DOI:10.7242/1999-6691/2021.14.1.6
УДК 539.52

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКЕ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОУРОВНЕВЫХ КОНСТИТУТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ МАТЕРИАЛОВ

А.И. Швейкин, П.В. Трусов, К.А. Романов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Для исследования и совершенствования методов обработки металлов и изделий давлением целесообразно применять многоуровневые конститутивные модели материалов, позволяющие явным образом описывать механизмы неупругого деформирования, а также перестройку структуры материала и изменение эффективных физико-механических свойств, которые определяются состоянием последней. Стохастический характер имеют как начальные физико-механические характеристики материала (в том числе на нижних структурно-масштабных уровнях), так и физические процессы, реализующиеся при деформировании (например, акты взаимодействия дефектных структур на микромасштабном уровне), а также воздействия на отдельные представительные объемы внутри изделия, продуцируемые стохастическими граничными условиями для обрабатываемой заготовки. Это обусловливает актуальность исследования изменений отклика (решений), получаемых в конститутивных моделях материалов при возмущении входных данных (истории воздействий и начальных условий) и оператора модели. Особо следует отметить важность решения этой задачи для обоснованного использования новых конститутивных моделей при описании современных технологических процессов термомеханической обработки, в частности, ориентированных на создание функциональных материалов. В статье обозначены некоторые трудности применения традиционных аналитических подходов (методов Ляпунова) к анализу устойчивости многоуровневых моделей материалов. Вводится понятие устойчивости решения, в отличие от традиционного учитывающее параметрическое возмущение оператора и возмущение истории воздействий (влияющих на правую часть системы уравнений). Процедура численной оценки устойчивости модели включает рассмотрение устойчивости решений при различных значениях параметров, определяющих оператор и входные данные. Представлено описание программы вычислительных экспериментов для реализации предлагаемого подхода с осуществлением разнообразных возмущений начальных условий, истории воздействий, оператора и анализом норм их отклонений, а также интегральной нормы отклонения возмущенных решений от базовых (получаемых в расчетах с невозмущенными параметрами).

Ключевые слова: многоуровневая конститутивная модель материала, устойчивость математической модели, чувствительность к возмущениям

AN APPROACH TO NUMERICAL ESTIMATING THE STABILITY OF MULTILEVEL CONSTITUTIVE MODELS

A.I. Shveykin, P.V. Trusov and K.A. Romanov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

Multilevel constitutive models of materials give the possibility to explicitly describe the mechanisms of inelastic deformation, evolution of a material structure and changes in the physical and mechanical properties of materials determined by their chemical composition and their internal structure. Therefore, these models seem to be very effective for improving metal processing and forming techniques. A study of the solutions (response change histories) obtained using constitutive models under perturbation of input data (influence history and initial conditions) and model operator is actual due to the fact that the material mechanical characteristics (including the lower scale level properties), physical processes occurring during deformation (for example, acts of interaction of defect structures at the microscale level) and the resulting influences (produced by stochastic boundary conditions) are stochastic in nature. Finding the solution to this problem is particularly important when researchers need to justify the use of new constitutive models for describing modern technological processes of thermomechanical treatment, in particular, those focused on creation of functional materials. The disadvantages of traditional analytical approaches (Lyapunov methods) taken to analyze the stability of multilevel material models have been briefly discussed. The definition of the solution stability is introduced; in contrast to the traditional definition, it takes into account the parametric perturbation of operators and the perturbation of the history of influences, which determine the right-hand side of the system of equations. A procedure for the model stability numerical assessment includes consideration of solutions stability for various values of the parameters that determine the operator and input data. The description of the program of computational experiments for the implementation of the proposed approach is presented. This program can be used to study various perturbations of initial conditions, the influence history, the operator, as well as to analyze the norms of their deviations and the integral norm of deviation of perturbed solutions from the base ones obtained in calculations with unperturbed parameters.

Key words: multilevel constitutive model, mathematical model stability, perturbation sensitivity

1. Введение

Произвольную математическую модель можно представить как оператор, позволяющий по входным данным, к которым в общем случае относятся изменяющиеся со временем воздействия на рассматриваемый объект и начальные условия, найти выходные данные (решение) [1]. Важным элементом анализа сложных моделей является исследование устойчивости получаемых с их использованием решений по отношению к возмущениям входных данных и оператора.

Для нелинейных операторов (особенно алгоритмических, например, основанных на методе клеточных автоматов) строгий математический анализ устойчивости в аналитической форме затруднен, поэтому для выяснения свойств модели обычно осуществляется численная оценка устойчивости к возмущениям отдельных параметров модели или их совокупностей [2–6]; под параметрами в широком смысле понимаются материальные функции и константы, включенные в оператор модели, и входные данные (начальные условия и параметры воздействия). Для этой оценки рассматривается чувствительность модели к возмущениям параметров — зависимость получаемых выходных данных от вариации параметров; изменение последних осуществляется только в начальный момент времени (и в последующем параметры, входящие в оператор модели, считаются постоянными). Подобные исследования чувствительности нелинейных моделей проводятся в таких областях науки, как океанология [7], химия [8], популяционная динамика [9], экология (определение состояния бассейнов рек [10, 11]) и других. Анализ чувствительности моделей в механике деформируемого твердого тела проводится, к примеру, по отношению к изменению воздействий и характеристик материала, часто — с помощью подхода, при котором в явном виде находятся производные отклика по параметрам [12–15]; при этом, наряду с напряжениями, в качестве параметров отклика могут рассматриваться функции, учитывающие запас прочности и стоимость конструкции [12].

Важнейшей составляющей моделей, разрабатываемых в механике деформируемого твердого тела для исследования процессов изготовления и эксплуатации металлических изделий, являются определяющие соотношения, или физические уравнения, или модель (поведения) материала, или конститутивная модель (КМ). В последние десятилетия значительное развитие получили многоуровневые КМ, позволяющие описывать эволюцию структуры материала и изменение эффективных физико-механических свойств, которые определяются состоянием последней [16–19]. За счет введения достаточного числа внутренних переменных [19–22] для характеристики текущего состояния структуры и реализации механизмов деформирования в КМ этого типа нет необходимости применения сложных интегральных операторов для учета памяти материала (она «хранится» во внутренних переменных), поэтому многоуровневые КМ в общем случае представляют собой алгоритмические операторные уравнения, включающие системы дифференциальных и/или тензорно-алгебраических уравнений.

