕЛИ ГЦК-ПОЛИКРИСТАЛЛА

А.И. Швейкин, П.В. Трусов, К.А. Романов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

В связи со стохастической природой свойств материала на разных структурно-масштабных уровнях и термомеханических воздействий важным качеством конститутивных моделей (определяющих соотношений) является устойчивость получаемых с их помощью историй изменения откликов по отношению к различным возмущениям входных данных (истории воздействий, начальных условий) и оператора модели. Анализ устойчивости особенно актуален при обосновании применимости новых конститутивных моделей для исследования современных технологических процессов, в частности, ориентированных на создание функциональных материалов. Наиболее перспективными для решения таких проблем представляются многоуровневые физически-ориентированные модели материалов, поскольку они позволяют явным образом описывать механизмы неупругого деформирования материала, а также перестройку его структуры и определяемое ее состоянием изменение эффективных физико-механических свойств. Авторами предложен подход к численной оценке устойчивости многоуровневых конститутивных моделей материалов, который приведен в статье, опубликованной в предыдущем номере журнала. Подход включает рассмотрение разнообразных возмущений начальных условий, истории воздействий, параметрических возмущений оператора, и анализ норм их отклонений, а также интегральной нормы отклонения возмущенных решений от базовых (с невозмущенными параметрами). В настоящей работе применение предлагаемого подхода продемонстрировано на примере исследования устойчивости двухуровневой конститутивной модели ГЦК-поликристалла. Полученные результаты свидетельствуют о ее устойчивости к реализованным в расчетах возмущениям.

Ключевые слова: многоуровневая конститутивная модель материала, устойчивость математической модели, чувствительность к возмущениям

SOME RESULTS OF A NUMERICAL ESTIMATING OF THE STABILITY OF THE FCC METAL TWO-LEVEL CONSTITUTIVE MODEL

A.I. Shveykin, P.V. Trusov and K.A. Romanov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

An important property of constitutive models is the stability of the response change histories obtained under various perturbations of an input data (history of influences and initial conditions) and a model operator. It is associated with the stochastic nature of material properties at different structural-scale levels and thermomechanical influences. Stability analysis is especially significant to justify the applicability of new constitutive models for describing modern technological processes, for instance, those focused on the design of novel functional materials. Multilevel physically-oriented constitutive models of materials hold the most promise for solving such problems. They are able to provide an explicit description of the inelastic deformation mechanisms, the material structure rebuilding and the changes in the physical and mechanical properties of the material determined by its state. Use of the approach developed by the authors and described in detail in the paper in the previous issue of the journal made it possible to evaluate the stability of multilevel constitutive material models under various perturbations of the initial conditions, the history of influences, and parametric operator perturbations. It includes an analysis of the norms of their deviations and the integral norm of deviation of perturbed solutions from the base ones obtained in calculations with unperturbed parameters. In this paper, the application of the proposed approach has been illustrated by studying a two-level constitutive model of the FCC polycrystal. The obtained results demonstrate the stability of this model to the calculated perturbations.

Key words: multilevel constitutive model, mathematical model stability, sensitivity to perturbation

1. Введение

В последние десятилетия интенсивно развивается многоуровневый подход к построению конститутивных моделей (КМ) металлов и сплавов, основанный на введении внутренних переменных (ВП) и физических теориях пластичности [1–7]. Возможность явного описания изменения и финального состояния структуры материала и, соответственно, его физико-механических макросвойств (в том числе анизотропных), а также механизмов деформирования обуславливает востребованность именно таких моделей для исследования и совершенствования технологий обработки материалов, а также для решения задач по созданию функциональных материалов.

Свойство памяти неупруго деформируемых твердых тел [8, 9] в многоуровневых моделях учитывается за счет ВП. При этом введение ВП, характеризующих текущее состояние структуры и реализацию тех или иных механизмов деформирования на различных структурно-масштабных уровнях [5, 10, 11], позволяет избежать использования сложных интегральных операторов для отражения свойства памяти материала (память «хранится» в значениях внутренних переменных), поэтому КМ этого типа представляют собой в общем случае алгоритмические операторные уравнения, включающие системы дифференциальных и/или тензорно-алгебраических уравнений [5, 10, 11–16]. При корректном описании эволюции структуры, основных механизмов деформирования и взаимодействий между ними модели (и входящие в них

подмодели для характеристики изменения отдельных элементов структуры и частных механизмов деформирования) обладают значительной универсальностью, позволяющей применять их для широких классов материалов и воздействий. Поскольку в деформируемом твердом теле реализуется и взаимодействует множество механизмов на различных структурно-масштабных уровнях, для обеспечения универсальности КМ, в частности, ее применимости при различных видах нагружения, в том числе при сложном нагружении, необходимо введение большого числа ВП и эволюционных уравнений (как правило, нелинейных).

Произвольную математическую модель можно представить как оператор, позволяющий по *входным данным*, к которым в общем случае относятся изменяющиеся со временем воздействия на объект исследования и начальные условия, найти *выходные данные (решение)* [17]. Важным элементом анализа сложных моделей является рассмотрение устойчивости получаемых с их использованием решений по отношению к возмущениям входных данных и оператора. Актуальность этого для КМ обусловлена тем, что стохастический характер имеют как свойства материала (распределенные по конструкции на разных структурно-масштабных уровнях), так и воздействия (распределенные по исследуемой области и ее границам), продуцируемые стохастическими граничными условиями.

Следует отметить, что анализ устойчивости часто связывается с выяснением чувствительности отклика КМ к параметрам, характеризующим физико-механические свойства материала [18–22], что, в частности, целесообразно осуществлять при идентификации модели [23–26]: если при установленных параметрах наблюдается существенная чувствительность модели (при малых возмущениях вблизи этих значений), то, возможно, следует пересмотреть область их определения (с учетом физических соображений). Результаты проведенного авторами анализа чувствительности многоуровневых КМ к возмущениям некоторых параметров (в частности, значений принимаемых констант в кинетических уравнениях и начальных значений внутренних переменных) обсуждаются в [27]. Отметим, что исследование чувствительности можно считать частным случаем анализа устойчивости модели при параметрическом возмущении оператора КМ [28].

В статье [28], посвященной описанию подхода к численной оценке устойчивости многоуровневых моделей неупругого деформирования металлов и сплавов, рассмотрена математическая структура многоуровневых КМ, представимых в виде системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений (возможно, с алгоритмическим определением правой части). Отмечено, что хотя методы Ляпунова [29–33] успешно применяются для различных частных задач анализа устойчивости (например, в [34–37]), для их использования применительно к многоуровневым КМ имеются представляющие непреодолимые трудности, связанные с существенной нелинейностью и большой размерностью систем уравнений. Сформулировано обобщенное понятие *устойчивости решения*, которое, в отличие от традиционного, учитывает возмущения истории воздействий (входящих в правую часть системы дифференциальных уравнений) и параметрические возмущения оператора; приведена программа вычислительных экспериментов для реализации предлагаемого подхода, включающая задание разнообразных возмущений начальных условий, воздействий, оператора и вычисление норм отклонения получаемых решений от базовых. Под *процедурой оценки устойчивости модели* понимается анализ устойчивости решений при различных значениях параметров (при их нахождении в разных подмножествах области определения), задающих оператор и входные данные (начальные условия и воздействия), то есть рассмотрение ряда задач оценки локальной устойчивости модели. При этом, в случае выявления неустойчивого решения (математически обусловленной неустойчивости), необходимо выяснить, является ли математически обусловленная неустойчивость физически обусловленной [28].

В настоящей статье демонстрируется применение предлагаемого подхода на примере исследования двухуровневой КМ для описания деформирования ГЦК-поликристалла. В разделе 2 приводятся соотношения конститутивной модели, в разделе 3 пошагово представляется программа численной реализации подхода и анализируются полученные результаты.

2. Двухуровневая конститутивная модель ГЦК-поликристалла

В двухуровневых статистических моделях на базе физических теорий пластичности представительному объему поликристаллического материала на макроуровне ставится в соответствие выборка кристаллитов, деформирование которых предполагается однородным [5, 38–40]. Отметим, что в настоящее время именно статистические модели преимущественно применяются для моделирования технологических процессов термомеханической обработки. Причина заключается в том, что самосогласованные [4, 41] и прямые, подразумевающие определение неоднородных полей на мезоуровне [2, 3] модели являются значительно более ресурсоемкими.

Система соотношений на макромасштабном уровне имеет следующий вид (здесь и далее величины макромасштабного уровня обозначены прописными буквами, аналогичные величины мезоуровня, то есть уровня кристаллита, — такими же строчными буквами; для сокращения записи индекс кристаллита опущен) [5, 27]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}^{\text{cor}} &\equiv d\mathbf{K}/dt - \bar{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{\Omega}} = \bar{\mathbf{\Pi}} : (\mathbf{L} - \bar{\mathbf{\Omega}} - \mathbf{Z}^{\text{in}}), & 1 \\
 \bar{\mathbf{\Omega}} &= \langle \bar{\mathbf{\omega}} \rangle, & 2 \\
 \bar{\mathbf{\Pi}} &= \langle \bar{\mathbf{\pi}} \rangle, & 3 \quad (1) \\
 \mathbf{Z}^{\text{in}} &= \langle \mathbf{z}^{\text{in}} \rangle + \bar{\mathbf{\Pi}}^{-1} : \langle \bar{\mathbf{\pi}}' : (\mathbf{z}^{\text{in}})' \rangle + \bar{\mathbf{\Pi}}^{-1} : (\langle \mathbf{\kappa}' \cdot \bar{\mathbf{\omega}}' \rangle - \langle \bar{\mathbf{\omega}}' \cdot \mathbf{\kappa}' \rangle). & 4
 \end{aligned}$$

При этом: определяющее соотношение (1)₁ сформулировано в терминах текущей конфигурации; \mathbf{K} — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа на макроуровне; $\mathbf{K} = \left\langle \frac{\circ}{\rho/\hat{\rho}} \right\rangle \mathbf{\Sigma}$, где $\langle \cdot \rangle$ — символ операции осреднения по представительному макрообъему, $\mathbf{\Sigma}$ — тензор напряжений Коши макроуровня; $\frac{\circ}{\rho/\hat{\rho}}$ — отношение плотностей в отсчетной и текущей конфигурациях для кристаллитов, составляющих представительный объем макроуровня (в силу использования обобщенной гипотезы Фойгта величины $\frac{\circ}{\rho/\hat{\rho}}$ для всех кристаллитов одинаковы); $\mathbf{K}^{\text{cor}} \equiv d\mathbf{K}/dt - \bar{\mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{\Omega}}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная) тензора напряжений Кирхгоффа; кинематическое воздействие задано транспонированным градиентом скорости перемещений на макроуровне $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{V}}\mathbf{V}^T$.

