

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.1.9](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.9)

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛИ 45 ПО ТРАЕКТОРИЯМ ТИПА СПИРАЛИ АРХИМЕДА

А.А. Алексеев

*Тверской государственный технический университет, Тверь, Российская Федерация*

Рассмотрено математическое моделирование процесса сложного упругопластического деформирования стали 45 по плоской траектории в векторном пространстве А.А. Ильюшина, содержащей участки как постоянной, так и переменной кривизны (спираль Архимеда). Использована приближенная математическая модель теории упругопластических процессов для плоских траекторий с аппроксимациями функционалов, которые зависят не от текущей кривизны траектории деформирования, а от начального значения кривизны. Основные уравнения математической модели приведены к задаче Коши, для численного решения которой применен метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Для оценки достоверности математической модели в приложении к данному классу криволинейных траекторий деформирования выполнено сравнение полученных результатов расчета с данными физического макроэксперимента, проведенного на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ в лаборатории механических испытаний Тверского государственного технического университета. Показано, что взятая приближенная математическая модель качественно и количественно хорошо описывает основные эффекты сложного пластического деформирования в рассматриваемом классе траекторий на участках малой и средней кривизны. При больших кривизнах для достижения более точных результатов в аппроксимациях функционалов пластичности необходим учет всех параметров сложного нагружения, в том числе текущей кривизны траектории деформирования.

*Ключевые слова:* пластичность, сложное нагружение, теория упругопластических процессов, математическая модель, траектория деформирования, спираль Архимеда, векторные и скалярные свойства материала

## MODELING OF ELASTOPLASTIC DEFORMATION OF STEEL 45 ALONG ARCHIMEDES SPIRAL TYPE TRAJECTORIES

A.A. Alekseev

*Tver State Technical University, Tver, Russian Federation*

This paper addresses the mathematical modeling of complex elastoplastic deformation of steel 45 along the plane trajectory in the Ilyushin's deviatoric space, which consists of sections of both constant and variable curvature (Archimedes spiral). The constitutive equations of the proposed mathematical model are based on the Ilyushin's vector representation of strain and stress. An approximate model of the theory of elastoplastic processes is used in mathematical modeling for plane trajectories with approximations of process functionals, which depend on the initial value of the curvature, rather than on the current curvature of the deformation trajectory. The constitutive equations of the mathematical model are reduced to the Cauchy problem, a numerical solution to which is obtained using the fourth order Runge–Kutta method. The validity of the mathematical model for this class of curvilinear strain trajectories was verified by comparing the calculation results with the experimental data obtained on the automated test machine SN-EVM in the mechanical testing laboratory of the Tver State Technical University. The experiment was carried out on thin-walled cylindrical specimens of steel 45 under complex loading (combined tension-compression and torsion). The calculation results and experimental data characterizing the scalar and vector properties of the material are presented graphically. It has been established that the proposed approximate mathematical model is able to capture (both qualitatively and quantitatively) the main effects of complex plastic deformation for the considered class of strain trajectories in the areas of small and medium curvature. More accurate calculation results in the approximations of the plasticity functionals can be obtained by taking into account all complex loading parameters, including the current curvature of the strain trajectory, especially for strain trajectories with large curvature.

*Key words:* plasticity, complex loading, Ilyushin's theory of elastoplastic processes, mathematical model, strain trajectory, Archimedes spiral, vector and scalar material properties

### 1. Введение

Проведение экспериментальных исследований и изучение выявленных при этом закономерностей упругопластического деформирования конструкционных материалов имеет важное значение для развития теории пластичности. На основе экспериментальных данных формулируются новые математические теории, а также оценивается их физическая достоверность и границы применимости. Результаты экспериментальных работ при сложном нагружении материалов и варианты математических теорий пластичности частично представлены в публикациях [1–18].

Значительный объем экспериментальных данных получен при деформировании материалов по плоским прямолинейным траекториям и криволинейным траекториям постоянной кривизны [3, 6, 7, 12, 15–18]. Для более полной верификации определяющих соотношений теории пластичности необходима постановка экспериментов с максимально широким диапазоном изменения кривизны траектории в пределах одного опыта. Таких экспериментов осуществлено значительно меньше. Здесь особый интерес представляют

криволинейные траектории деформирования типа спирали Архимеда [3, 6, 14], в которых в одном опыте наблюдаются различные кривизны — от малых до больших.