В статье [23] приводится методика оценки чувствительности многоуровневых КМ к возмущениям параметров (числовых значений постоянных оператора), основанная на интегральном сопоставлении историй откликов для нескольких видов нагружений при использовании в модели возмущенных и невозмущенных параметров, а также обсуждаются результаты приложения этой методики для конкретных двухуровневой и трехуровневой КМ. Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью применения (новых) многоуровневых моделей материалов для описания технологических процессов термомеханической обработки, в которых стохастический характер имеют как распределенные по конструкции свойства материала (в том числе на нижних структурно-масштабных уровнях), так и воздействия на отдельные представительные объемы в изделии, продуцируемые стохастическими граничными условиями для обрабатываемой заготовки в целом. Исходя из этого пригодная для моделирования реальных технологических процессов КМ должна быть устойчива к соответствующим возмущениям. Кроме того, анализ устойчивости полезен при проведении процедуры идентификации КМ [24–27], в частности, если наблюдается существенная чувствительность модели к параметрам (при их малых возмущениях вблизи установленных при идентификации значений), то, возможно, следует пересмотреть область их определения (с учетом физических соображений).

В [23], как и во всех других известных авторам работах, исследовалась чувствительность модели к возмущениям параметров оператора в отсчетной конфигурации; принятые значения констант материала в дальнейшем полагались фиксированными для каждого рассматриваемого процесса. Для более полного анализа устойчивости модели требуется также выявление реакции на другие виды возмущений оператора и возмущений входных данных, в особенности на осуществляемые в разные моменты в течение всего времени процесса. В настоящей работе обсуждаются трудности применения традиционных аналитических подходов к исследованию устойчивости многоуровневых КМ, для преодоления которых предлагается способ численной оценки устойчивости многоуровневых моделей материала, обобщающий на случаи возмущения входных данных и оператора в различные моменты времени ранее предложенную численную процедуру [23].

Далее, в разделе 2 статьи, приводится математическая структура многоуровневых КМ. Отметим, что настоящая работа посвящена анализу свойств собственно КМ для описания поведения представительного макрообъема материала; в ней не рассматриваются решения краевых задач с использованием КМ.

Раздел 3 содержит краткую характеристику традиционных подходов к исследованию устойчивости математических моделей, обозначены трудности применения методов Ляпунова для анализа устойчивости многоуровневых КМ. В конце раздела приводится подробная формулировка понятия устойчивости, учитывающего (в отличие от традиционного) возмущения истории воздействий (определяющих правую часть системы дифференциальных уравнений) и параметрические возмущения оператора.

В разделе 4 дается краткое описание программы численной реализации подхода с осуществлением разнообразных возмущений начальных условий, истории воздействий, оператора и анализом норм их отклонений, а также интегральной нормы отклонения возмущенных решений от базовых (получаемых в расчетах с невозмущенными параметрами).

Вследствие ограничения объема журнальной статьи для демонстрации возможностей предлагаемого подхода авторы подготовили отдельные публикации.

2. Математическая структура многоуровневых конститутивных моделей

В настоящее время для исследования и совершенствования технологий обработки материалов, а также для решения задач по созданию функциональных материалов наиболее перспективным представляется многоуровневый подход к построению КМ, основанный на введении внутренних переменных и физических теориях пластичности [16–19, 28–31]. Внутренние переменные (ВП) характеризуют структуру материала и механизмы деформирования на различных масштабных уровнях; часть ВП явно входит в определяющие соотношения. В структуре КМ возможно применение дополнительных (скрытых) ВП для формулировки кинетических уравнений для явных ВП [19–22]. Поскольку физико-механические свойства материала на макромасштабном уровне определяются состоянием структуры материала, а последняя может существенно меняться при значительных неупругих деформациях (в частности, происходят процессы текстурообразования и измельчения зеренной структуры) [19], использование многоуровневого подхода с необходимым набором ВП является более предпочтительным (по крайней мере — для моделирования сложных термомеханических нагружений, которые характерны для технологических процессов обработки) по сравнению с применением макрофеноменологических соотношений.

Основные преимущества многоуровневых КМ — это возможность описания эволюции финального состояния структуры и, соответственно, физико-механических макросвойств (в том числе анизотропных), а также существенно меньшее число необходимых экспериментов по сравнению с требуемыми для определения материальных функций макрофеноменологических моделей материала, неявно учитывающих перестройку структуры. Следует отметить, что для идентификации макрофеноменологических моделей, пригодных для моделирования процессов механической обработки, нужна реализация экспериментов на сложное нагружение; к сожалению, в настоящее время последние возможны только в трехмерном подпространстве 6-мерного совмещенного пространства напряжений–деформаций, а также ограничены малыми (в сравнении с характерными для реальных технологических процессов) деформациями [32–34] из-за ранней потери устойчивости трубчатых образцов при кручении. Многоуровневые модели, вообще говоря, могут быть идентифицированы и без экспериментов на сложное нагружение на макромасштабном уровне [19].

Экспериментально наблюдаемое свойство памяти неупруго деформируемых твердых тел [35, 36] в многоуровневых моделях учитывается за счет вводимых ВП, поэтому нет необходимости прибегать в них к сложным интегральным операторам. В общем случае многоуровневые КМ представляют собой алгоритмические операторные уравнения, включающие системы относительно простых математических соотношений — дифференциальных и/или тензорно-алгебраических уравнений [19–22, 37–41]. Например, в упругопластической подмодели мезоуровня используется алгоритмическое определение активных систем внутризеренного скольжения с решением системы уравнений для отыскания скоростей сдвигов ним [42].Соотношения многоуровневых КМ обладают значительной универсальностью: при корректном учете структуры, основных механизмов деформирования и взаимодействий между ними модели могут применяться для широкого класса материалов и воздействий (в том числе сложных нагружений). «Платой» за универсальность КМ является необходимость введения большого числа ВП и эволюционных уравнений (как правило, нелинейных) для описания их изменения. В то же время особенности указанного подхода обусловливают его перспективность для построения математических моделей сложных систем и процессов в различных областях: использование в рамках указанного подхода декомпозиции большой системы на составляющие элементы и формулировка соотношений не для системы в целом, а для ее отдельных элементов с последующим агрегированием делает структуру модели прозрачной и применимой для множества близких систем и процессов, предоставляет возможность прямой и косвенной верификации на основе экспериментальных данных о процессах на низших масштабных уровнях. Указанные особенности подхода к построению КМ согласуются с методологией системного анализа [43].