На макроуровень из модели мезоуровня передаются тензор спина подвижной системы координат $\bar{\mathbf{\Omega}}$ (соотношение (1)₂) и тензор упругих свойств $\bar{\mathbf{\Pi}}$ (соотношение (1)₃) с помощью операции осреднения по представительному макрообъему (среднее по выборке кристаллитов); тензор скорости неупругих деформаций \mathbf{Z}^{in} устанавливается из модели мезоуровня посредством процедуры согласования определяющих соотношений макроуровня и мезоуровня [42] (обеспечения равенства макронапряжений и осредненных мезонапряжений: $\mathbf{K} = \langle \mathbf{\kappa} \rangle$); \mathbf{a}' — отклонение тензорной характеристики \mathbf{a} в отдельном кристаллите от среднего по представительному макрообъему значения; $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \langle \mathbf{a} \rangle$ (операция осреднения обладает свойством $\langle \mathbf{a}' \rangle = \mathbf{0}$ для любого \mathbf{a}).

В структуре модели (1) отражаются возможности многоуровневых моделей для рассмотрения параметров макроуровня как эффективных величин, интегрально характеризующих процессы деформирования, реализующиеся на мезоуровне. В частности, разрешается вопрос определения коротационной производной, являющийся важным при построении моделей для описания технологических процессов с характерными большими градиентами перемещений (геометрической нелинейностью) [43–49], для чего используется информация о подвижных системах координат отдельных кристаллитов, которые связываются с симметричными элементами кристаллитов [5]. При этом изменение симметрии материала на макроуровне в результате формирования текстуры не требует корректировки конститутивной модели. В серии работ [50–52] обосновывается применяемый подход к формулировке геометрически нелинейных соотношений, показано, что для малых упругих деформаций, характерных для металлов и сплавов, модель дает результаты, близкие к получаемым в альтернативных моделях мезоуровня, в том числе с наиболее популярной формой определяющих соотношений в терминах разгруженной конфигурации (см. [2, 4, 53] и другие). При этом КМ в скоростной форме в актуальной конфигурации является более адаптированной к численным методам решения краевых задач при исследовании процессов термомеханической обработки — в силу необходимости переопределения конфигурации расчетной области, включая поверхности контакта с инструментом. Другое преимущество этой формулировки — это возможность аддитивного разложения скорости неупругой деформации на вклады от различных механизмов, что существенно облегчает создание соответствующих КМ. Примеры предложенных авторами настоящей работы КМ с учетом, например, зернограничного скольжения содержатся в [5, 54, 55].

Для каждого кристаллита применяется система уравнений мезоуровня (для упрощения записи индекс кристаллита опущен) вида [5]:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{\kappa}^{\text{cor}} &\equiv d\mathbf{\kappa}/dt + \mathbf{\kappa} \cdot \bar{\mathbf{\omega}} - \bar{\mathbf{\omega}} \cdot \mathbf{\kappa} = \bar{\mathbf{\pi}} : \left(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{\omega}} - \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \right), & 1 \\
 \dot{\gamma}^{(k)} &= \dot{\gamma}_0 \left(\tau^{(k)} / \tau_c^{(k)} \right)^m H(\tau^{(k)} - \tau_c^{(k)}) \quad (k=1, \dots, K), & 2 \\
 \tau^{(k)} &= \mathbf{\kappa} : \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \quad (k=1, \dots, K), & 3 \quad (2) \\
 \dot{\tau}_c^{(k)} &= \left[\text{соотношения для определения } \dot{\tau}_c^{(k)} \right] \quad (k=1, \dots, K), & 4 \\
 \bar{\mathbf{\omega}} &= \left[\text{соотношения для определения } \bar{\mathbf{\omega}} \right], \quad \dot{\mathbf{\omega}} \cdot \mathbf{\omega}^T = \bar{\mathbf{\omega}}. & 5
 \end{aligned}$$

В формулировке (2) принято: $\mathbf{k} = \left(\frac{\circ}{\rho/\hat{\rho}} \right) \boldsymbol{\sigma}$ — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа мезоуровня,

где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши мезоуровня; $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ — спин подвижной системы координат, связанной с решеткой [50]; $\bar{\mathbf{n}}$ — тензор упругих свойств (его компоненты постоянны в базисе подвижной системы координат); $\mathbf{I} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T$ — транспонированный градиент скорости перемещений (согласно обобщенной гипотезе Фойгта $\mathbf{I} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T = \hat{\nabla} \mathbf{V}^T = \mathbf{L}$, где $\hat{\nabla} \mathbf{V}^T$ берется с макромасштабного уровня); $\dot{\gamma}^{(k)}$, $\mathbf{b}^{(k)}$, $\mathbf{n}^{(k)}$ — скорости сдвига, единичные векторы направления скольжения и нормали к плоскости скольжения (в актуальной конфигурации) краевых дислокаций k -й системы скольжения; K — число кристаллографических систем скольжения (используется удвоенное число систем скольжения, для ГЦК $K = 24$). Здесь и далее точкой над символом обозначена производная по времени соответствующей величины. Тензор скорости неупругих деформаций на мезоуровне определен как $\mathbf{z}^{\text{in}} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$.

Значения $\dot{\gamma}^{(k)}$ на системах скольжения устанавливаются из вязкопластического соотношения (2)₂, где $\tau^{(k)}$, $\tau_c^{(k)}$ — соответственно сдвиговое и критическое сдвиговое напряжения на k -й системе скольжения; $\dot{\gamma}_0$ — скорость сдвига по системе скольжения при достижении касательным напряжением критического напряжения сдвига; m — показатель скоростной чувствительности материала; $H(\cdot)$ — функция Хевисайда.

Формулировке закона упрочнения — эволюционных соотношений (2)₄ для критических сдвиговых напряжений $\tau_c^{(k)}$ — посвящено множество работ по развитию физических теорий пластичности (популярны подходы, предложенные в [56–59]; развернутый обзор работ последних десятилетий содержится в [5]). Объясняется это тем, что именно $\tau_c^{(k)}$ являются теми ВП (внутренними переменными), которые характеризуют сопротивление решетки и дефектной структуры движению дислокаций. Следовательно, их изменение должно быть связано с изменением дефектной структуры. Поскольку в данной статье предлагается сконцентрировать внимание на процедуре оценки устойчивости модели, то при проведении расчетов применяется достаточно простой и хорошо известный закон упрочнения вида [53, 60]:

$$\dot{\tau}_c^{(k)} = \sum_{l=1}^K h^{(kl)}(\boldsymbol{\sigma}) \dot{\gamma}^{(l)}, \quad h^{(kl)} = \left[q_{\text{lat}} + (1 - q_{\text{lat}}) \delta^{(kl)} \right] h^{(l)}, \quad h^{(l)} = h_0 \left| 1 - \tau_c^{(l)} / \tau_{\text{sat}} \right|^a, \quad (3)$$

где параметр латентного упрочнения q_{lat} принимает значение 1,0 для компланарных и 1,4 для некомпланарных систем скольжения (с номерами k и l), $\delta^{(kl)}$ — дельта Кронекера, τ_{sat} — так называемое напряжение насыщения [53, 60], параметры h_0 , a находятся по экспериментальным данным.

Подвижная система координат связывается с кристаллографическими осями [50]. В этом случае для наблюдателя в фиксированной лабораторной системе координат тензоры, входящие в формулировку КМ, будут индифферентными, что позволяет выполнить принцип независимости определяющего соотношения от выбора системы отсчета [8]. При проведении расчетов для нахождения спина (2)₅ применяется соотношение [50]:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{k}}_i \mathbf{k}_i = -(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{l}^e \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 - (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{l}^e \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_3 + (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{l}^e \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_1 - \\ - (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{l}^e \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 + (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{l}^e \cdot \mathbf{k}_1) \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_1 + (\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{l}^e \cdot \mathbf{k}_2) \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_2, \quad (4)$$

где \mathbf{k}_i — ортонормированный базис подвижной системы координат, ориентация которой относительно фиксированной лабораторной системы задается собственно ортогональным тензором \mathbf{o} ,

$\mathbf{l}^e = \mathbf{I} - \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}$ — упругая составляющая градиента скорости перемещений. При выводе (4) учтено

свойство инвариантности решетки (а следовательно, подвижной системы координат) при пластическом деформировании за счет движения краевых дислокаций по системам скольжения [50]. Как направление развития моделей данного класса, можно отметить усовершенствование описания ротации решетки кристаллитов путем включения в уравнения силовых (моментных) факторов, возникающих от взаимодействия дефектов соседних зерен (субзерен) [42].

В численных расчетах рассматривался представительный объем поликристалла с гранцентрированной кубической решеткой (далее ГЦК-поликристалла) в рамках статистической модели, включающий выборку из 343 кристаллитов, начальные ориентации которых распределялись случайно по равномерному закону. Номинальные свойства соответствовали меди. Принимались следующие независимые компоненты тензора

упругих свойств мезоуровня, которые были постоянными для наблюдателя в жесткой подвижной системе координат, связанной с решеткой: $\pi_{111} = 168,4$ ГПа, $\pi_{112} = 121,4$ ГПа, $\pi_{121} = 75,4$ ГПа [61]; в вязкопластическом соотношении использовались параметры: $\dot{\gamma}_0 = 0,001$ с⁻¹, $1/m = 0,012$; параметры закона упрочнения составляли: $h_0 = 180$ МПа, $a = 2,25$, $\tau_{sat} = 148$ МПа; критические напряжения для всех систем скольжения имели начальные значения: $\tau_c^{(k)}(0) = \tau_{c0} = 16$ МПа ($k = 1, \dots, K$) [53, 60].

Приведенная КМ представляется как система алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений. Для численного интегрирования последних применен явный метод Эйлера, что обусловлено существенной нелинейностью системы уравнений, в частности наличием в вязкопластическом законе (2)₂ функции Хэвисайда (что приводит к необходимости дискретизации с малым шагом для отслеживания активности систем скольжения в кристаллитах; в расчетах шаг по времени составлял 0,002 с).

На рисунке 1 показаны зависимости компонент $(-\Sigma_{33})$ и $(-\Sigma_{23})$ в ортонормированной лабораторной системе координат (ЛСК) с базисом \mathbf{p}_i (где $i = \overline{1,3}$) тензора истинных напряжений Коши на макроуровне в зависимости от компоненты $(-H_{33})$ логарифмической меры деформации при одноосном сжатии и от величины сдвига при простом сдвиге соответственно. Заметим, что, хотя используемые в расчетах параметры были определены при идентификации на основе рассмотрения сжатия [60], результаты изменения сдвиговых напряжений при простом сдвиге, примененные для верификации, находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

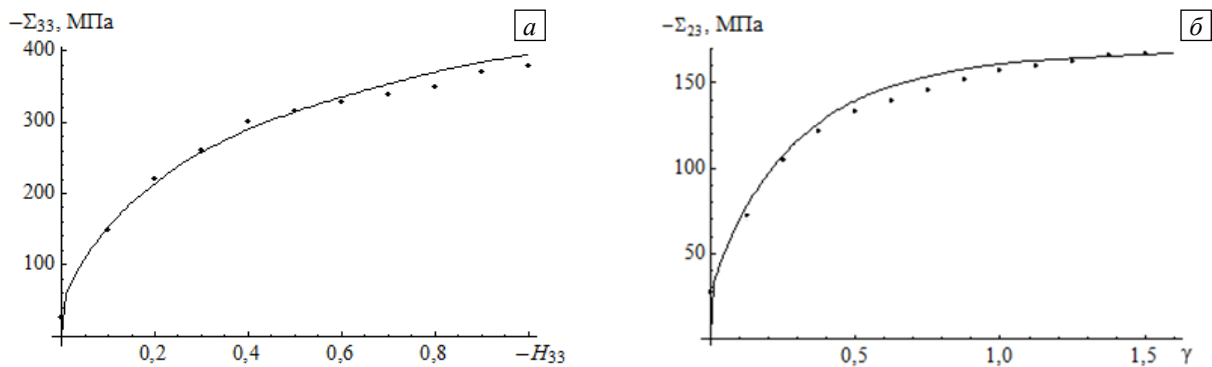


Рис. 1. Зависимости $(-\Sigma_{33})$ от H_{33} при одноосном сжатии (а) и $(-\Sigma_{23})$ от величины сдвига при простом сдвиге (б); точками показаны экспериментальные данные из [60], сплошной линией – результаты расчетов по авторской модели

В статье [27] приведены некоторые результаты применения данной КМ для описания простых и сложных нагружений, а также результаты исследования ее чувствительности к возмущению некоторых характеристик: параметров вязкопластического соотношения $\dot{\gamma}_0$, m ; параметров закона упрочнения h_0 , a , τ_{sat} ; начальных значений критических напряжений для всех систем скольжения τ_{c0} . Полученные данные вычислений свидетельствуют об устойчивости КМ по отношению к изменению этих параметров. Осуществлено ранжирование последних по степени чувствительности к ним, в частности выявлено, что наибольшее влияние на выходные данные оказывает отклонение параметра τ_{sat} .