В данной статье рассмотрена математическая модель теории упругопластических процессов для траекторий деформирования с участками постоянной и переменной кривизны. Оценка ее достоверности проведена путем сопоставления результатов вычислений с экспериментальными данными [14], полученными на расчетно-экспериментальном комплексе СМ-ЭВМ для данного класса траекторий деформирования с участками, описываемыми аналитически спиралью Архимеда. Модельные и экспериментальные данные приводятся в векторном представлении деформаций и напряжений по А.А. Ильюшину [1–4].

Ранее варианты используемой математической модели применялись для численного описания процессов в рамках теории упругопластических процессов деформирования двузвенных и многозвенных ломаных прямолинейных траекторий [15, 16], а также траекторий, содержащих криволинейные участки постоянной кривизны [17, 18].

## 2. Определяющие соотношения

Введем в рассмотрение ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , где  $\delta_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$  — символ Кронекера ( $i, j = 1, 2, 3$ ). В этом базисе тензор напряжений Коши  $\mathbf{T}_\sigma$  и тензор малых деформаций  $\mathbf{T}_\varepsilon$ , которые характеризуют напряженно-деформированное состояние (НДС) тела в точке с координатами  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), принято раскладывать на шаровые тензоры и тензоры-девиаторы. В компонентном виде последние представляются так [1–3]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + \sigma S_{ij}^*, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + \mathcal{E} \mathcal{E}_{ij}^* \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Здесь, соответственно:  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ ,  $\sigma = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$ ,  $\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}}$  — модули шаровых тензоров (средние напряжение и деформация) и тензоры-девиаторы напряжений и деформаций;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$ ,  $\mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0$ ,  $S_{ij}^* = \frac{S_{ij}}{\sigma}$ ,  $\mathcal{E}_{ij}^* = \frac{\mathcal{E}_{ij}}{\mathcal{E}}$  — компоненты тензоров-девиаторов и направляющих тензоров напряжений и деформаций, ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

В случае простого, то есть пропорционального нагружения, компоненты направляющих тензоров напряжений и деформаций совпадают:  $S_{ij}^* = \mathcal{E}_{ij}^*$ . Тогда, с учетом упругой объемной деформации, определяющие соотношения (согласно теории малых упругопластических деформаций) примут вид [1–3]:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0, \quad S_{ij} = \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \mathcal{E}_{ij} = 2G_p \mathcal{E}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

где  $K$  — объемный модуль упругости,  $G_p$  — пластический модуль сдвига,  $\sigma = \Phi(\mathcal{E})$  — универсальная функция Роша и Эйхингера при простом нагружении, которая определяет скалярные свойства материалов для произвольного НДС. При реализации сложного нагружения компоненты направляющих тензоров напряжений и деформаций не совпадают:  $S_{ij}^* \neq \mathcal{E}_{ij}^*$ . Значит, учет в определяющих соотношениях только скалярных свойств материалов является недостаточным. Однако тензорное изложение теории пластичности не может геометрически наглядно отобразить векторные свойства материалов в трехмерном физическом пространстве [3].

А.А. Ильюшиным предложено [1, 2] векторное (геометрическое) представление процесса деформирования или нагружения, где в линейном совмещенном евклидовом пространстве  $E_6$  с ортонормированным неподвижным базисом  $\{\mathbf{i}_k\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) тензорам с компонентами  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  поставлены во взаимно однозначное линейное соответствие векторы напряжений и деформаций:

$$\mathbf{S} = S_0 \mathbf{i}_0 + \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{E}_0 \mathbf{i}_0 + \mathcal{E},$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = S_k \mathbf{i}_k$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_k \mathbf{i}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$  — векторы напряжений и деформаций формоизменения в 5-мерном девиаторном подпространстве  $E_5$ ). Правомерность такого представления подробно рассмотрена в [5].