Часть ВП непосредственно входит в определяющие соотношения (ОС), такие переменные называются внутренними явными переменными и обозначаются как $\mathbf{J}^{e}_{\beta},\ \beta=\overline{1,\mathrm{B}^{e}}$. Вторая группа ВП (в большинстве случаев относящихся к более глубоким структурно-масштабным уровням) — $\mathbf{J}^{i}_{\beta},\ \beta=\overline{1,\mathrm{B}^{i}}$, необходима для построения физически обоснованных соотношений для описания эволюции явных ВП; переменные этой группы называются неявными переменными. Полная совокупность внутренних переменных, таким образом, представляет собой множество $\left\{\mathbf{J}_{\beta}\right\}=\left\{\mathbf{J}^{e}_{\gamma},\mathbf{J}^{i}_{\delta}\right\}$, $\beta=\overline{1,\mathrm{B}}$, $\gamma=\overline{1,\mathrm{B}^{e}}$, $\delta=\overline{1,\mathrm{B}^{i}}$, $\mathrm{B}=\mathrm{B}^{e}+\mathrm{B}^{i}$. Будем рассматривать КМ, которые на макромасштабном уровне можно представить в виде системы уравнений [21]:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}^{(r)} = \mathbf{F}_{(r)}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{e}_{\gamma}\right),\\
&\mathbf{J}^{e\,(r)}_{\gamma} = \mathbf{C}_{(r)\gamma}\left(\mathbf{J}^{e}_{\gamma}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\delta}\right),\\
&\mathbf{J}^{i\,(r)}_{\delta} = \mathbf{R}_{(r)\delta}\left(\mathbf{J}^{i}_{\delta}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\kappa}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\Sigma}$ — мера напряженного состояния (отклик), $\mathbf{P}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, A}$ — параметры воздействия термомеханической (например, температура, мера деформированного состояния) и нетермомеханической (например, радиация, химические воздействия) природы, $\kappa = \overline{1, B^{i}}$. Справа в (1) фигурируют тензорзначные функции тензорных аргументов, в левой части (1) индексом (r) обозначена та или иная не зависящая от выбора системы отсчета производная [44–46], чаще всего коротационная. Вопрос о выборе конкретного вида производной для геометрически нелинейного ОС — один из острейших в механике сплошных сред; результаты исследований, проведенных авторами в данном направлении, и предложенные ими формулировки с использованием коротационной производной, учитывающей симметрийные свойства материала, содержатся в работах [19, 47–49]. Заметим, что в форме (1) можно представить и алгоритмические операторные уравнения КМ, соответствующим образом задавая правую часть соотношений (например, с применением условных функций типа функции Хевисайда).

Формулировка (1) может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{F}\ (\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{e}_{\gamma}),\\
&\dot{\mathbf{J}}^{e}_{\gamma} = \mathbf{C}_{\gamma}(\mathbf{J}^{e}_{\gamma}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\delta}),\\
&\dot{\mathbf{J}}^{i}_{\delta} = \mathbf{R}_{\delta}(\mathbf{J}^{i}_{\delta}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\kappa}),
\end{aligned} \tag{2}$$

где слева находятся материальные производные по времени, при этом в число явных внутренних переменных необходимо добавить спин подвижной системы координат макроуровня, который используется в задании коротационной производной в (1). В качестве других явных ВП макроуровня выступают тензоры эффективных упругих свойств, неупругих и термических составляющих скорости деформации на макроуровне. Неявными ВП макроуровня служат характеристики отдельных кристаллитов (тензоры свойств, спины, скорости неупругих и термических деформаций). В двухуровневой формулировке последние переменные являются также явными ВП на мезоуровне — через них определяются напряжения, кинетические уравнения для них записываются с введением дополнительных неявных ВП мезоуровня (скоростей сдвигов, критических напряжений сдвигов и других) [19, 50]. Приняв для этих ВП обозначение $\mathbf{j}^{i\,mezo}_{\eta}$, $\eta = \overline{1, B^{i\,mezo}}$, соотношения двухуровневой модели можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{F}\ (\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{e}_{\gamma}),\\
&\dot{\mathbf{J}}^{e}_{\gamma} = \mathbf{C}_{\gamma}(\mathbf{J}^{e}_{\gamma}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\delta}),\\
&\dot{\mathbf{J}}^{i}_{\delta} = \mathbf{R}_{\delta}(\mathbf{J}^{i}_{\delta}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\kappa}, \mathbf{j}^{i\,mezo}_{\eta}),\\
&\dot{\mathbf{j}}^{i\,mezo}_{\eta} = \mathbf{G}_{\eta}(\mathbf{J}^{i\,mezo}_{\eta}, \mathbf{J}^{i}_{\delta}, \mathbf{P}_\alpha, \mathbf{J}^{i}_{\kappa}, \mathbf{j}^{i\,mezo}_{\lambda}),
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\lambda = \overline{1, B^{i\,mezo}}$. В трехуровневых (по масштабам) моделях появляется еще одна группа переменных и эволюционных уравнений для них, и так на каждом новом масштабе. Для любого из элементов каждого уровня полагается однородность напряженно-деформированного состояния (НДС) и ВП. По этой причине в число аргументов в (3) явным образом не входят пространственные координаты. Одновременно с этим все параметры мезоуровня (или самого нижнего из входящих в модель уровней), включая ВП, на протяжении всего исследуемого процесса «приписаны» к одним и тем же кристаллитам.

Отметим, что настоящая работа посвящена анализу свойств собственно модели поведения (представительного макрообъема) материала — многоуровневой статистической КМ, в ней не рассматриваются решения краевых задач с неоднородными полями НДС. В то же время, в отличие от широко распространенных статистических моделей на основе физических теорий пластичности (см. [51, 52] и другие), не принимающих во внимание никакие взаимодействия зерен, в предлагаемых авторами обобщенных статистических моделях частично учитывается топология зеренной структуры [19] — взаиморасположение кристаллитов в пространстве. Это необходимо для описания зернограничного упрочнения и зернограничного скольжения и делается эффективным образом, без рассмотрения эволюционирующих конфигураций отдельных зерен в пространстве (анализируется только «укладка» зерен). Предлагаемый аппарат может быть применен и для прямых моделей на основе физических теорий пластичности [17, 53 и др.], в которых с использованием метода конечных элементов исследуются неоднородные поля НДС и ВП на мезоуровне; в этом случае возмущения должны быть согласованы с соотношениями математической модели (краевой задачи).

Основными выходными данными КМ материала являются компоненты тензора макронапряжений, определяемые обычно в фиксированной лабораторной системе координат. При постановке частных задач к выходным данным формально можно добавить дополнительные переменные, связанные с ВП (отражающими состояние структуры материала), например, компоненты тензоров эффективных физико-механических свойств макроуровня, функцию распределения ориентаций кристаллитов, средние скорости внутризеренных сдвигов, мощность температурного источника при неупругих деформациях, распределение мезонапряжений (в частности, при нулевых макронапряжениях это остаточные мезонапряжения) и другие. В терминологии классических математических задач устойчивости совокупность выходных данных можно назвать «решением» соответствующей задачи. Для ясности изложения объединим все выходные данные в общий вектор искомых переменных $\mathbf{Y}(t)$, $t\in[0,T]$, T — момент окончания процесса деформирования. Совокупность выходных данных (решение), получаемая в результате применения КМ, представляется в виде вектор-функции $\mathbf{Y}_{t\in[0,T]}\in A_{t\in[0,T]}\subset \mathrm{C}^n_{\mathrm{L}^2}$, $\mathrm{C}^n_{\mathrm{L}^2}$ — пространство непрерывных на $t\in[0,T]$ вектор-функций размерности n с нормой, заданной интегралом Римана $\left\|\mathbf{Y}_{t\in[0,T]}\right\|_{\mathrm{C}^n_{L^2}}=\left(\int\limits_0^T\sum\limits_{i=1}^m\left(Y_i(t)\right)^2 dt\right)^{1/2}$ [54], $A_{t\in[0,T]}$ — область значений, определяемая оператором КМ.