Отметим, что в рамках применяемого к анализу устойчивости подхода, предложенного в [28], исследование влияния возмущений начальных значений критических напряжений τ_{c0} относится к случаю возмущений начальных условий по ВП, а возмущений остальных параметров — к рассмотрению параметрических возмущений оператора. Приведем далее пошаговое описание реализации вычислений в соответствии с данным подходом на примере приведенной КМ с попутным обсуждением результатов при возмущениях более широкого набора параметров.

3. Результаты применения методики для исследования устойчивости по отношению к возмущениям воздействий и параметрическим возмущениям оператора

В рамках введенной в [28] системы обозначений определим:

– вектор воздействий $\mathbf{X} = \{L_{ij}(t)\}$ ($i, j = \overline{1,3}$), $t \in [0, T]$ через $L_{ij}(t)$ — компоненты транспонированного градиента скорости перемещений в ЛСК;

– выходные данные $\mathbf{Y} = \{\Sigma_{ij}(t)\}$ ($i, j = \overline{1,3}$), $t \in [0, T]$ через $\Sigma_{ij}(t)$ — компоненты тензора напряжений Коши макроуровня в ЛСК;

– вектор внутренних переменных \mathbf{Z} как состоящий из введенных выше (для каждого зерна выборки) компонент мезонапряжений, компонент тензора ориентации кристаллографической системы координат, сдвигов по системам скольжения, критических напряжений их активации (результаты для возмущений начальных значений ВП здесь не приводятся в силу ограниченности объема статьи, они частично описаны в [27]).

Изложим последовательность численной реализации подхода к исследованию устойчивости КМ для конкретных нагружений [28].

ШАГ 1. Определение базовых решений

Базовые решения — это решения без каких-либо возмущений параметров. С ними сопоставлялись решения, полученные в различных реализациях при случайном возмущении некоторых параметров (согласно заданной программе численных экспериментов, см. ШАГ 3), остальные параметры при этом не возмущались.

В качестве базовых рассмотрены решения при изотермических жестких нагружениях представительного объема:

1) Кинематическое нагружение с транспонированным градиентом скорости перемещений $\mathbf{L}(t) = (\dot{\varepsilon}/2)(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2) - \dot{\varepsilon}\mathbf{p}_3\mathbf{p}_3$. Определенные с помощью КМ базовые решения в сопоставлении с некоторыми возмущенными приведены на рисунке 4. Отметим, что в [60] это нагружение предложено для статистической КМ как аппроксимация одноосного сжатия (для краткости назовем его «квазиосадкой»).

2) Простой сдвиг $\mathbf{L}(t) = -\dot{\varepsilon}\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3$.

В обоих случаях жесткого нагружения принято $\dot{\varepsilon} = 0,001 \text{ с}^{-1}$, процесс деформирования осуществлялся на отрезке времени $0 \leq t \leq T$, где $T = 1000 \text{ с}$.

ШАГ 2. Задание возмущений воздействий и оператора

В статье [27] представлены результаты исследования чувствительности отклика к изменению числовых значений некоторых характеристик оператора (параметров вязкопластического соотношения и параметров закона упрочнения) и начальных условий (начальных значений критических напряжений сдвигов по системам скольжения). Полученные данные свидетельствуют об устойчивости к соответствующим возмущениям. Далее целесообразным являлся анализ устойчивости по отношению к возмущению воздействий, а также другому виду параметрического возмущения оператора.

Шаг 2.1. Возмущение воздействий

Возможность возникновения кинематических возмущений для представительного объема обусловлена тем, что при изготовлении изделий (или проведении экспериментов) не всегда точно известны воздействия (осуществляемые через граничные условия для конструкции). Рассматривались следующие возмущенные воздействия:

– для квазиосадки

$$\mathbf{L}_1^*(t) = \left(\frac{\alpha(t)}{2} \right) (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2) - \alpha(t)\mathbf{p}_3\mathbf{p}_3 - (\alpha(t) - \dot{\varepsilon})\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3; \quad (5)$$

– для сдвига

$$\mathbf{L}_2^*(t) = \left(\frac{\alpha(t) - \dot{\varepsilon}}{2} \right) (\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{p}_2) - (\alpha(t) - \dot{\varepsilon})\mathbf{p}_3\mathbf{p}_3 - \alpha(t)\mathbf{p}_2\mathbf{p}_3. \quad (6)$$

Равенству $\alpha(t) = \dot{\varepsilon}$ соответствовало совпадение возмущенного воздействия с базовым. Задание функции $\alpha(t)$, устанавливающей текущую «возмущенную» скорость деформации, осуществлялось так, чтобы обеспечить «пилообразные» (со случайными продолжительностью и высотой всплеска) изменения компонент $\mathbf{L}^*(t)$ относительно компонент $\mathbf{L}(t)$. Продолжительность всплесков, производимых поочередно «вверх» и «вниз» (с $\alpha(t) \geq \dot{\varepsilon}$ и $\alpha(t) \leq \dot{\varepsilon}$ соответственно), определялась случайным образом с использованием равномерного закона распределения на отрезке от 0 до 10 с и округлялось до значения, соответствующего целому числу шагов интегрирования КМ по времени. Пиковое значение α_{\max} на всплеске находилось как $(1 + \omega\delta_{L_{\max}})\dot{\varepsilon}$ для нечетных всплесков и $(1 - \omega\delta_{L_{\max}})\dot{\varepsilon}$ для четных всплесков, где ω — случайная величина из равномерного закона распределения на отрезке $[0,1]$, $\delta_{L_{\max}}$ — задаваемый для текущего вычислительного эксперимента диапазон относительного изменения параметра. В момент начала всплеска t_{start} возмущение отсутствовало: $\alpha(t_{\text{start}}) = \dot{\varepsilon}$. При нахождении на всплеске текущая величина α бралась такой, чтобы обеспечивалось ее линейное изменение с достижением α_{\max} на середине всплеска и линейный возврат к $\alpha = \dot{\varepsilon}$ в конце всплеска.

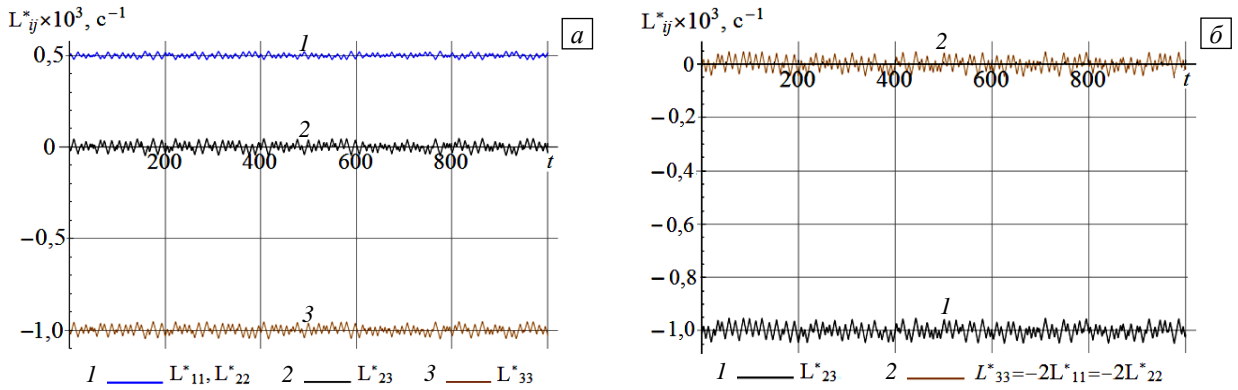


Рис. 2. Изменение нетривиальных компонент $\mathbf{L}^*(t)$ в случайно выбранных реализациях вычислительных экспериментов с возмущением воздействий для квазисадки (а) и простого сдвига (б); $\delta_{L_{\max}} = 0,05$

Для примера на рисунке 2 приведены изменения компонент тензора $\mathbf{L}^*(t)$ в ЛСК, полученные в соответствии с (5) и (6) для некоторых реализаций вычислительных экспериментов при $\delta_{L_{\max}} = 0,05$.

Шаг 2.2. Возмущение оператора

Для параметрического возмущения оператора задавались отклонения критических напряжений сдвигов по системам скольжения в различные моменты времени после начального. Актуальность данного исследования обусловлена тем, что некоторые физические процессы имеют стохастический характер, например, акты взаимодействия дефектных структур на микромасштабных уровнях, учет которых в КМ осуществляется эффективным образом в критических напряжениях сдвигов для отдельных кристаллитов на мезоуровне (обзор подходов к формулировке соотношений для упрочнения приведен в [5]). При практическом применении введенного в [28] определения устойчивости возникает проблема вычисления нормы отклонения оператора, поскольку ее аналитическое нахождение, в силу существенной нелинейности и большой размерности КМ, невозможно и не известны способы ее численного расчета (при существовании такого способа его реализация была бы затруднительна по причине огромной ресурсоемкости). В численной процедуре оценки устойчивости использовалась норма для возмущаемых параметров оператора $\|\mathbf{\Lambda}_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^S}$. При возмущении только критических напряжений имеем $S = NK$, где N — число зерен, K — число кристаллографических систем скольжения (как отмечено выше, принято $N = 343$, $K = 24$), и норма имеет вид [28]:

$$\|\mathbf{\Lambda}_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^S} = \left(\int_0^T \langle (\tau_c(t))^2 \rangle dt \right)^{1/2}, \tag{7}$$

где $\langle (\tau_c(t))^2 \rangle$ — квадрат критического напряжения сдвига, осредненный по всем K системам скольжения во всех N кристаллитах из выборки для соответствующего представительного объема. Норма отклонения параметров оператора определялась как

$$\|\mathbf{\Lambda}_{t \in [0, T]}^* - \mathbf{\Lambda}_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^S} = \left(\int_0^T \langle (\tau_c^*(t) - \tau_c(t))^2 \rangle dt \right)^{1/2}, \tag{8}$$

где $\langle (\tau_c^*(t) - \tau_c(t))^2 \rangle$ — квадрат отклонения критических напряжений в текущей реализации от полученных в базовом решении, осредненный по всем системам скольжения во всех кристаллитах. Переход к оценке (8) для характеристики отклонения оператора подразумевает достаточную гладкость нелинейного оператора КМ в окрестности рассматриваемых решений.