Координаты векторов связаны с компонентами тензоров и девиаторов взаимно однозначными соотношениями [1–4]

$$S_0 = \sqrt{3}\sigma_0, \quad S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}, \quad S_2 = \frac{S_{22} - S_{33}}{\sqrt{2}}, \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12}, \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}, \quad S_5 = \sqrt{2}S_{13},$$

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{3}\varepsilon_0, \quad \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathcal{E}_{11}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_{22} - \mathcal{E}_{33}}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_3 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{12}, \quad \mathcal{E}_4 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{23}, \quad \mathcal{E}_5 = \sqrt{2}\mathcal{E}_{13}.$$

Модули векторов в 5-мерном подпространстве  $E_5$  равны модулям тензоров-девиаторов напряжений и деформаций соответственно:

$$|\sigma| = \sigma = \sqrt{S_k S_k} = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}, \quad |\mathcal{E}| = \mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_k \mathcal{E}_k} = \sqrt{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{ij}} \quad (k = 1, 2, \dots, 5), \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

В теории упругопластических процессов А.А.Ильюшина [1–4] история изменения напряжений и деформаций с течением времени представляется в виде образа деформирования или нагружения — траектории, к каждой точке которой приписываются переменные характеристики процесса (векторы напряжений, деформаций и их приращения) и скалярные параметры (температура, средние напряжение и деформация и другие) [1–4]. Общие определяющие соотношения теории пластичности [3, 4] отражают связь между векторами напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\mathcal{E}$  с учетом скалярных и векторных свойств материалов. Скалярные свойства задают связь между инвариантами тензоров-девиаторов напряжений и деформаций, а векторные свойства описывают несоосность тензоров-девиаторов напряжений, деформаций и их приращений. Для случая плоских траекторий деформирования с аналитическими криволинейными участками определяющие соотношения имеют вид [3, 4]:

$$\frac{d\sigma}{ds} = M_1 \frac{d\mathcal{E}}{ds} + \left( \frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos \vartheta_1 \right) \frac{\sigma}{\sigma}, \quad \frac{d\vartheta_1}{ds} + \kappa_1 = -\frac{M_1}{\sigma} \sin \vartheta_1. \quad (1)$$

Здесь:  $s$  — длина дуги траектории деформирования;  $\vartheta_1 = \vartheta_1(s, \kappa_1, \vartheta_1^0)$  — угол сближения, являющийся функционалом векторных свойств материала, определяющим в каждой точке траектории деформирования направление вектора  $\sigma$  и влияние векторных свойств материала на процесс деформирования;  $\vartheta_1^0$  — угол излома траектории в начальной точке ее аналитического участка;  $\kappa_1$  — кривизна траектории;  $\sigma = \sigma(s, \kappa_1, \vartheta_1^0)$  — функционал скалярных свойств материала;  $M_1, \frac{d\sigma}{ds}$  — функционалы процесса деформирования, зависящие от параметров сложного нагружения  $s, \kappa_1, \vartheta_1^0$ .

### 3. Математическая модель упругопластических процессов

К основным уравнениям математической модели в рамках теории упругопластических процессов деформирования относятся определяющие соотношения (1) и аппроксимации функционалов процессов [3]. Для плоских криволинейных траекторий с участками переменной кривизны типа спирали Архимеда в модели использованы следующие аппроксимации функционалов:

$$\sigma(s) = \Phi(s, \vartheta_1^0, \kappa_0) = \Phi(s) + A f_0^p \Omega - B_1 \kappa_0 e^{-\alpha_1 (s_{\max} - s)} - 2G_s \Delta s,$$

$$M_1 = 2G_p + (2G - 2G_p^0) f^q. \quad (2)$$

В выражениях (2) приняты обозначения:  $\Phi(s)$  — универсальная функция Одвишта–Ильюшина для процессов, близких к простому нагружению без учета их истории;  $\Delta s = s - s_k^T$  — приращение дуги траектории деформирования, где  $s_k^T$  — длина дуги в точке излома траектории или изменения ее кривизны (на стыке аналитических участков);  $s_{\max}$  — длина дуги для конечной точки траектории деформирования на участке спирали Архимеда;  $\kappa_0$  — значение кривизны траектории в начальной точке участка спирали Архимеда;  $G$  — модуль упругости второго рода (модуль сдвига);  $G_p^0$  — значение пластического модуля сдвига  $G_p$  в точке излома траектории;  $\Omega$  — функция сложного нагружения [3], описывающая скалярный

«нырок» напряжений при изломе траектории и обобщенный эффект Баушингера при возникающей сложной разгрузке и следующем за ней вторичном пластическом деформировании,

$$\Omega = -\left[ \gamma \Delta s e^{-\gamma \Delta s} + b(1 - e^{-\gamma \Delta s}) \right]; \quad (3)$$

$f = f(\vartheta_1) = \frac{1 - \cos \vartheta_1}{2}$ ;  $f$  — функция сложного нагружения [3], учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома траектории,  $f_0 = f(\vartheta_1^0) = \frac{1 - \cos \vartheta_1^0}{2}$ ;  $A, B_1, \alpha_1, b, \gamma, p, q$  — числовые параметры аппроксимаций.