Входными данными КМ являются параметры кинематических и температурных воздействий, которые в общем случае меняются со временем, и начальные условия. К последним относятся начальные значения напряжений (могут иметь место ненулевые остаточные напряжения на различных уровнях, согласованные через осреднение) и начальные значения ВП, через которые закладывается информация об исходном состоянии структуры материала. С использованием ВП устанавливаются начальные эффективные физико-механические свойства на макроуровне, к примеру, по заданной выборке начальных ориентаций кристаллитов и константам материала на мезоуровне можно определить начальные физико-механические (упругие, температурные) свойства на макромасштабном уровне. Заметим, что отнесение к входным данным начальных значений ВП подразумевает знание вида оператора модели (это позволяет, в частности, наделять ВП соответствующим физическим смыслом), что характерно для моделей «белого ящика» [1].

Объединим все кинематические и температурные воздействия $\mathbf{P}_\alpha(t)$ в вектор воздействий $\mathbf{X}(t)$, $t\in[0,T]$. Тогда можно представить воздействия во время рассматриваемого процесса как $\mathbf{X}_{t\in[0,T]}\in DX_{t\in[0,T]}\subset Q_2^m[0,T]$, где $Q^m_{2\ t\in[0,T]}$ — пространство кусочно-непрерывных на $t\in[0,T]$ вектор-функций размерности m с нормой, заданной интегралом Римана $\left\|\mathbf{X}_{t\in[0,T]}\right\|_{Q_2^m}=\left(\int\limits_0^T\sum\limits_{i=1}^m\left(X_i(t)\right)^2 dt\right)^{1/2}$ [54], $DX_{t\in[0,T]}$ — область определения (допустимых) воздействий в нем, ограниченная диапазонами воздействий (например, по скорости деформаций, температуре), для которых применима КМ. Отметим, что в данной норме функции, отличающиеся не более чем в конечном числе точек, считаются совпадающими. С точки зрения математической модели физико-механического процесса это эквивалентно неучету мгновенных (на бесконечно малых временах) флуктуаций воздействий, то есть принимается, что ими можно пренебречь, поскольку времена реализации механизмов осуществления процесса в твердых телах являются конечными и материал не успевает реагировать на эти флуктуации.

Все компоненты тензорных ВП аналогичным образом включим в вектор $\mathbf{Z}(t)$, $t\in[0,T]$, $\mathbf{Z}(t)\in DZ(t)\subset l_2^k$, l_2^k — пространство R^k с нормой $\left\|\mathbf{Z}(t)\right\|_{l_2^k}=\left(\sum\limits_{i=1}^n\left(Z_i(t)\right)^2\right)^{1/2}$ (соответствует конкретному моменту $t\in[0,T]$), $DZ(t)$ — область значений ВП в момент t, определяемая оператором модели (поскольку ВП связаны с элементами структуры и механизмами деформирования, их значения должны принадлежать физически реализуемым диапазонам). Отличие нормы для ВП от введенных выше интегральных норм для отклика и воздействий обусловлено тем, что отсутствует необходимость рассматривать историю изменения ВП; эта норма используется для установления отклонения начальных условий по ВП. В то же время выше отмечено, что в КМ можно ввести дополнительные переменные для отклика, связав их с ВП, и таким образом при необходимости анализировать эволюцию ВП.

Тогда формально многоуровневую КМ (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{Y}}(t)=\mathbf{f}\left(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t),\mathbf{Z}(t)\right), && 1\\
&\dot{\mathbf{Z}}(t)=\mathbf{g}\left(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t),\mathbf{Z}(t)\right), && 2\\
&\mathbf{Y}\big|_{t=0}=\mathbf{Y}_0, && 3
\end{aligned}\qquad (4)$$

$$\mathbf{Z}\big|_{t=0} = \mathbf{Z}_0. \qquad 4$$

Входные данные модели включают: историю воздействий $\mathbf{X}_{t\in[0,T]}$; начальные условия для выходных переменных $\mathbf{Y}_0$ (4_3); начальные условия для ВП $\mathbf{Z}_0$ (4_4). Нелинейные функции $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ задают составной оператор модели $\mathbf{f}(t)$: $R^m \times R^n \times R^k \to R^n$, $\mathbf{g}(t)$: $R^m \times R^n \times R^k \to R^k$, включающий совокупность тензорных дифференциальных и алгебраических соотношений между откликом (макронапряжениями), воздействиями и ВП. Акцентируем внимание на том, что $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ определяются сложным образом. Так, для упругопластической и жесткопластической модели требуется алгоритмическая процедура для установления активных в рассматриваемый момент времени систем скольжения в каждом кристаллите и формулировки системы соотношений для установления скоростей сдвигов по ним [42]. При применении упруговязкопластических моделей в подобной процедуре необходимости нет, однако в правой части используются функции Хевисайда от разности касательных и критических напряжений на системах скольжения [19].

КМ (4) позволяет по входным данным $\left\{\mathbf{X}_{t\in[0,T]}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0\right\}$ найти решение $\mathbf{Y}_{t\in[0,T]}$, ее можно трактовать как соответствующий сложный оператор Φ [1]: $\mathbf{Y}_{t\in[0,T]} = \Phi\left(\mathbf{X}_{t\in[0,T]}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0\right)$. Отметим, что рассматриваемый класс задач (нахождение связи входных и выходных данных) относится к некорректным по Адамару [55], поскольку для них отсутствуют доказательства существования и единственности решения при любых входных данных. Возможность установления отклика материала по истории воздействий (существование решения для корректной КМ) закладывается в механике сплошных сред аксиоматически (принцип детерминизма У. Нолла [35] или эквивалентный по сути постулат макрофизической определимости А.А. Ильюшина [56]) и подтверждается опытами. Кроме того, экспериментальные данные и для однородно, и для неоднородно деформируемых образцов свидетельствуют о том, что неустойчивость (неединственность) НДС на макроуровне в опытах проявляется лишь в редких случаях — при специальном подборе воздействий для некоторых конкретных состояний структуры материала (соответствует специальному выбору входных данных для математической модели); это подтверждается также опытом эксплуатации многоуровневых моделей материалов множеством исследователей (обширный обзор представлен в [19]). Таким образом, исходя из указанных физических соображений, задачу установления отклика материала по заданным воздействиям можно считать корректной по Тихонову [55]. При этом подзадача выявления подобласти определения оператора, в которой решение задачи (4) единственно (устойчиво), является весьма важной. В частности, для обоснованного применения конститутивных моделей (в первую очередь новых) для описания технологических процессов термомеханической обработки важно исследование характерных режимов нагружения, иначе говоря, нахождение решений при определенных входных данных, поэтому на первом — начальном, этапе решения указанной подзадачи целесообразен анализ устойчивости в локальном смысле (в окрестности таких решений).