Возмущение критических напряжений реализовывалось таким образом, чтобы обеспечивалось «пилообразное» изменение критических напряжений для текущей реализации $\langle \tau_c^*(t) \rangle$ относительно $\langle \tau_c(t) \rangle$, то есть изменение со случайными продолжительностью и высотой всплеска. Продолжительность всплесков, осуществляемых поочередно «вверх» и «вниз», определялась случайным образом на основе равномерного закона распределения отрезке от 0 до 10 с. Пиковое отклонение средних критических напряжений в возмущенном и невозмущенных расчетах, которого требовалось достичь на всплеске,

задавалось как $\beta = \langle \tau_c(t_{start}) \rangle \omega \delta_{\tau_{max}}$, где $\langle \tau_c(t_{start}) \rangle$ — средние критические напряжения в базовом расчете на момент начала всплеска t_{start} , ω — случайная величина из равномерного закона распределения на отрезке $[0,1]$, $\delta_{\tau_{max}}$ — взятый для вычислительного эксперимента диапазон относительного изменения величин. В момент t_{start} возмущение отсутствовало. При реализации нечетных всплесков на всех шагах интегрирования КМ критические напряжения по всем системам скольжения всех кристаллитов дополнительно (после процедуры интегрирования КМ на временном шаге) увеличивались с одинаковым множителем таким образом, чтобы отклонение средних критических напряжений при «возмущенном» расчете от значений в базовом расчете линейно нарастало и доходило до пика на середине всплеска. После пика осуществлялось равномерное сжатие поверхности текучести до выравнивания средних критических напряжений в возмущенном решении со значениями, получаемыми в базовом расчете. Для четных всплесков аналогичным образом задавалось сжатие и последующее растяжение поверхности текучести.

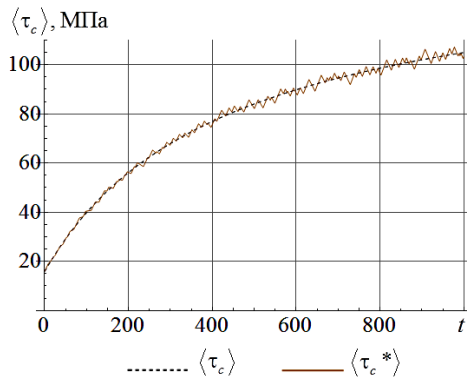


Рис. 3. Изменение средних критических напряжений в базовом расчете и в расчете с возмущениями (случайно выбранная реализация) при простом сдвиге; $\delta_{\tau_{max}} = 0,05$

Для иллюстрации на рисунке 3 приведены расчетные кривые, показывающие изменение в процессе деформирования критических напряжений для средних критических напряжений, полученных в базовом расчете и в расчете с возмущениями. Отметим, что характер отклонения средних критических напряжений (Рис. 3) сложнее, чем у параметров воздействия (Рис. 2). Объясняется это тем, что критические напряжения являются ВП задачи, и силу этого величина отклонения от базового решения определяется не только предписанным законом возмущения, но и зависит от установленных на момент возмущения, согласно соотношениям самой КМ, значений возмущаемых ВП.

ШАГ 3. Программа численных экспериментов

При реализации модели для базовых нагрузений (ШАГ 1) осуществлялись описанные выше возмущения воздействий и оператора (ШАГ 2) с различными диапазонами относительного возмущения параметров $\delta_{L_{max}}$, $\delta_{\tau_{max}}$ согласно программе расчетов, приведенной в таблице 1.

Таблица 1. Программа вычислительных экспериментов

№	Тип экспериментов	№	Тип экспериментов
1	Квазиосадка с возмущением $L(t)$	4	Сдвиг с возмущением $L(t)$
2	Квазиосадка с возмущением $\tau_c(t)$	5	Сдвиг с возмущением $\tau_c(t)$
3	Квазиосадка с возмущением и $L(t)$, и $\tau_c(t)$	6	Сдвиг с возмущением и $L(t)$, и $\tau_c(t)$

ШАГ 4. Реализация вычислительных экспериментов

Для каждого типа вычислительных экспериментов из программы (Табл. 1) осуществлено по 3 серии из 50 расчетов со случайной реализацией возмущений в каждом, каждая серия соответствовала определенным значениями диапазонов относительного возмущения параметров $\delta_{L_{max}}$, $\delta_{\tau_{max}}$. Данные расчетов с возмущениями обозначены далее символом «*». На рисунках 4, 5 приведены примеры, демонстрирующие некоторые результаты отдельных вычислительных экспериментов (данные статистической обработки совокупности результатов для всех реализаций содержатся ниже, см. Табл. 2).

На рисунке 4 приведены кривые изменения во времени наибольших по модулю компонент тензора макронапряжений, построенные по данным базовых расчетов и расчетов с возмущениями (реализация, для которой показаны результаты, здесь и далее выбрана случайно).

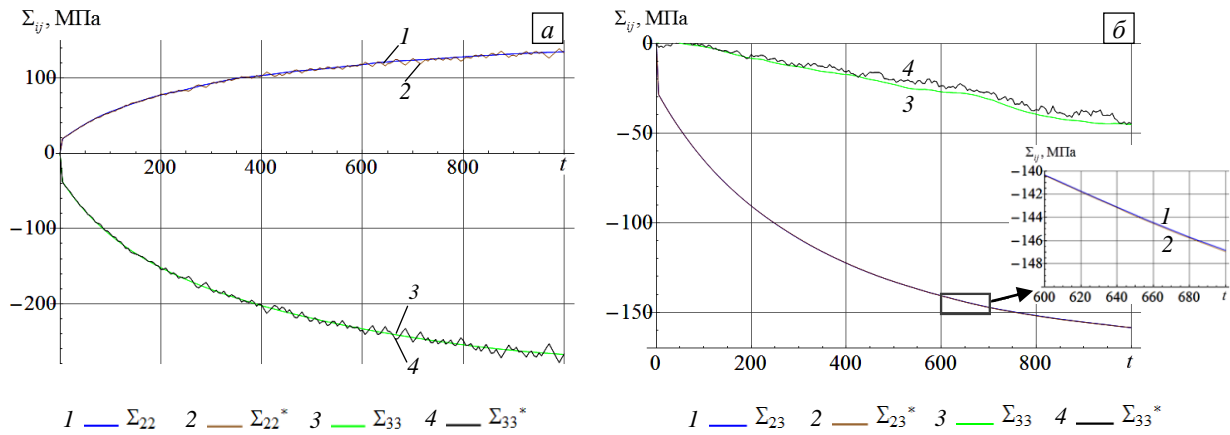


Рис. 4. Изменение со временем компонент тензора макронапряжений в вычислительных экспериментах 2-го типа с $\delta_{L_max} = 0$, $\delta_{\tau_max} = 0,05$ (с возмущениями критических напряжений при квазиосадке) (а) и 4-го типа с $\delta_{L_max} = 0,05$, $\delta_{\tau_max} = 0$ (с возмущениями кинематических воздействий при сдвиге) (б)

На рисунке 4 видно, что возмущенное решение близко к базовому при рассматриваемых возмущениях. Дополнительно отметим, что полученные в базовых решениях и решениях с возмущениями полюсные фигуры визуально практически не отличаются. При возмущении критических напряжений в соответствии с принятым законом их варьирования значимыми являются изменения всех компонент тензора макронапряжений (Рис. 4а). Интересно, что в расчетах с возмущением кинематических воздействий (траекторий деформаций) наблюдается близость значений доминирующей компоненты тензора напряжений к значениям базового расчета (на рисунке 4б отклонения визуально практически совпадают). Можно объяснить это как следствие описания эволюции мезонапряжений в КМ: при принятом показателе степени $m = 83,3$ в вязкопластическом законе при активном нагружении (девиатор) мезонапряжения находятся вблизи поверхности многогранника текучести, определяемого критерием Шмида [5, 62]. Траектория деформации при рассматриваемых возмущениях остается близкой к базовой, поэтому изображающие точки в пространстве напряжений (ИТН) для кристаллитов стремятся двигаться в направлении, соответствующем увеличению доминирующей компоненты напряжений. На начальном этапе ИТН располагаются вблизи граней поверхности текучести кристаллитов (представляющей собой выпуклый многогранник [5]), которым соответствует максимум этой компоненты девиатора напряжений. В процессе последующего нагружения поверхность текучести трансформируется — расширяется в направлении увеличения доминирующей компоненты девиатора напряжений совместно с перемещением ИТН. Поскольку величины максимальной накопленной деформации для доминирующей компоненты, соответствующие базовому и возмущенному вариантам, близки, то изменения поверхностей текучести в данном направлении для базового и возмущенного режимов будут отличаться незначительно, что выразится в близости получаемых значений доминирующей компоненты. В то же время грань поверхности текучести с максимальным значением доминирующей компоненты девиатора напряжений может быть практически перпендикулярной к направлению возрастания напряжений, и возмущения кинематических воздействий проявятся в движении ИТН по этой грани поверхности текучести.

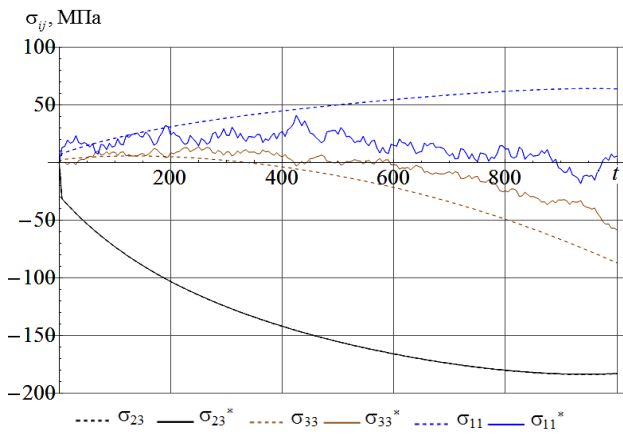


Рис. 5. Изменение со временем компонент тензора мезонапряжений кристаллита при реализации № 1 в вычислительном эксперименте 4-го типа с $\delta_{L_max} = 0,05$ (с возмущениями кинематических воздействий при сдвиге)

На рисунке 5 приведены типичные зависимости компонент тензора мезонапряжений от времени для отдельного кристаллита, построенные по данным тех же расчетов, что и кривые, представленные на рисунке 4б. Отметим, что по недоминирующим компонентам напряжений отклонения на макроуровне меньше вследствие осреднения мезонапряжений по достаточно большому числу (343) кристаллитов.