Для аппроксимации универсальной функции упрочнения Одквиста–Ильюшина  $\Phi(s)$  при простом (пропорциональном) нагружении использовались выражения [3]

$$\sigma = \Phi(s) = \begin{cases} \frac{2G}{\alpha} (1 - e^{-\alpha s}), & 0 \leq s \leq s^T, \\ \sigma^T + 2G_*(s - s^T) + \sigma_* (1 - e^{-\beta(s - s^T)}), & s > s^T. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь:  $\sigma^T = \sqrt{2/3} \sigma_T$ ;  $\sigma_T$  — предел текучести при растяжении;  $s^T$  — граница на диаграмме деформирования, отделяющая ее упругую часть и площадку текучести ( $0 \leq s \leq s^T$ ) от участка упрочнения материала ( $s > s^T$ );  $\sigma_*$ ,  $G_*$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — константы материала, экспериментально определяемые при простом (пропорциональном) нагружении.

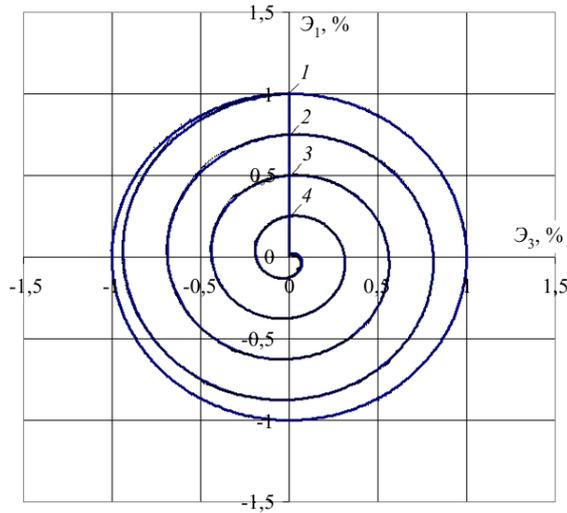
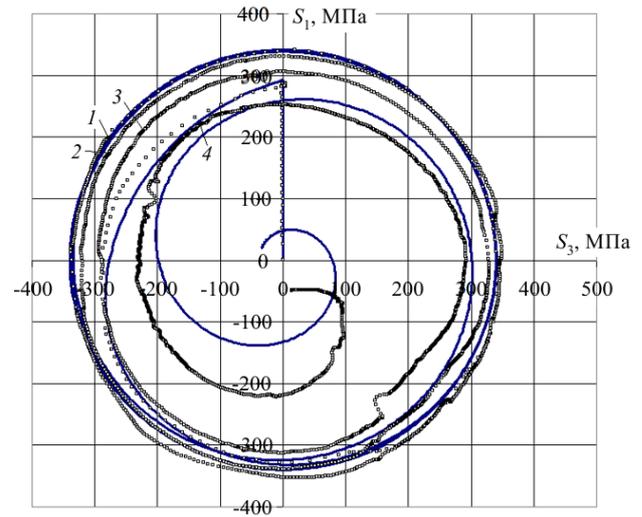
При заданных начальных условиях для компонент  $\mathcal{E}_k$  ( $k = 1, 3$ ) вектора деформаций  $\mathcal{E}$  и значении угла  $\vartheta_1^0$  основные уравнения модели приводятся к задаче Коши для каждого аналитического участка траектории деформирования. Заданными являются траектории вектора деформаций, а траектории вектора напряжений получаются в результате интегрирования определяющих соотношений (1). Для численного решения и нахождения компонент  $S_k$  ( $k = 1, 3$ ) вектора напряжений  $\sigma$  и величины угла сближения  $\vartheta_1$  используется метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности из пакета линейной алгебры MathWorks MATLAB.