К параметрам оператора КМ относятся, прежде всего, константы (коэффициенты в уравнениях, сформулированных для описания основных механизмов деформирования), характеризующие свойства исследуемых материалов на различных масштабных уровнях. Возможные возмущения оператора, конечно, не ограничиваются случаями возмущений этих параметров, например, они могут быть введены путем возмущения в различные моменты времени значений ВП. Действительно, согласно представлению математической модели как оператора, связывающего входные и выходные данные [1], ВП и уравнения для них являются элементами сложного оператора. В связи с этим далее возмущение значений ВП в моменты времени, отличные от начального (в начальный момент они отнесены к возмущению начальных условий), трактуется как параметрическое возмущение оператора. Авторами ранее рассмотрены частные задачи анализа устойчивости многоуровневых моделей. Как параметрическое возмущение оператора через изменение соответствующих ВП можно трактовать применение различных формулировок упругих соотношений мезоуровня [57, 58] и различных формулировок для установления спина подвижной системы координат мезоуровня [59]. В работе [23] проведена оценка чувствительности к значениям констант модели мезоуровня (параметрические возмущения оператора) в указанном выше смысле. Однако в цитируемых работах в явном виде не использовалось математическое понятие устойчивости многоуровневых моделей, которое необходимо ввести и употребить для более полного анализа (с рассмотрением широкого спектра возмущений входных данных и оператора в течение всего времени процесса). Огромное значение в моделировании систем и процессов с помощью дифференциальных уравнений имеют математические определения и методы исследования устойчивости, предложенные А.М. Ляпуновым. Рассмотрим далее возможность их применения к анализу устойчивости КМ материалов.

3. Введение основных понятий и определений, необходимых для оценки устойчивости многоуровневой конститутивной модели. О применении традиционных подходов к исследованию устойчивости решений систем дифференциальных уравнений

В традиционных математических исследованиях дифференциальных уравнений (ДУ)/систем ДУ рассматриваются условия устойчивости (неустойчивости) решений по отношению к изменению начальных условий (устойчивость по Ляпунову) [60–66]: если при любых малых отклонениях начальных условий получаемое решение близко к решению без возмущений, то говорят об устойчивости по Ляпунову соответствующего базового решения (если же дополнительно к этому возмущенное решение на бесконечности приближается к базовому, то об асимптотической устойчивости по Ляпунову); в противном случае, то есть при наличии хотя бы одного малого возмущения входных данных, приводящего к значительному отклонению решения от базового, базовое решение неустойчиво по Ляпунову. С использованием конкретного вида оператора и, например, методов Ляпунова формулируются условия, накладываемые на коэффициенты модели и на начальные условия, обеспечивающие устойчивость решения. Для анализа поведения решения часто также прибегают к рассмотрению близости решений — базового и определенного при возмущении начальных условий — в фазовом пространстве. При близости траекторий говорят об орбитальной устойчивости — устойчивости по Пуанкаре (из устойчивости по Ляпунову следует устойчивость по Пуанкаре, но не наоборот). Отметим, что подход с анализом эволюции возмущенного решения широко применяется при исследовании устойчивости решения краевых задач, в частности, в гидродинамике [64, 67, 68]. При этом возмущения полагаются зависящими и от времени, и от координат, к тому же они должны удовлетворять ограничениям краевой задачи. В этих случаях для решения привлекаются численные методы; воздействия в пространственных задачах обычно вводятся через граничные условия, поэтому выделяется задача устойчивости решений по отношению к граничным условиям.

Под *процедурой оценки устойчивости модели* будем понимать анализ устойчивости решений, полученных при ее использовании при разных значениях параметров, определяющих оператор и входные данные (начальные условия и воздействия), то есть рассмотрение различных задач оценки локальной устойчивости модели [69, 70].

Нелинейные математические модели при некоторых параметрах и входных данных могут давать неустойчивое решение. Если неустойчивость решения имеет объяснение с физической (для моделей из других областей — с социологической, экономической и прочих) точки зрения и подтверждается экспериментально, то обозначим ее как *физически обусловленную неустойчивость*. Область определения параметров и входных данных модели, при которых она возникает, назовем областью физически обусловленной неустойчивости. В качестве классического примера можно упомянуть неустойчивость формы стержней при действии сжимающей силы, которая описывается формулами Эйлера [71]. Неустойчивость всех решений, получаемых с использованием математической модели, обозначим как *математически обусловленную неустойчивость* и, соответственно, введем область математически обусловленной неустойчивости. Совпадение подобластей из областей математически и физически обусловленной неустойчивости подтверждает корректность математической модели в этом диапазоне параметров и входных данных. Если же часть области математически обусловленной неустойчивости не попадает в область физически обусловленной неустойчивости, необходимо ограничить области применимости модели, исключив соответствующие диапазоны.

Строго решить вопрос об устойчивости решений систем нелинейных ДУ позволяет метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова, прямой метод Ляпунова) [63, 72, 73]. Есть примеры его эффективного приложения к различным частным задачам (см. [74–77] и другие). Однако, насколько известно авторам, к настоящему времени отсутствует универсальная процедура его использования для произвольных сложных нелинейных систем ДУ. Поэтому в общем случае возможно применение только приближенных методов оценки устойчивости.

Сложность задачи исследования устойчивости систем уравнений типа (4) обусловлена нелинейностью оператора. Для ограниченных нелинейных операторов $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ можно говорить о существовании точной верхней границы отношения нормы выходных данных к норме аргумента (по малой окрестности в пространстве входных данных вокруг базового решения), но нет методов нахождения этой границы. Действительно, можно найти максимум для определенного счетного набора входных данных, однако при увеличении числа их вариантов это значение может быть превышено. Строго говоря, процесс уточнения может идти бесконечно. Поэтому при исследовании нелинейных операторов обычно рассматривают их изменения в конкретных малых окрестностях аргументов, анализируя производную по Гато или, в случае существования линейного приближения оператора, производную по Фреше [54, 78]. При оценке устойчивости нелинейных систем ДУ это находит отражение в том, что в первую очередь анализируются линейные приближения таких систем [60–62]. Отметим, что подход, использующий линеаризацию оператора краевой задачи, часто находит употребление в исследованиях устойчивости механических систем (например, в задачах гидродинамической устойчивости уравнения линеаризуются относительно малых возмущений базовых решений [68]). Обратим внимание на то, что возмущения самого оператора в этих постановках не фигурируют.