В расчетах находились значения норм [28]:

– отклонений истории воздействий $\| \mathbf{X}_{t \in [0, T]}^* - \mathbf{X}_{t \in [0, T]} \|_{Q_2^m}$, норма определена интегралом

$$\| \mathbf{X}_{t \in [0, T]} \|_{Q_2^m} = \left(\int_0^T \sum_{i=1}^m (X_i(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

в пространстве $Q_{2, t \in [0, T]}^m$ кусочно-непрерывных

на $t \in [0, T]$ вектор-функций размерности m [63], в проведенных расчетах $m=9$ (число компонент \mathbf{L});

– отклонений параметров оператора согласно (8);

– отклонений решений $\|\mathbf{Y}_{t \in [0, T]}^* - \mathbf{Y}_{t \in [0, T]}\|_{C_{L^2}^n}$, норма также задана с использованием интеграла Римана

$\|\mathbf{Y}_{t \in [0, T]}\|_{C_{L^2}^n} = \left(\int_0^T \sum_{i=1}^n (Y_i(t))^2 dt \right)^{1/2}$, но в пространстве $C_{L^2}^n$ непрерывных на $t \in [0, T]$ вектор-функций

размерности n ; в расчетах $n=9$ (число компонент тензора макронапряжений Σ). Отметим, что в общем случае анализа различных типов воздействий, параметров оператора, ВП и отклика соответствующие векторы (\mathbf{X} , Λ , \mathbf{Z} , \mathbf{Y}) требуется вводить с обезразмериванием компонент на характерные величины; для рассмотренного случая, в силу однотипности компонент этих векторов, такая необходимость отсутствует.

По сформулированному в [28] понятию, *базовое решение будет устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие (определенные в соответствующих нормированных пространствах) окрестности начальных условий, воздействий и параметров оператора, что при нахождении соответствующих возмущенных характеристик в них решения, устанавливаемые по модели, будут располагаться в ε -окрестности базового решения.

Для оценки устойчивости модели, согласно [28], необходимо проверить устойчивость решений при различных значениях параметров (взятых из разных подмножеств области определения), задающих оператор и входные данные (начальные условия и воздействия). В настоящей статье не приводятся результаты исследования возмущений начальных условий; ранее получены данные (см. [27]), свидетельствующие об устойчивости КМ к их возмущению.

ШАГ 5. Анализ выполнения требований, содержащихся в определении устойчивости, для каждого базового решения по совокупности расчетных данных

В таблице 2 приведены относительные оценки норм $\frac{\|\mathbf{X}_{t \in [0, T]}^* - \mathbf{X}_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^m \text{ об.}}}{\|\mathbf{X}_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^m}} = \Delta_{\mathbf{X}}$, $\frac{\|\Lambda_{t \in [0, T]}^* - \Lambda_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^s \text{ об.}}}{\|\Lambda_{t \in [0, T]}\|_{Q_2^s}} = \Delta_{\Lambda}$

и $\frac{\|\mathbf{Y}_{t \in [0, T]}^* - \mathbf{Y}_{t \in [0, T]}\|_{C_{L^2}^n \text{ об.}}}{\|\mathbf{Y}_{t \in [0, T]}\|_{C_{L^2}^n}} = \Delta_{\mathbf{Y}}$, найденные в разных реализациях вычислительных экспериментов.

Для краткости будем называть их относительными нормами. В проведенных численных экспериментах типов № 3 и № 6 принималось: $\delta_{L_{\max}} = \delta_{\tau_{\max}}$, поэтому далее для обозначения диапазона относительного возмущения параметров используется одинаковое обозначение — δ . Для каждого δ ($\delta = 0,01; 0,03; 0,05$) на всех графиках отложено по 50 точек (всего на каждом графике 150 точек). При этом отдельная точка соответствует реализации одного вычислительного эксперимента: для него определены $\mathbf{X}_{t \in [0, T]}^*$, $\Lambda_{t \in [0, T]}^*$, $\mathbf{Y}_{t \in [0, T]}^*$ (и в рамках КМ известна эволюция ВП для 343 зерен; некоторые частные результаты представлены на рисунках 4, 5), по которым вычислены указанные нормы.

Отметим, что при наличии возмущений воздействий норма отклонения параметров оператора (8), строго говоря, не является оценкой нормы отклонения оператора [28], поскольку в этом случае невозмущенные и возмущенные критические напряжения исследуются при разных входных данных (при различных историях воздействий). Между тем, рассмотрение совместных возмущений при анализе устойчивости представляется необходимым. При этом норма (8) может трактоваться буквально как интегральная оценка отклонений историй изменения ВП, получаемых по КМ. Если меньшим Δ_{Λ} будут отвечать в среднем меньшие $\Delta_{\mathbf{Y}}$, то это может расцениваться как косвенное свидетельство устойчивости решения к исследуемым возмущениям оператора.

Результаты, приведенные в таблице 2, можно представить в виде зависимостей относительного отклонения отклика от относительного отклонения истории воздействий и относительного отклонения оператора. Для примера на рисунке 6 приведены соответствующие данные, полученные в серии экспериментов № 6.

Результаты вычислений позволяют заключить, что КМ обладает заметной чувствительностью и к возмущениям кинематических воздействий, и к возмущениям критических напряжений, что, в частности, обуславливает необходимость внимательного рассмотрения вопросов описания геометрической нелинейности и формулировки законов упрочнения (эволюционных уравнений для критических напряжений). Можно заметить, что совместное возмущение параметров приводит (по средней оценке) к большему отклонению отклика.

Таблица 2. Численные оценки относительных норм при разных параметрах относительного возмущения δ (M , S – математическое ожидание и средноквадратичное отклонение относительных норм)

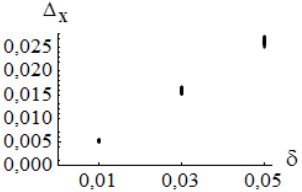
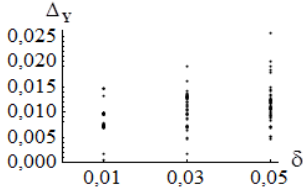
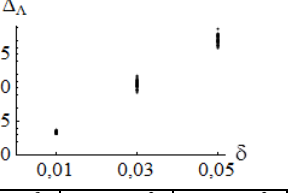
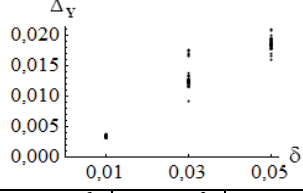
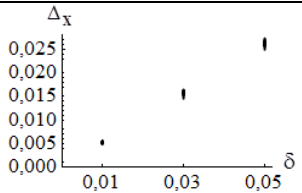
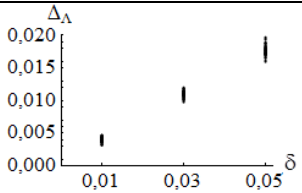
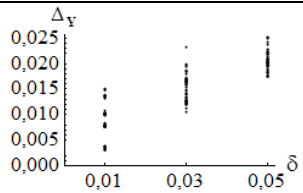
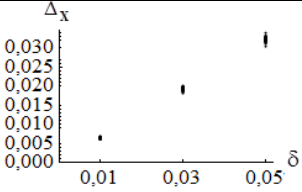
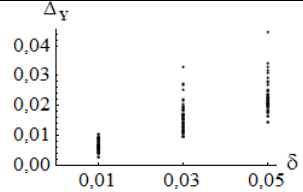
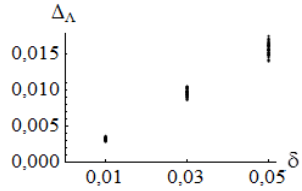
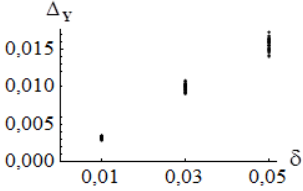
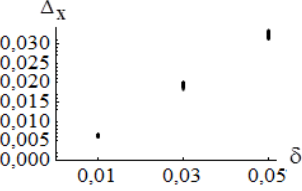
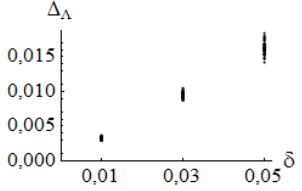
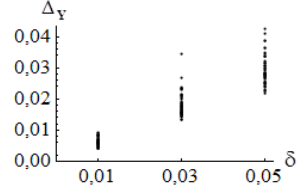
Δ_x	Δ_λ	Δ_y																								
Эксперименты 1-го типа: квазиисадка с возмущением $L(t)$																										
 <table border="1" data-bbox="199 548 582 604"> <tr> <td>M</td> <td>$5,27 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,59 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$2,63 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,17 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4,08 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$5,48 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$2,63 \cdot 10^{-2}$	S	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$5,48 \cdot 10^{-4}$	Не рассматривалось	 <table border="1" data-bbox="1029 548 1412 604"> <tr> <td>M</td> <td>$8,36 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,09 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$1,15 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$2,53 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$3,22 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$3,8 \cdot 10^{-3}$</td> </tr> </table>	M	$8,36 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	S	$2,53 \cdot 10^{-3}$	$3,22 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$								
M	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$1,59 \cdot 10^{-2}$	$2,63 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,17 \cdot 10^{-4}$	$4,08 \cdot 10^{-4}$	$5,48 \cdot 10^{-4}$																							
M	$8,36 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$																							
S	$2,53 \cdot 10^{-3}$	$3,22 \cdot 10^{-3}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$																							
Эксперименты 2-го типа: квазиисадка с возмущением $\tau_c(t)$																										
0	 <table border="1" data-bbox="614 840 997 896"> <tr> <td>M</td> <td>$3,43 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,05 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$1,72 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,57 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$5,66 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$6,14 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$	S	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$5,66 \cdot 10^{-4}$	$6,14 \cdot 10^{-4}$	 <table border="1" data-bbox="1029 840 1412 896"> <tr> <td>M</td> <td>$3,44 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,29 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$1,86 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,53 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$1,72 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$8,48 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$3,44 \cdot 10^{-3}$	$1,29 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$	S	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-3}$	$8,48 \cdot 10^{-4}$								
M	$3,43 \cdot 10^{-3}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,72 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$5,66 \cdot 10^{-4}$	$6,14 \cdot 10^{-4}$																							
M	$3,44 \cdot 10^{-3}$	$1,29 \cdot 10^{-2}$	$1,86 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$1,72 \cdot 10^{-3}$	$8,48 \cdot 10^{-4}$																							
Эксперименты 3-го типа: квазиисадка с возмущением и $L(t)$, и $\tau_c(t)$																										
 <table border="1" data-bbox="199 1131 582 1187"> <tr> <td>M</td> <td>$5,28 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,58 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$2,62 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,42 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$3,67 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4,78 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$5,28 \cdot 10^{-3}$	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$2,62 \cdot 10^{-2}$	S	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$3,67 \cdot 10^{-4}$	$4,78 \cdot 10^{-4}$	 <table border="1" data-bbox="614 1131 997 1187"> <tr> <td>M</td> <td>$4,01 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,10 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$1,77 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$4,02 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$5,22 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$8,04 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$4,01 \cdot 10^{-3}$	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$	S	$4,02 \cdot 10^{-4}$	$5,22 \cdot 10^{-4}$	$8,04 \cdot 10^{-4}$	 <table border="1" data-bbox="1029 1131 1412 1187"> <tr> <td>M</td> <td>$9,04 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,12 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$2,07 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$3,6 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$2,73 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,95 \cdot 10^{-3}$</td> </tr> </table>	M	$9,04 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$2,07 \cdot 10^{-2}$	S	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$
M	$5,28 \cdot 10^{-3}$	$1,58 \cdot 10^{-2}$	$2,62 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$3,67 \cdot 10^{-4}$	$4,78 \cdot 10^{-4}$																							
M	$4,01 \cdot 10^{-3}$	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-2}$																							
S	$4,02 \cdot 10^{-4}$	$5,22 \cdot 10^{-4}$	$8,04 \cdot 10^{-4}$																							
M	$9,04 \cdot 10^{-3}$	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$2,07 \cdot 10^{-2}$																							
S	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$2,73 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$																							
Эксперименты 4-го типа: сдвиг с возмущением $L(t)$																										
 <table border="1" data-bbox="199 1422 582 1478"> <tr> <td>M</td> <td>$6,43 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,93 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$3,22 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,6 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4,47 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$6,13 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$6,43 \cdot 10^{-3}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$3,22 \cdot 10^{-2}$	S	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$4,47 \cdot 10^{-4}$	$6,13 \cdot 10^{-4}$	Не рассматривалось	 <table border="1" data-bbox="1029 1422 1412 1478"> <tr> <td>M</td> <td>$6,56 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,61 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$2,27 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,9 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$4,96 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$5,43 \cdot 10^{-3}$</td> </tr> </table>	M	$6,56 \cdot 10^{-3}$	$1,61 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$	S	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,96 \cdot 10^{-3}$	$5,43 \cdot 10^{-3}$								
M	$6,43 \cdot 10^{-3}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$3,22 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$4,47 \cdot 10^{-4}$	$6,13 \cdot 10^{-4}$																							
M	$6,56 \cdot 10^{-3}$	$1,61 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$4,96 \cdot 10^{-3}$	$5,43 \cdot 10^{-3}$																							
Эксперименты 5-го типа: сдвиг с возмущением $\tau_c(t)$																										
0	 <table border="1" data-bbox="614 1702 997 1758"> <tr> <td>M</td> <td>$3,19 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$9,6 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,56 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,58 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4,7 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$8,18 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-2}$	S	$1,58 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$8,18 \cdot 10^{-4}$	 <table border="1" data-bbox="1029 1702 1412 1758"> <tr> <td>M</td> <td>$3,19 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$9,96 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,57 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,55 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4,61 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$7,88 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$9,96 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-2}$	S	$1,55 \cdot 10^{-4}$	$4,61 \cdot 10^{-4}$	$7,88 \cdot 10^{-4}$								
M	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$9,6 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,58 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$8,18 \cdot 10^{-4}$																							
M	$3,19 \cdot 10^{-3}$	$9,96 \cdot 10^{-3}$	$1,57 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,55 \cdot 10^{-4}$	$4,61 \cdot 10^{-4}$	$7,88 \cdot 10^{-4}$																							
Эксперименты 6-го типа: сдвиг с возмущением и $L(t)$, и $\tau_c(t)$																										
 <table border="1" data-bbox="199 2004 582 2060"> <tr> <td>M</td> <td>$6,39 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,93 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$3,23 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,68 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4,4 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$6,05 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$6,39 \cdot 10^{-3}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$3,23 \cdot 10^{-2}$	S	$1,68 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$6,05 \cdot 10^{-4}$	 <table border="1" data-bbox="614 2004 997 2060"> <tr> <td>M</td> <td>$3,29 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$9,54 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,62 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,89 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$4 \cdot 10^{-4}$</td> <td>$8,98 \cdot 10^{-4}$</td> </tr> </table>	M	$3,29 \cdot 10^{-3}$	$9,54 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	S	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$8,98 \cdot 10^{-4}$	 <table border="1" data-bbox="1029 2004 1412 2060"> <tr> <td>M</td> <td>$6,3 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$1,82 \cdot 10^{-2}$</td> <td>$2,94 \cdot 10^{-2}$</td> </tr> <tr> <td>S</td> <td>$1,39 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$3,89 \cdot 10^{-3}$</td> <td>$4,87 \cdot 10^{-3}$</td> </tr> </table>	M	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$	$2,94 \cdot 10^{-2}$	S	$1,39 \cdot 10^{-3}$	$3,89 \cdot 10^{-3}$	$4,87 \cdot 10^{-3}$
M	$6,39 \cdot 10^{-3}$	$1,93 \cdot 10^{-2}$	$3,23 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,68 \cdot 10^{-4}$	$4,4 \cdot 10^{-4}$	$6,05 \cdot 10^{-4}$																							
M	$3,29 \cdot 10^{-3}$	$9,54 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,89 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$8,98 \cdot 10^{-4}$																							
M	$6,3 \cdot 10^{-3}$	$1,82 \cdot 10^{-2}$	$2,94 \cdot 10^{-2}$																							
S	$1,39 \cdot 10^{-3}$	$3,89 \cdot 10^{-3}$	$4,87 \cdot 10^{-3}$																							