#### 4. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными

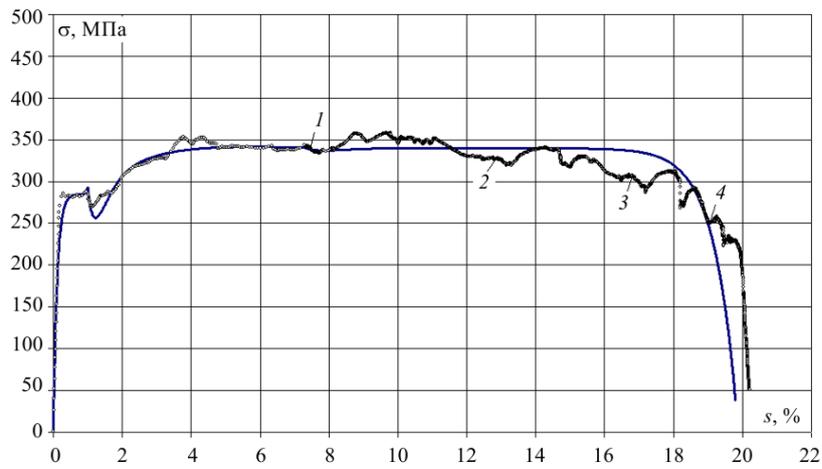
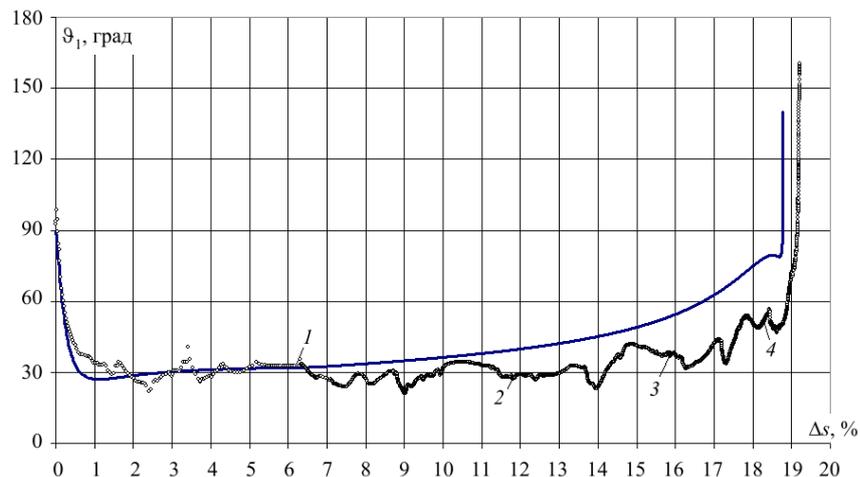
Экспериментальное исследование осуществлено на автоматизированном расчетно-экспериментальном комплексе СН-ЭВМ, реализующем трехпараметрическое воздействие на образец (осевое растяжение–сжатие, кручение и внутреннее давление). Автором совместно с В.И. Гульятеевым под руководством В.Г. Зубчанинова была проведена серия макроэкспериментов [14] в лаборатории механических испытаний ТвГТУ. Физические образцы в виде тонкостенных цилиндрических оболочек из стали 45 имели длину  $l = 110$  мм, толщину  $h = 1$  мм и диаметр срединной поверхности  $d = 31$  мм. Начальная изотропия материала образцов с достаточной степенью точности получила подтверждение в опытах при простом нагружении (при растяжении, сжатии и кручении). После обработки экспериментальных диаграмм были приняты следующие значения констант материала (стали 45) в аппроксимации (4):  $\sigma^T = 285$  МПа,  $s^T = 9 \cdot 10^{-3}$ ,  $2G = 1,577 \cdot 10^5$  МПа,  $\beta = 70$ ,  $\alpha = 900$ ,  $\sigma_* = 78,8$  МПа,  $2G_* = 1619$  МПа.

На рисунке 1 в девиаторном пространстве деформаций  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3$  (кинематическое нагружение) показана плоская траектория деформирования, которая отвечает процессу деформирования при сложном комбинированном воздействии на образец растяжения–сжатия и кручения.

На первом — прямолинейном, участке реализуется пропорциональное растяжение по компоненте  $\mathcal{E}_1$  до значения  $\mathcal{E}_1^* = 1\% = 0,01$ . На втором участке при изломе траектории на угол  $\vartheta_1^0 = 90^\circ$  имеет место траектория постоянной кривизны в виде полной центральной окружности радиуса  $R = \mathcal{E}_1^*$ . На третьем участке траектория плавно, без излома, переходит в скучивающуюся в начало координат спираль Архимеда и соответствует осуществляемому процессу сложной непропорциональной разгрузки [14]. Шаг спирали равен 0,0025. Кривизна траектории на участке окружности составляет  $\kappa_1 = 100 = \text{const}$ , на 1-м витке спирали изменяется в пределах  $\kappa_1 = 100 \div 133,3$ ; на 2-м —  $\kappa_1 = 133,3 \div 200$ ; на 3-м —  $\kappa_1 = 200 \div 400$  и на 4-м —  $\kappa_1 = 400 \div 5026$ . На рисунке 1 и последующих рисунках цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены экспериментальные точки начала соответствующих витков спирали.