Далее рассмотрим возможность применения к (4) первого метода Ляпунова путем анализа устойчивости по первому приближению [62]. Для этого необходимо проанализировать спектр матрицы первого приближения, определяемой по значениям производных компонент (к примеру, в неподвижной лабораторной системе координат) правой части системы (4) по компонентам $\mathbf{Y}(t), \mathbf{Z}(t)$. Для асимптотической устойчивости по первому приближению необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы первого приближения имели отрицательные вещественные части. Очевидно, что применение метода анализа по первому приближению к многоуровневым КМ связано с некоторыми трудностями. Во-первых, метод является приближенным. Во-вторых, аналитическое выражение матрицы первого приближения для некоторых КМ, например, включающих алгоритмическое определение оператора правой части (4), при некоторых условиях может не существовать. В-третьих, в силу множественности ВП в многоуровневых КМ (не менее нескольких десятков тысяч) матрица будет иметь большую размерность. Аналитическое нахождение собственных чисел не представляется возможным, численные же методы не обеспечивают гарантированного нахождения всех корней нелинейного уравнения, при этом нелинейность и большая размерность матрицы обусловливают потребность в больших вычислительных ресурсах. Это имеет место и при оценке отрицательности вещественных частей всех корней, например, критерия Гурвица или критерия Михайлова [63]; кроме того, при применении численных методов для вычисления определителей матриц большой размерности будут накапливаться вычислительные ошибки. Для оценки спектра матрицы первого приближения можно использовать теоремы Гершгорина [79]: в случае расположения правой границы определяемого теоремой диапазона вещественной части собственных чисел на отрицательной полуоси все собственные числа будут иметь отрицательные вещественные части (что соответствует асимптотической устойчивости), при нахождении левой части диапазона на правой полуоси вещественные части всех собственных чисел будут положительными (что означает неустойчивость), но при расположении левой границы диапазона на отрицательной полуоси, а правой — на положительной полуоси в общем случае будет не ясно, есть ли собственные числа с положительной вещественной частью (то есть судить об устойчивости нельзя).

Таким образом, применение традиционных методов Ляпунова к исследованию устойчивости решений систем ДУ для КМ по причине их значительной нелинейности и большой размерности, к сожалению, не гарантирует корректного ответа на вопрос об устойчивости и требует чрезвычайно больших вычислительных ресурсов. Кроме того, эти методы не включают рассмотрение возмущений воздействий и оператора в произвольные моменты времени. По-видимому, аналитический аппарат для общего случая возмущений разработать в настоящее время нереально, однако в связи с обозначенной в разделе 2 актуальностью задачи целесообразно предложить конструктивную методику для численной оценки локальной устойчивости решений, получаемых с использованием КМ.

Для установления отличия возмущенной истории воздействий от истории воздействий, при которой получено исходное решение, можно применить введенную выше интегральную норму. Для оценки же отклонения оператора приходится вводить приближение в связи с отмеченным выше отсутствием строгого определения нормы нелинейного оператора. Принимается предположение о том, что в случае устойчивости к возмущению оператора разница результатов действия возмущенного оператора Φ^* и невозмущенного оператора Φ на любой аргумент $\mathcal{X}^*$ в малой окрестности входных данных $\mathcal{X} = \left\{\mathbf{X}_{t\in[0,T]}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0\right\}$ представляется через действие на него некоторого линейного оператора A: $\Phi^*(\mathcal{X}^*) - \Phi(\mathcal{X}^*) = \mathrm{A}(\mathcal{X}^*)$. Тогда можно формально ввести норму для отклонения оператора $\left\|\Phi - \Phi^*\right\|_{\mathrm{o}\left(\left\{\mathbf{X}_{t\in[0,T]}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0\right\}\right)}$, которая будет равна норме линейного оператора A, ограничив возможные аргументы малой окрестностью $\mathrm{o}(\mathcal{X}) = \mathrm{o}\left(\left\{\mathbf{X}_{t\in[0,T]}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0\right\}\right)$. Высказанное предположение подразумевает достаточную гладкость нелинейных операторов Φ, Φ^*. Указанная норма используется при введении понятия устойчивости решения, при этом подразумевается, что рассматривается малая окрестность решения. Поскольку аналитическое определение этой нормы в силу существенной нелинейности и большой размерности КМ невозможно и не известны способы ее численного отыскания (в случае существования способа его реализация была бы затруднительна по причине огромной ресурсоемкости); в предлагаемой численной процедуре оценки устойчивости, описываемой далее, при параметрическом возмущении оператора вводится норма для отклонения параметров оператора, выступающая в качестве оценки нормы отклонения оператора.

С использованием для возмущенных характеристик модели обозначения $(\ )^*$ понятие *устойчивости решения* (получаемого при применении КМ) можно сформулировать следующим образом: если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа $\delta_{Y_0}(\varepsilon) < \infty$, $\delta_{Z_0}(\varepsilon) < \infty$, $\delta_X(\varepsilon) < \infty$, $\delta_\Phi(\varepsilon) < \infty$, что для любых допустимых возмущенных воздействий $\mathbf{X}^*_{t\in[0,T]}$, начальных условий $\mathbf{Y}_0^*$, $\mathbf{Z}_0^*$, оператора Φ^*, удовлетворяющих совокупности соотношений:

$$\left\|\mathbf{Y}_0^* - \mathbf{Y}_0\right\|_{l_2^n} < \delta_{Y_0}(\varepsilon), \tag{5}$$

$$\left\|\mathbf{Z}_0^* - \mathbf{Z}_0\right\|_{l_2^k} < \delta_{Z_0}(\varepsilon), \tag{6}$$

$$\left\|\mathbf{X}^*_{t\in[0,T]} - \mathbf{X}_{t\in[0,T]}\right\|_{Q_2^m} < \delta_X(\varepsilon), \tag{7}$$

$$\left\|\Phi^* - \Phi\right\|_{o(\{\mathbf{X}_{t\in[0,T]},\, \mathbf{Y}_0,\, \mathbf{Z}_0\})} < \delta_\Phi(\varepsilon), \tag{8}$$

выполняется неравенство

$$\left\|\mathbf{Y}^*_{t\in[0,T]} - \mathbf{Y}_{t\in[0,T]}\right\|_{C^n_{L^2}} < \varepsilon, \tag{9}$$

то базовое решение $\mathbf{Y}_{t\in[0,T]} = \Phi\left(\mathbf{X}_{t\in[0,T]}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{Z}_0\right)$, полученное действием оператора Φ при входных данных $\mathbf{X}_{t\in[0,T]}$, $\mathbf{Y}_0$, $\mathbf{Z}_0$, является *устойчивым*.