Рис. 6. Изменение Δ_y в зависимости от Δ_x (а) и Δ_Λ (б), определенное в серии экспериментов № 6; прямыми линиями ограничены диапазоны полученных результатов; при уменьшении норм отклонений воздействий и параметров оператора убывает и норма отклонения отклика от полученного в базовом расчете

Из полученных результатов следует основной, с точки зрения анализа устойчивости базовых решений, вывод: при малых возмущениях наблюдаются малые отклонения решений, что согласно критерию [28] свидетельствует об устойчивости модели. При уменьшении диапазона возмущения параметров (в среднем) уменьшаются значения всех относительных норм — воздействий, оператора и отклика, или, говоря иначе, при уменьшении нормы отклонений воздействий и уменьшении нормы возмущения оператора уменьшается и норма отклонений отклика, что свидетельствует об устойчивости КМ по отношению к рассмотренным возмущениям.

Отметим, что для отдельных кристаллитов мезонапряжения (ВП в КМ, согласно принятой структуре) отклонения могут превосходить средние по представительному объему значения и нарастать со временем в процессе нагружения (см. Рис. 5). Это связано с порожденным возмущением иным перемещением ИТН по поверхности текучести; поверхность при этом еще и иначе трансформируется в результате анизотропного упрочнения. Однако при этом наблюдаются отклонения макро напряжений, значительно меньшие из-за осреднения по большому числу кристаллитов (Рис. 4б).

Нельзя не обратить внимания на эффекты, обусловленные структурой КМ и видом приложенных кинематических воздействий. Имеющееся в таблице 2 отличие относительной нормы отклонения средних критических напряжений в экспериментах 2-го и 3-го типов связано с их обозначенным выше изменением за счет возмущений воздействий: ИТН передвигаются по поверхности текучести, для реализации квазиосадки необходимо перемещение ИТН между вершинами высокого порядка поверхности текучести (с выполнением критерия Шмида на 6 или 8 системах скольжения [64, 65]); при этом, после перехода ИТН в соседнюю вершину, для возврата ее в исходную точку требуются значительные возмущения, в силу чего, при заданном уровне возмущений, возврат осуществляется редко. Этим же эффектом объясняется уменьшение дисперсии отклонения отклика и разделение при некоторых значениях δ распределения точек на кластеры в экспериментах 2-го и 3-го типов. При сдвиге же стремление ИТН в вершины высокого порядка не является обязательным (в частности, при определенной ориентации кристаллита сдвиг может быть реализован движением дислокаций только в одной активной системе скольжения, например, когда ИТН находится на грани поверхности текучести); в этой ситуации при относительно малых возмущениях ИТН может легко перейти на ребра и/или в вершины поверхности текучести и осуществить возврат к предыдущим положениям. Поэтому в таблице 2 наблюдается отсутствие значимых отличий отклонения средних критических напряжений в экспериментах 5-го и 6-го типов.

ШАГ 6. Анализ неустойчивых решений (если они выявлены)

В проведенных сериях расчетов неустойчивость решений не выявлена. В значительной степени это объясняется равномерностью распределения ориентаций кристаллитов (начальные пластические свойства на макроуровне близки к изотропным), на условной поверхности текучести макроуровня отсутствуют выраженные ребра. В то же время из результатов, приведенных на рисунках таблицы 2, можно отметить наличие некоторых точек с существенно большими значениями относительных норм отклонений отклика по сравнению со средними, характерными для того же эксперимента. Это обусловлено тем, что при данной реализации возмущенных воздействий и оператора модели для большего числа кристаллитов наблюдалось существенное изменение отклика, связанное с изменением движения ИТН по поверхности текучести.

4. Заключение

В связи с тем, что свойства материала (в том числе на низших масштабных уровнях) и воздействия, продуцируемые граничными условиями, имеют стохастический характер, актуален анализ устойчивости решений (истории изменения откликов) по отношению к возмущениям входных данных и оператора, получаемых с использованием конститутивных моделей материалов.

Приведена иллюстрация применения предложенного в [28] подхода к исследованию устойчивости конститутивных моделей, включающего рассмотрение разнообразных возмущений начальных условий, истории воздействий, оператора и определение норм отклонения соответствующих решений от базовых.

Представленные для двухуровневой модели поликристаллического ГЦК-металла результаты подтверждают ее устойчивость, что свидетельствует о ее применимости для описания технологических процессов термомеханической обработки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 17-19-01292).