Рис. 1. Траектория деформирования на плоскости  $\epsilon_1 - \epsilon_3$ Рис. 2. Отклик по напряжениям на плоскости  $S_1 - S_3$ 

На рисунке 2 приведен отклик на траекторию деформирования в плоскости  $S_1 - S_3$  девиаторного пространства напряжений, на рисунках 3, 4 представлены диаграммы  $\sigma - s$  и  $\Theta_1 - \Delta s$ , характеризующие скалярные и векторные свойства материала соответственно. Локальные диаграммы деформирования растяжения–сжатия в компонентах  $S_1 - \epsilon_1$  и чистого сдвига в компонентах  $S_3 - \epsilon_3$  содержат рисунки 5, 6. Опытные данные обозначены точками, а расчетные данные, полученные на основе выбранной приближенной модели, сплошной линией синего цвета.

Рис. 3. Диаграмма деформирования  $\sigma - s$ Рис. 4. Диаграмма  $\Theta_1 - \Delta s$ , характеризующая векторные свойства материала

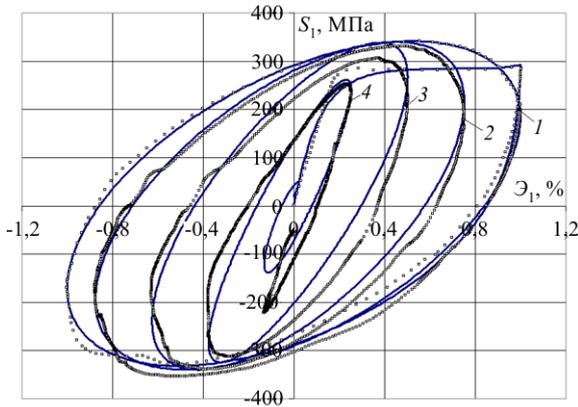


Рис. 5. Локальная диаграмма деформирования  $S_1 - \mathcal{E}_1$

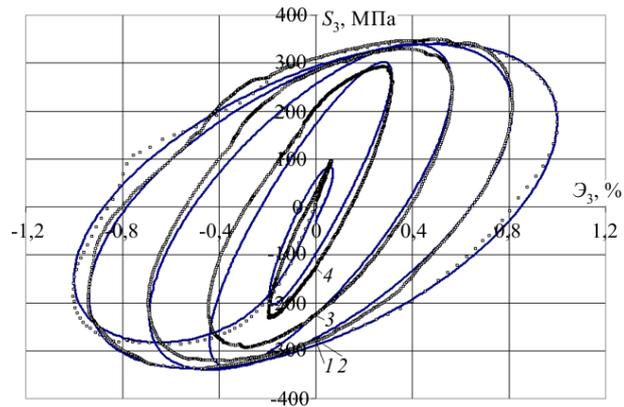


Рис. 6. Локальная диаграмма деформирования  $S_3 - \mathcal{E}_3$

На четырех витках спирали Архимеда модуль вектора напряжений  $\sigma$  плавно уменьшается, и здесь происходит сложная непропорциональная разгрузка [3, 14], а начиная с середины четвертого витка — практически упругая разгрузка материала (см. Рис. 4), которую качественно и удовлетворительно количественно описывает предложенная в работе аппроксимация (2). Расчетные и экспериментальные данные по углу сближения  $\mathcal{E}_1$  показывают, что с увеличением кривизны траектории его значение увеличивается, а участку практически упругой разгрузки материала соответствует значение  $\mathcal{E}_1 > 90^\circ$ . Для определения параметров аппроксимаций  $A, b, \gamma, p, q$  в формулах (2), (3) использовалась методика, описанная в [16]. Параметры  $B_1, \alpha_1$  находились путем подбора исходя из условия соответствия экспериментальным данным. В расчете принято:  $A = 370,2$  МПа,  $b = 0,125$ ,  $\gamma = 386,8$ ,  $B_1 = 2,9$  МПа,  $\alpha_1 = 150$ ,  $p = 1,8$ ,  $q = 0,3$ ,  $s_{\max} = 0,1978$ ,  $\kappa_0 = 100$ .