Заметим, что если вместо интегральной по времени нормы отклика использовать норму тензорзначных величин в каждый момент времени (например, $\|\cdot\|_{l_2^n}$) и рассматривать только возмущение начальных условий (без учета возмущения воздействий и оператора), то при $T \to \infty$ получим классическое определение устойчивости решения по Ляпунову [60–63]. Подчеркнем, что для анализа КМ важно исследование влияния именно возмущенной истории воздействий $\mathbf{X}^*_{t\in[0,T]}$, $t \in [0, T]$, а не только возмущений $\mathbf{X}^*(0)$ в начальный момент времени, поскольку в реальных процессах деформирования возмущения воздействий реализуются во все моменты времени за счет стохастичности кинематических и температурных граничных условий (возмущение истории воздействий означает изменение правой части в (4)). Необходимость рассмотрения возмущений начальных условий $\mathbf{Y}_0^*, \mathbf{Z}_0^*$ обусловлена тем, что в представительном объеме могут присутствовать остаточные (начальные) напряжения ($\mathbf{Y}_0^*$), а начальные физико-механические свойства, определяемые начальными значениями ВП $\mathbf{Z}_0^*$, имеют стохастический характер. Актуальность анализа влияния на решение возмущений оператора Φ^* связана с тем, что некоторые физические процессы, учитываемые в детерминированной КМ, на самом деле обладают вероятностной природой; к ним относятся, например, акты взаимодействия дефектных структур на микромасштабном уровне, описание которых осуществляется эффективным образом в соотношениях мезоуровня для критических напряжений сдвигов по системам внутризеренного скольжения дислокаций [19]. При деформировании реальные сценарии взаимодействия дефектных субструктур в материале могут существенно различаться. Для оценки возможного влияния этого на отклик далее в предлагаемой работе рассматривается параметрическое возмущение оператора через изменение ВП.

Заметим, что для стохастических моделей определение устойчивости можно применять в вероятностном смысле [80], однако в предлагаемой работе анализируются только детерминированные КМ, поэтому этот вариант не использовался — имеются стохастические возмущения параметров, но для каждого варианта их реализации проверяется выполнение приведенного строгого критерия устойчивости.

Как отмечено выше, для адекватной КМ при некоторых входных данных и параметрах возможно появление неустойчивых решений, при этом желательно дать этим ситуациям обоснованную физическую трактовку. Например, при применении физической теории пластичности для монокристалла с кинематическим воздействием выявлено [81], что неустойчивое решение обусловлено выходом изображающей напряженное состояние точки (в пространстве напряжений) перпендикулярно на грань поверхности текучести, определяемой критерием Шмида, поскольку в этом случае при различных малых возмущениях начальной ориентировки и тех же воздействиях эта точка движется к разным вершинам этой грани (в зависимости от заданного отклонения от базовой ориентации). Для существенно текстурированного поликристалла на макроуровне при некоторых воздействиях будет появляться подобное неустойчивое в указанном выше смысле поведение. Описанные ситуации соответствуют физически обусловленной неустойчивости. Отметим, что при изменении управления процессом эту неустойчивость можно устранить, для этого в качестве воздействий надо рассматривать напряжения (а откликом считать деформационные характеристики).

В то же время очевидно, что многоуровневые КМ для описания деформирования поликристаллов при подавляющем большинстве вариантов воздействий и начальных условий (особенно начально нетекстурированных поликристаллов с равномерной функцией распределения ориентаций кристаллитов) должны давать устойчивые решения. Это подтверждается экспериментами (и на однородно, и на неоднородно деформируемых образцах): неустойчивость устанавливаемого в опытах НДС на макроуровне проявляется крайне редко (при исключении из рассмотрения финальной стадии деформирования с образованием шейки).

При практическом применении введенного определения устойчивости возникает проблема вычисления нормы отклонения оператора (8), поскольку, в силу существенной нелинейности и большой размерности КМ, аналитическое нахождение этой нормы невозможно и не известны способы ее численного отыскания (при существовании способа его реализация была бы затруднительна по причине огромной ресурсоемкости). Для оценки устойчивости по отношению к оператору модели предлагается проведение вычислительных экспериментов с параметрическим заданием (малого) отклонения возмущенного оператора от базового. Опыт использования многоуровневых моделей показывает, что в большинстве случаев малое возмущение параметров, задающих правые части в (4), приводит к малому изменению отклика [23]. В связи со сказанным, в численной процедуре оценки устойчивости вместо обозначенного формально условия (8) будет применяться норма для отклонения параметров оператора:

$$\left\|\mathbf{\Lambda}^{*}_{t\in[0,T]}-\mathbf{\Lambda}_{t\in[0,T]}\right\|_{Q_2^S}<\delta_\Phi(\varepsilon), \tag{10}$$

где изменяющиеся со временем $t\in[0,T]$ векторы параметров оператора $\mathbf{\Lambda}^{*}_{t\in[0,T]}, \mathbf{\Lambda}_{t\in[0,T]}$ имеют размерность S, соответствующую числу параметров оператора КМ, возмущения которых рассматриваются. Компоненты $\mathbf{\Lambda}_{t\in[0,T]}$ в момент $t\in[0,T]$ соответствуют значениям параметров, определяющих в этот момент оператор модели для отыскания невозмущенного решения, а $\mathbf{\Lambda}^{*}_{t\in[0,T]}$ — для решения с возмущениями. Норма задана интегралом Римана $\left\|\mathbf{K}_{t\in[0,T]}\right\|_{Q_2^S}=\left(\int\limits_0^T\sum\limits_{i=1}^{S}\left(K_i(t)\right)^2dt\right)^{1/2}$ [54].

Как отмечено выше, процедура оценки устойчивости модели включает анализ устойчивости решений при различных значениях параметров оператора и входных данных КМ из их области определения, то есть рассмотрение различных задач оценки локальной устойчивости модели. Очевидно, что для нелинейной КМ с множеством ВП нельзя проверить все решения и любые возможные их возмущения. В связи с этим предлагается к использованию численная процедура, в рамках которой для упрощения задачи на основе физического анализа выделяются значимые решения, которые исследуются только при некоторых характерных физически допустимых возмущениях. Представляется, что предложенная процедура применима для оценки устойчивости любой модели, сводимой к виду (4).

4. Описание алгоритма численной процедуры оценки устойчивости многоуровневой конститутивной модели материала

Для реализации предлагаемого подхода необходимо осуществить следующие шаги.