Литература

1. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity // *Int. J. Plast.* 2010. Vol. 26. P. 1280-1309. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008>
2. Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications // *Acta Materialia*. 2010. Vol. 58. P. 1152-1211. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.10.058>
3. Diehl M. Review and outlook: mechanical, thermodynamic, and kinetic continuum modeling of metallic materials at the grain scale // *MRS Communications*. 2017. Vol. 7. P. 735-746. <https://doi.org/10.1557/mrc.2017.98>
4. Beyerlein I., Knezevic M. Review of microstructure and micromechanism-based constitutive modeling of polycrystals with a low-symmetry crystal structure // *J. Mater. Res.* 2018. Vol. 33. P. 3711-3738. <https://doi.org/10.1557/jmr.2018.333>
5. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 605 с. <https://doi.org/10.15372/MULTILEVEL2019TPV>
6. Трусов П.В., Швейкин А.И., Кондратьев Н.С., Янц А.Ю. Многоуровневые модели в физической мезомеханике металлов и сплавов: результаты и перспективы // *Физ. мезомех.* 2020. Т. 23, № 6. С. 33-62. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16003>
7. Трусов П.В. Классические и многоуровневые конститутивные модели для описания поведения металлов и сплавов: проблемы и перспективы (в порядке обсуждения) // *Изв. РАН. МТТ.* 2021. № 1. С. 69-82. <https://doi.org/10.31857/S0572329921010128>
8. Трудделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
9. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики не-newтоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.
10. Guo Y.B., Wen Q., Horstemeyer M.F. An internal state variable plasticity-based approach to determine dynamic loading history effects on material property in manufacturing processes // *Int. J. Mech. Sci.* 2005. Vol. 47. P. 1423-1441. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.04.015>
11. Maugin G.A. The saga of internal variables of state in continuum thermos-mechanics (1893-2013) // *Mech. Res. Comm.* 2015. Vol. 69. P. 79-86. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.06.009>
12. Rice J.R. Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity // *J. Mech. Phys. Solid.* 1971. Vol. 19. P. 433-455. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(71\)90010-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(71)90010-X)
13. Mandel J. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques // *Int. J. Solid. Struct.* 1973. Vol. 9. P. 725-740. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90120-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90120-0)
14. Aravas N. Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals // *Int. J. Solids Struct.* 1992. Vol. 29. P. 2137-2157. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90062-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90062-X)
15. Aravas N. Finite-strain anisotropic plasticity and the plastic spin // *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 1994. Vol. 2. P. 483-504. <https://doi.org/10.1088/0965-0393/2/3A/005>
16. Dafalias Y.F. On multiple spins and texture development. Case study: kinematic and orthotropic hardening // *Acta Mechanica*. 1993. Vol. 100. P. 171-194. <https://doi.org/10.1007/BF01174788>
17. Введение в математическое моделирование / Под ред. П.В. Трусова. М.: Логос, 2007. 440 с.
18. Соболев И.М. Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // *Матем. моделирование.* 1990. Т. 2, № 1. С. 112-118.
19. Archer G.E.B., Saltelli A., Sobol I.M. Sensitivity measures, ANOVA-like techniques and the use of bootstrap // *J. Stat. Comput. Simulat.* 1997. Vol. 58. P. 99-120. <https://doi.org/10.1080/00949659708811825>
20. Saltelli A., Tarantola S., Chan K.P.-S. A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output // *Technometrics*. 1999. Vol. 41. P. 39-56. <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485594>
21. Соболев И.М. Глобальные показатели чувствительности для изучения нелинейных математических моделей // *Матем. моделирование.* 2005. Т. 17, № 9. С. 43-52.
22. Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. Global sensitivity analysis. The Primer. John Wiley & Sons Ltd., 2008. 292 p.
23. Yang Z., Elgamal A. Application of unconstrained optimization and sensitivity analysis to calibration of a soil constitutive model // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2003. Vol. 27. P. 1277-1297. <https://doi.org/10.1002/nag.320>
24. Qu J., Xu B., Jin Q. Parameter identification method of large macro-micro coupled constitutive models based on identifiability analysis // *CMC*. 2010. Vol. 20. P. 119-157. <https://doi.org/10.3970/cmc.2010.020.119>
25. Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A. Parameter identification in elasto-plasticity: distance between parameters and impact of measurement errors // *ZAMM*. 2019. Vol. 99. e201800340. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800340>
26. Kotha S., Ozturk D., Ghosh S. Parametrically homogenized constitutive models (PHCMs) from micromechanical crystal plasticity FE simulations, part I: Sensitivity analysis and parameter identification for titanium alloys // *Int. J. Plast.* 2019. Vol. 120. P. 296-319. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.05.008>
27. Швейкин А.И., Шарифуллина Э.Р., Трусов П.В., Пушков Д.А. Об оценке чувствительности статистических многоуровневых моделей поликристаллических металлов к возмущениям параметров // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2018. Т. 11, № 2. С. 214-231. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.2.17>
28. Швейкин А.И., Трусов П.В., Романов К.А. Об одном подходе к численной оценке устойчивости многоуровневых конститутивных моделей материалов // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2021. Т. 14, №1. С. 61-76. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.6>

29. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 470 с.
30. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
31. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
32. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
33. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion // *Int. J. Contr.* 1992. Vol. 55. P. 531-534. <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>
34. Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St. Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method // *International Journal of Computers, Communications & Control.* 2009. Vol. 4. P. 415-426. <https://doi.org/10.15837/ijccc.2009.4.2457>
35. Li Y., Chen Y.Q., Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability // *Comput. Math. Appl.* 2010. Vol. 59. P. 1810-1821. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.019>
36. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2014. Vol. 19. P. 2951-2957. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.022>
37. Георгиевский Д.В., Квачёв К.В. Метод Ляпунова–Мовчана в задачах устойчивости течений и процессов деформирования // *ПММ.* 2014. Т. 78, № 6. С. 862-885. (English version <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.04.010>)
38. Habraken A.M. Modelling the plastic anisotropy of metals // *Arch. Computat. Methods Eng.* 2004. Vol. 11. P. 3-96. <https://doi.org/10.1007/BF02736210>
39. Van Houtte P. Crystal plasticity based modelling of deformation textures // *Microstructure and Texture in Steels* / Ed. A. Haldar, S. Suwas, D. Bhattacharjee. Springer, 2009. P. 209-224. https://doi.org/10.1007/978-1-84882-454-6_12
40. Zhang K., Holmedal B., Hopperstad O.S., Dumoulin S., Gawad J., Van Bael A., Van Houtte P. Multi-level modelling of mechanical anisotropy of commercial pure aluminium plate: Crystal plasticity models, advanced yield functions and parameter identification // *Int. J. Plast.* 2015. Vol. 66. P. 3-30. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.02.003>
41. Lebensohn R.A., Ponte Castañeda P., Brenner R., Castelnau O. Full-field vs. homogenization methods to predict microstructure-property relations for polycrystalline materials // *Computational Methods for Microstructure-Property Relationships* / Ed. S. Ghosh, D. Dimiduk. Springer, 2011. P. 393-441. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0643-4_11
42. Трусов П.В., Швейкин А.И., Нечаева Е.С., Волегов П.С. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры // *Физ. мезомех.* 2012. Т. 15, № 1. С. 33-56. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2012-00007>
43. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
44. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев: Наукова думка, 1987. 232 с.
45. Кондауров В.И., Никитин Л.В. Теоретические основы реологии геоматериалов. М.: Наука, 1990. 207 с.
46. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 262 с.
47. Роговой А.А. Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Ч. 1. Основные соотношения механики сплошных сред. М.: Изд-во ИКИ, 2021. 288 с.
48. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 319 с.
49. Бровко Г.Л. Определяющие соотношения механики сплошной среды: развитие математического аппарата и основ общей теории. М.: Наука, 2017. 432 с.
50. Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю. О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // *Физ. мезомех.* 2016. Т. 19, № 2. С. 47-65. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959917040014>)
51. Трусов П.В., Швейкин А.И. О разложении движения и определяющих соотношениях в геометрически нелинейной упруговязкопластичности кристаллитов // *Физ. мезомех.* 2016. Т. 19, № 3. С. 25-38. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959917040026>)
52. Trusov P.V., Shveykin A.I., Kondratiev N.S. Multilevel metal models: formulation for large displacements gradients // *Nanoscience and Technology: An International Journal.* 2017. Vol. 8. P. 133-166. <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.v8.i2.40>
53. Anand L. Single-crystal elasto-viscoplasticity: application to texture evolution in polycrystalline metals at large strains // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2004. Vol. 93. P. 5359-5383. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.068>
54. Трусов П.В., Шарифуллина Э.Р., Швейкин А.И. Многоуровневая модель для описания пластического и сверхпластического деформирования поликристаллических материалов // *Физ. мезомех.* 2019. Т. 22, № 2. С. 5-23. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-12001>
55. Shveykin A., Trusov P., Sharifullina E. Statistical crystal plasticity model advanced for grain boundary sliding description // *Crystals.* 2020. Vol. 10(9). 822. <https://doi.org/10.3390/cryst10090822>
56. Estrin Y., Tóth L.S., Molinari A., Bréchet Y. A dislocation-based model for all hardening stages in large strain deformation // *Acta Mater.* 1998. Vol. 46. P. 5509-5522. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00196-7](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00196-7)
57. Staroselsky A., Anand L. Inelastic deformation of polycrystalline face centered cubic materials by slip and twinning // *J. Mech. Phys. Solid.* 1998. Vol. 46. P. 671-696. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(97\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00071-9)
58. Kalidindi S.R. Modeling anisotropic strain hardening and deformation textures in low stacking fault energy fcc metals // *Int. J. Plast.* 2001. Vol. 17. P. 837-860. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(00\)00071-1](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(00)00071-1)
59. Beyerlein I.J., Tome C.N. A dislocation-based constitutive law for pure Zr including temperature effects // *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. P. 867-895. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.017>
60. Bronkhorst C.A., Kalidindi S.R., Anand L. Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in FCC metals // *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.* 1992. Vol. 341. P. 443-477. <https://doi.org/10.1098/rsta.1992.0111>
61. Harder J. FEM-simulation of the hardening behavior of FCC single crystals // *Acta Mechanica.* 2001. Vol. 150. P. 197-217. <https://doi.org/10.1007/BF01181812>

62. Швейкин А.И., Шарифуллина Э.Р. Анализ конститутивных соотношений для описания внутризеренного дислокационного скольжения в рамках двухуровневой упруговязкопластической модели ГЦК-поликристаллов // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, № 4-2. С. 1665-1666.
63. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
64. Rocks U.F., Canova G.R., Jonas J.J. Yield vectors in f.c.c. crystals // Acta metall. 1983. Vol. 31. P. 1243-1252. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(83\)90186-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(83)90186-4)
65. Kuhlman-Wilsdorf D., Kulkarni S.S., Moore J.T., Starke E.A. (Jr.) Deformation bands, the LEDS theory, and their importance in texture development: Part I. Previous evidence and new observations // Metall. Mater. Trans. A. 1999. Vol. 30. P. 2491-2501. <https://doi.org/10.1007/s11661-999-0258-7>