Предложенная математическая модель теории процессов для криволинейных траекторий является приближенной, поскольку в выражении (2) функционал  $\sigma(s)$  зависит не от текущей кривизны траектории  $\kappa_1$ , а от начального значения кривизны  $\kappa_0 = 100 = \text{const}$ . Как видно из рисунков, модель показывает хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных только при малых и средних кривизнах траектории деформирования (см. Рис. 2).

В конце последнего витка спирали Архимеда кривизна достигает очень больших значений:  $\kappa_1 = 400 \div 5026$ , поэтому здесь можно говорить только о качественном соответствии расчетных и экспериментальных данных. Очевидно, что для получения более точных результатов расчета в аппроксимациях функционалов пластичности необходим учет всех параметров сложного нагружения. Для плоских траекторий — это длина дуги траектории  $s$ , углы ее излома  $\mathcal{E}_1^0(s)$  и кривизна  $\kappa_1(s)$ .

## 5. Заключение

Проведенная верификация приближенной математической модели упругопластических процессов путем сопоставления результатов численных расчетов с опытными данными свидетельствует о правильности выбора модели сложного упругопластического деформирования стали для данного класса криволинейных траекторий деформирования с аналитическими участками типа спирали Архимеда. Наблюдается качественное и количественное совпадение экспериментальных данных и численных расчетов по математической модели для траекторий малой и средней кривизны.

Для уточнения результатов вычислений на основе приближенной модели необходим учет в ее функционалах всех основных параметров сложного нагружения (параметров внутренней геометрии траектории деформирования). Для плоских траекторий деформирования — это длина дуги траектории  $s$ , ее кривизна  $\kappa_1(s)$  и углы излома  $\mathcal{E}_1^0(s)$ . Неучет параметра кривизны  $\kappa_1$  в аппроксимациях функционалов может привести к расхождению расчетных и экспериментальных данных для траекторий большой кривизны.

## Литература

1. Ильющин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Ильющин А.А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
3. Зубчиных В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
4. Зубчиных В.Г. Устойчивость и пластичность. Т. 2. Пластичность. М.: Физматлит, 2008. 336 с.

5. Зубчанинов В.Г. Общая математическая теория пластичности и постулаты макроскопической определенности и изотропии А.А. Ильюшина // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2018. № 5. С. 29-46. (English version <https://doi.org/10.3103/S0027133018050011>)
6. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гараников В.В. Экспериментальная пластичность. Процессы сложного деформирования. Тверь: ТГТУ, 2003. 184 с.
7. Дегтярев В.П. Пластичность и ползучесть машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1967. 131 с.
8. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Сер. Механика деформируемого твердого тела. Т. 21. М., 1990. С. 3-75.
9. Пелешко В.А. Прикладной и инженерный варианты теории упругопластических процессов активного сложного нагружения. Часть 2: Идентификация и верификация // Изв. РАН. МТТ. 2016. № 1. С. 110-135. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654416010106>)
10. Волков И.А., Игумнов Л.А., Тарасов И.С., Шишулин Д.Н., Маркова М.Т. Моделирование сложного пластического деформирования поликристаллических конструкционных сплавов по плоским и пространственным траекториям произвольной кривизны // ППП. 2018. Т. 80, № 2. С. 194-208. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-2-194-208>
11. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А., Коротких Ю.Г., Панов В.А. Прикладная теория пластичности. М.: Физматлит, 2015. 282 с.
12. Аннин Б.Д., Жигалкин В.М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
13. Bondar V.S. Inelasticity. Variants of the theory. Begell House, 2013. 174 p.
14. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультаев В.И. Испытание стали 45 при упругопластическом деформировании по сложным траекториям постоянной и переменной кривизны // Деформация и разрушение материалов. 2016. № 9. С. 14-19.
15. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультаев В.И., Алексеева Е.Г. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятывенной кусочно-ломаной траектории деформирования // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32-44. <https://doi.org/10.17223/19988621/61/4>
16. Зубчанинов В.Г., Алексеев А.А., Гультаев В.И. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям // Вестник ПНИПУ. Механика. 2017. № 3. С. 203-215. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.12>
17. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally // Materials Physics and Mechanics. 2019. Vol. 42. P. 528-534. [https://doi.org/10.18720/MPM.4252019\\_6](https://doi.org/10.18720/MPM.4252019_6)
18. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 32. P. 298-304. [https://doi.org/10.18720/MPM.3232017\\_10](https://doi.org/10.18720/MPM.3232017_10)