References

- McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity. *Int. J. Plast.*, 2010, vol. 26, pp. 1280-1309. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008>
- Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications. *Acta Materialia*, 2010, vol. 58, pp. 1152-1211. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.10.058>
- Diehl M. Review and outlook: mechanical, thermodynamic, and kinetic continuum modeling of metallic materials at the grain scale. *MRS Communications*, 2017, vol. 7, pp. 735-746. <https://doi.org/10.1557/mrc.2017.98>
- Beyerlein I., Knezevic M. Review of microstructure and micromechanism-based constitutive modeling of polycrystals with a low-symmetry crystal structure. *J. Mater. Res.*, 2018, vol. 33, pp. 3711-3738. <https://doi.org/10.1557/jmr.2018.333>
- Trusov P.V., Shveykin A.I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskih materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multilevel models of mono- and polycrystalline materials: theory, algorithms, examples of application]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2019. 605 p. <https://doi.org/10.15372/MULTILEVEL2019TPV>
- Trusov P.V., Shveykin A.I., Kondratyev N.S., Yants A.Yu. Multilevel models in physical mesomechanics of metals and alloys: results and prospects. *Phys. Mesomech.*, 2020, vol. 23, no. 6, pp. 33-62. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16003>
- Trusov P.V. Classical and multi-level constitutive models for describing the behavior of metals and alloys: Problems and Prospects (as a matter for discussion). *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, pp. 55-64. <https://doi.org/10.3103/S002565442101012X>
- Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics*. USA, Maryland, Baltimore, The Johns Hopkins University, 1972. 304 p.
- Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*. McGraw-Hill, 1974. 296 p.
- Guo Y.B., Wen Q., Horstemeyer M.F. An internal state variable plasticity-based approach to determine dynamic loading history effects on material property in manufacturing processes. *Int. J. Mech. Sci.*, 2005, vol. 47, pp. 1423-1441. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.04.015>
- Maugin G.A. The saga of internal variables of state in continuum thermomechanics (1893-2013). *Mech. Res. Comm.*, 2015, vol. 69, pp. 79-86. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.06.009>
- Rice J.R. Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1971, vol. 19, pp. 433-455. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(71\)90010-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(71)90010-X)
- Mandel J. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques. *Int. J. Solid. Struct.*, 1973, vol. 9, pp. 725-740. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(73\)90120-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90120-0)
- Aravas N. Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals. *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, pp. 2137-2157. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(92\)90062-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90062-X)
- Aravas N. Finite-strain anisotropic plasticity and the plastic spin. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 1994, vol. 2, pp. 483-504. <https://doi.org/10.1088/0965-0393/2/3A/005>
- Dafalias Y.F. On multiple spins and texture development. Case study: kinematic and orthotropic hardening. *Acta Mechanica*, 1993, vol. 100, pp. 171-194. <https://doi.org/10.1007/BF01174788>
- Trusov P.V. (ed.) *Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye* [Introduction to mathematical modeling]. Moscow, Logos, 2007. 440 p.
- Sobol' I.M. Ob otsenke chuvstvitel'nosti nelineynykh matematicheskikh modeley [On the estimation of the sensitivity of nonlinear mathematical models]. *Matem. modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 1990, vol. 2, no. 1, pp. 112-118.
- Archer G.E.B., Saltelli A., Sobol I.M. Sensitivity measures, ANOVA-like techniques and the use of bootstrap. *J. Stat. Comput. Simulat.*, 1997, vol. 58, pp. 99-120. <https://doi.org/10.1080/00949659708811825>
- Saltelli A., Tarantola S., Chan K.P.-S. A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, 1999, vol. 41, pp. 39-56. <https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485594>
- Sobol I.M. Global sensitivity indices for the investigation of nonlinear mathematical models. *Matem. modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2005, vol. 17, no. 9, pp. 43-52.
- Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. *Global sensitivity analysis. The Primer*. John Wiley & Sons Ltd., 2008. 292 p.
- Yang Z., Elgamal A. Application of unconstrained optimization and sensitivity analysis to calibration of a soil constitutive model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2003, vol. 27, pp. 1277-1297. <https://doi.org/10.1002/nag.320>
- Qu J., Xu B., Jin Q. Parameter identification method of large macro-micro coupled constitutive models based on identifiability analysis. *CMC*, 2010, vol. 20, pp. 119-157. <https://doi.org/10.3970/cmc.2010.020.119>
- Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A. Parameter identification in elasto-plasticity: distance between parameters and impact of measurement errors. *ZAMM*, 2019, vol. 99, e201800340. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800340>
- Kotha S., Ozturk D., Ghosh S. Parametrically homogenized constitutive models (PHCMs) from micromechanical crystal plasticity FE simulations, part I: Sensitivity analysis and parameter identification for titanium alloys. *Int. J. Plast.*, 2019, vol. 120, pp. 296-319. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.05.008>

27. Shveykin A.I., Sharifullina E.R., Trusov P.V., Pushkov D.A. About estimation of sensitivity of statistical multilevel polycrystalline metal models to parameter variations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 214-231. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.2.17>
28. Shveykin A.I., Trusov P.V., Romanov K.A. An approach to numerical estimating the stability of multilevel constitutive models. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, no. 1, pp. 61-76. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.6>
29. Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [General problem of motion stability]. Moscow, Leningrad, Gosudarstvennoye izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. 470 p.
30. Barbashin E.A. *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti* [Introduction to the theory of stability]. Moscow, Nauka, 1967. 223 p.
31. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka, 1967. 472 p.
32. Berge P., Pomeau Y., Vidal C. *L'ordre dans le chaos. Vers une approche deterministe de la turbulence* [Order in chaos. On a deterministic approach to turbulence]. Hermann, Editeurs des sciences et des arts, 1988. 353 p.
33. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *Int. J. Contr.*, 1992, vol. 55, pp. 531-534. <https://doi.org/10.1080/00207179208934253>
34. Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St. Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method. *International Journal of Computers, Communications & Control*, 2009, vol. 4, pp. 415-426. <https://doi.org/10.15837/ijccc.2009.4.2457>
35. Li Y., Chen Y.Q., Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag-Leffler stability. *Comput. Math. Appl.*, 2010, vol. 59, pp. 1810-1821. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.019>
36. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2014, vol. 19, pp. 2951-2957. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.022>
37. Georgievskii D.V., Kvachev K.V. The Lyapunov–Movchan method in problems of the stability of flows and deformation processes. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, pp. 621-633. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.04.010>
38. Habraken A.M. Modelling the plastic anisotropy of metals. *Arch. Computat. Methods Eng.*, 2004, vol. 11, pp. 3-96. <https://doi.org/10.1007/BF02736210>
39. Van Houtte P. Crystal plasticity based modelling of deformation textures. *Microstructure and Texture in Steels*, ed. A. Haldar, S. Suwas, D. Bhattacharjee. Springer, 2009. P. 209-224. https://doi.org/10.1007/978-1-84882-454-6_12
40. Zhang K., Holmedal B., Hopperstad O.S., Dumoulin S., Gawad J., Van Bael A., Van Houtte P. Multi-level modelling of mechanical anisotropy of commercial pure aluminium plate: Crystal plasticity models, advanced yield functions and parameter identification. *Int. J. Plast.*, 2015, vol. 66, pp. 3-30. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2014.02.003>
41. Lebensohn R.A., Ponte Castañeda P., Brenner R., Castelnau O. Full-field vs. homogenization methods to predict microstructure–property relations for polycrystalline materials. *Computational Methods for Microstructure-Property Relationships*, ed. S. Ghosh, D. Dimiduk. Springer, 2011. P. 393-441. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0643-4_11
42. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution. *Phys. Mesomech.*, 2012, vol. 15, pp. 155-175. <https://doi.org/10.1134/S1029959912020038>
43. Pozdeyev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shiye uprugoplasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications]. Moscow, Nauka, 1986. 232 p.
44. Levitas V.I. *Bol'shiye uprugoplasticheskiye deformatsii materialov pri vysokom davlenii* [Large elastoplastic deformations of materials at high pressure]. Kiev, Naukova dumka, 1987. 232 p.
45. Kondaurov V.I., Nikitin L.V. *Teoreticheskiye osnovy reologii geomaterialov* [Theoretical foundations of geomaterial rheology]. Moscow, Nauka, 1990. 207 p.
46. Korobeynikov S.N. *Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel* [Nonlinear deformation of solids]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2000. 262 p.
47. Rogovoy A.A. *Formalizovanny podkhod k postroyeniyu modeley mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela. Ch. 1. Osnovnyye sootnosheniya mekhaniki sploshnykh sred* [A formalized approach to the construction of models of solid mechanics. Part 1. Basic relations of continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo IKI, 2021. 288 p.
48. Markin A.A., Sokolova M.Yu. *Termomekhanika uprugoplasticheskogo deformirovaniya* [Thermomechanics of elastoplastic deformation]. Moscow, Fizmatlit, 2013. 319 p.
49. Brovko G.L. *Opredelyayushchiye sootnosheniya mekhaniki sploshnoy sredy: razvitiye matematicheskogo apparata i osnov obshchey teorii* [Constitutive relations of continuum mechanics: Development of the mathematical apparatus and foundations of the general theory]. Moscow, Nauka, 2017. 432 p.
50. Trusov P.V., Shveykin A.I., Yanz A.Yu. Motion decomposition, frame-indifferent derivatives, and constitutive relations at large displacement gradients from the viewpoint of multilevel modeling. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 357-376. <https://doi.org/10.1134/S1029959917040014>
51. Trusov P.V., Shveykin A.I. On motion decomposition and constitutive relations in geometrically nonlinear elastoviscoplasticity of crystallites. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 377-391. <https://doi.org/10.1134/S1029959917040026>
52. Trusov P.V., Shveykin A.I., Kondratev N.S. Multilevel metal models: formulation for large displacements gradients. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2017, vol. 8, pp. 133-166. <https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.v8.i2.40>
53. Anand L. Single-crystal elasto-viscoplasticity: application to texture evolution in polycrystalline metals at large strains. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2004, vol. 93, pp. 5359-5383. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.068>
54. Trusov P.V., Sharifullina E.R., Shveykin A.I. Multilevel model for the description of plastic and superplastic deformation of polycrystalline materials. *Phys. Mesomech.*, 2019, vol. 22, pp. 402-419. <https://doi.org/10.1134/S1029959919050072>
55. Shveykin A., Trusov P., Sharifullina E. Statistical crystal plasticity model advanced for grain boundary sliding description. *Crystals*, 2020, vol. 10(9), 822. <https://doi.org/10.3390/cryst10090822>

56. Estrin Y., Tóth L.S., Molinari A., Bréchet Y. A dislocation-based model for all hardening stages in large strain deformation. *Acta Mater.*, 1998, vol. 46, pp. 5509-5522. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(98\)00196-7](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(98)00196-7)
57. Staroselsky A., Anand L. Inelastic deformation of polycrystalline face centered cubic materials by slip and twinning. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1998, vol. 46, pp. 671-696. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(97\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(97)00071-9)
58. Kalidindi S.R. Modeling anisotropic strain hardening and deformation textures in low stacking fault energy fcc metals. *Int. J. Plast.*, 2001, vol. 17, pp. 837-860. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(00\)00071-1](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(00)00071-1)
59. Beyerlein I.J., Tome C.N. A dislocation-based constitutive law for pure Zr including temperature effects. *Int. J. Plast.*, 2008, vol. 24, pp. 867-895. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.017>
60. Bronkhorst C.A., Kalidindi S.R., Anand L. Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in FCC metals. *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1992, vol. 341, pp. 443-477. <https://doi.org/10.1098/rsta.1992.0111>
61. Harder J. FEM-simulation of the hardening behavior of FCC single crystals. *Acta Mechanica*, 2001, vol. 150, pp. 197-217. <https://doi.org/10.1007/BF01181812>
62. Shveikin A.I., Sharifullina E.R. Analysis of constitutive relations for intragranular dislocation sliding description within two-level elasto-viscoplastic model of FCC-polycrystals. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya Estestvennyye i tekhnicheskiye nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2013, vol. 18, no. 4-2, pp. 1665-1666.
63. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980. 495 p.
64. Rocks U.F., Canova G.R., Jonas J.J. Yield vectors in f.c.c. crystals. *Acta metall.*, 1983, vol. 31, pp. 1243-1252. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(83\)90186-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(83)90186-4)
65. Kuhlman-Wilsdorf D., Kulkarni S.S., Moore J.T., Starke E.A. (Jr.) Deformation bands, the LEDS theory, and their importance in texture development: Part I. Previous evidence and new observations. *Metall. Mater. Trans. A*, 1999, vol. 30, pp. 2491-2501. <https://doi.org/10.1007/s11661-999-0258-7>

Поступила в редакцию 28.03.2021; после доработки 14.04.2021; принята к опубликованию 14.04.2021

Сведения об авторах

Швейкин Алексей Игоревич, дфмн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, д. 29; e-mail: shveykin@pstu.ru

Трусов Петр Валентинович, дфмн, проф., зав. каф., ПНИПУ; e-mail: trpv@matmod.pstu.ac.ru

Романов Кирилл Андреевич, студ., ПНИПУ; e-mail: k.a.kriv@mail.ru