## References

1. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchey matematicheskoy teorii* [Plasticity. Bases of the general mathematical theory] Moscow, Izd-vo AN SSSR, 1963. 271 p.
2. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo MGU, 1990. 310 p.
3. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics of processes in plastic environments]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 352 p.
4. Zubchaninov V.G. *Ustoychivost' i plastichnost'. T.2. Plastichnost'* [Stability and plasticity. Vol. 2. Plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 336 p.
5. Zubchaninov V.G. The general mathematical theory of plasticity and the Il'yushin postulates of macroscopic definability and isotropy. *Moscow Univ. Mech. Bull.*, 2018, vol. 73, pp 101-116. <https://doi.org/10.3103/S0027133018050011>
6. Zubchaninov V.G., Okhlopkov N.L., Garaniakov V.V. *Eksperimental'naya plastichnost'. Protsessy slozhnogo deformirovaniya* [Experimental plasticity. Complex deformation processes]. Tver: TGTU, 2003. 184 p.
7. Degtyarev V.P. *Plastichnost' i polzuchest' mashinostroitel'nykh konstruksiy* [Plasticity and creep of engineering constructions]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1967. 131 p.
8. Vasin R.A. *Opredelyayushchiye sootnosheniya teorii plastichnosti* [Constitutive relations of the theory of plasticity] // Itoги nauki i tekhniki. VINITI. Ser. Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela [Results of Science and Technology. VINITI. Ser. Deformable Solid Mechanics]. Vol. 21. Moscow, 1990. Pp. 3-75.
9. Peleshko V.A. Applied and engineering versions of the theory of elastoplastic processes of active complex loading. Part 2: Identification and verification. *Mech. Solids*, 2016, vol. 51, pp. 91-113. <https://doi.org/10.3103/S0025654416010106>
10. Volkov I.A., Igumnov L.A., Tarasov I.S., Shishulin D.N., Markova M.T. Modeling complex plastic deformation of polycrystalline structural alloys along plane and spatial trajectories of arbitrary curvature. *PPP – Problems of Strength and Plasticity*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 194-208. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2018-80-2-194-208>
11. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A., Korotkikh Yu.G., Panov V.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied theory of plasticity]. Moscow, Fizmatlit, 2015. 282 p.
12. Annin B.D., Zhigalkin V.M. *Povedeniye materialov v usloviyakh slozhnogo nagruzheniya* [Material behavior under conditions of complex loading]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 1999. 342 p.
13. Bondar V.S. *Inelasticity. Variants of the theory*. Begell House, 2013. 174 p.
14. Zubchaninov V.G., Alekseyev A.A., Gultyayev V.I. 45 steel test under elastoplastic deformation on complex trajectories of fixed and variable curvatures. *Deformatsiya i razrusheniye materialov*, 2016, no. 9, pp. 14-19.
15. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. The processes of complex loading structural steel for a five-link piecewise broken strain path. *Vestn. Tom. gos. un-ta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2019, vol. 61, pp. 32-44. <https://doi.org/10.17223/19988621/61/4>

16. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I. Modeling of elastic-plastic deformation of work material along multielement piecewise zig-zag linear trajectories. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2017, no. 3, pp. 203-215. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.12>
17. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Gultiaev V.I., Alekseeva E.G. Modeling of elastoplastic deformation of structural steel by a trajectory containing three circles touching internally. *Materials Physics and Mechanics*, 2019, vol. 42, pp. 528-534. [https://doi.org/10.18720/MPM.4252019\\_6](https://doi.org/10.18720/MPM.4252019_6)
18. Zubchaninov V.G., Alekseev A.A., Alekseeva E.G., Gultiaev V.I. Experimental verification of postulate of isotropy and mathematical modeling of elastoplastic deformation processes following the complex angled nonanalytic trajectories. *Materials Physics and Mechanics*, 2017, vol. 32, pp. 298-304. [https://doi.org/10.18720/MPM.3232017\\_10](https://doi.org/10.18720/MPM.3232017_10)

*Поступила в редакцию 09.04.2021; после доработки 26.04.2021; принята к опубликованию 26.04.2021*