1. Создать массив базовых решений при некоторых входных данных (начальных условиях и воздействиях) и параметрах оператора. В качестве базовых логично рассматривать решения, получаемые при характерных для анализируемых технологических процессов термомеханической обработки воздействиях и начальных состояниях материала. Если решение только одно, то данный алгоритм можно трактовать как алгоритм оценки его устойчивости.
2. Выделить часть параметров КМ (начальные условия, воздействия, возмущаемые параметры оператора), возмущения которых физически обоснованы.
3. Разработать программу (набор вариантов) численных экспериментов для исследования поведения базовых решений (раздел 1) при возмущениях определенных наборов параметров КМ (раздел 2): отдельных и различных совокупностей.
4. Осуществить множество реализаций для каждого варианта из программы экспериментов (раздел 3) с соответствующими возмущениями параметров КМ. Для каждой реализации рассчитать значения норм возмущений начальных условий (5), (6), воздействий (7), отклика (9), норму для отклонения параметров оператора (10).
5. По совокупности полученных в п. 4 расчетных данных проверить, выполняется ли приведенное в разделе 3 определение устойчивости для каждого базового решения.
6. При выявлении в п. 5 неустойчивого решения (математически обусловленной неустойчивости) провести физический анализ, то есть выяснить, является ли физически обусловленной выявленная математически обусловленная неустойчивость. При отсутствии приемлемого физического обоснования возникает необходимость тщательной проверки адекватности КМ. Если необоснованные неустойчивые

решения не найдены, то при большом количестве разнообразных вариантов численных экспериментов это служит косвенным свидетельством адекватности КМ в целом (при условии соответствия натурным экспериментам).

5. Заключение

Поскольку начальные физико-механические характеристики материала (в том числе на нижних структурно-масштабных уровнях), физические процессы, реализующиеся при деформировании (например, акты взаимодействия дефектных структур на микромасштабном уровне), а также воздействия на отдельные представительные объемы внутри изделия (продуцируемые стохастическими граничными условиями для изделия) имеют вероятностный характер, актуален анализ устойчивости получаемых с использованием конститутивных моделей материалов решений (истории изменения откликов) по отношению к малых конечным возмущениям входных данных и оператора модели.

Введено понятие устойчивости решения, в отличие от традиционного учитывающее параметрическое возмущение оператора и возмущение истории воздействий (определяющих правую часть системы дифференциальных уравнений).

Разработана программа вычислительных экспериментов для реализации предлагаемого подхода, включающая рассмотрение разнообразных возмущений начальных условий, истории воздействий, оператора, и анализ норм их отклонений, а также интегральной нормы отклонения возмущенных решений от базовых (получаемых в расчетах с невозмущенными параметрами).

Примеры применения предложенного подхода и алгоритма на его основе к исследованию многоуровневых конститутивных моделей поликристаллических металлов перенесены авторами в отдельные публикации.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант №17-19-01292).

Литература

1. Введение в математическое моделирование / Под ред. П.В. Трусова. М.: Логос, 2007. 440 с.
2. *Соболь И.М.* Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей // Матем. моделирование. 1990. Т. 2, № 1. С. 112-118.
3. *Archer G.E.B., Saltelli A., Sobol I.M.* Sensitivity measures, anova-like Techniques and the use of bootstrap // J. Stat. Comput. Simulat. 1997. Vol. 58. P. 99-120. https://doi.org/10.1080/00949659708811825
4. *Saltelli A., Tarantola S., Chan K.P.-S.* A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output // Technometrics. 1999. Vol. 41. P. 39-56. https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485594
5. *Соболь И.М.* Глобальные показатели чувствительности для изучения нелинейных математических моделей // Матем. моделирование. 2005. Т. 17, № 9. С. 43-52.
6. *Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S.* Global sensitivity analysis. The Primer. John Wiley & Sons Ltd., 2008. 292 p.
7. *Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П.* Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // Изв. РАН. Физ. атм. и ок. 2013. Т. 49, № 6. С. 643-654. https://doi.org/10.7868/S0002351513060023
8. *Нурисламова Л.Ф., Губайдуллин И.М.* Редукция детальных схем химических превращений окислительных реакций формальдегида и водорода на основании результатов анализа чувствительности математической модели // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15, № 4. С. 685-696.
9. *Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Цветков И.Н.* Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // Изв. вузов. ПНД. 2009. Т. 17, № 6. С. 74-85. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-6-74-85
10. *Nossent J., Elsen P., Bauwens W.* Sobol’ sensitivity analysis of a complex environmental model // Environ. Model. Software. 2011. Vol. 26. P. 1515-1525. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2011.08.010
11. *Gan Y., Duan Q., Gong W., Tong C., Sun Y., Chu W., Ye A., Miao C., Di Z.* A comprehensive evaluation of various sensitivity analysis methods: A case study with a hydrological model // Environ. Model. Software. 2014. Vol. 51. P. 269-285. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2013.09.031
12. *Хог Э., Чой К., Комков В.* Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с.
13. *Kleiber M., Hien T.D., Postek E.* Incremental finite element sensitivity analysis for non-linear mechanics applications // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1994. Vol. 37. P. 3291-3308. https://doi.org/10.1002/nme.1620371906
14. *Gutiérrez M.A., de Borst R.* Simulation of size-effect behaviour through sensitivity analyses // Eng. Fract. Mech. 2003. Vol. 70. P. 2269-2279. https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00221-7
15. *Khaledi K., Mahmoudi E., Datcheva M., König D., Schanz T.* Sensitivity analysis and parameter identification of a time dependent constitutive model for rock salt // J. Comput. Appl. Math. 2016. Vol. 293. P. 128-138. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.03.049
16. *McDowell D.L.* A perspective on trends in multiscale plasticity // Int. J. Plast. 2010. Vol. 26. P. 1280-1309. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008
17. *Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D.* Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications // Acta Materialia. 2010. Vol. 58. P. 1152-1211. https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.10.058

18. *Beyerlein I., Knezevic M.* Review of microstructure and micromechanism-based constitutive modeling of polycrystals with a low-symmetry crystal structure // J. Mater. Res. 2018. Vol. 33. P. 3711-3738. https://doi.org/10.1557/jmr.2018.333
19. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. 605 с. https://doi.org/10.15372/MULTILEVEL2019TPV
20. *Guo Y.B., Wen Q., Horstemeyer M.F.* An internal state variable plasticity-based approach to determine dynamic loading history effects on material property in manufacturing processes // Int. J. Mech. Sci. 2005. Vol. 47. P. 1423-1441. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.04.015
21. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Швейкин А.И.* Определяющие соотношения и их применение для описания эволюции микроструктуры // Физ. мезомех. 2009. Т. 12, № 3. С. 61-71. (English version https://doi.org/10.1016/j.physme.2010.03.005)
22. *Maugin G.A.* The saga of internal variables of state in continuum thermos-mechanics (1893-2013) // Mech. Res. Comm. 2015. Vol. 69. P. 79-86. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.06.009
23. *Швейкин А.И., Шарифуллина Э.Р., Трусов П.В., Пушков Д.А.* Об оценке чувствительности статистических многоуровневых моделей поликристаллических металлов к возмущениям параметров // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 2. С. 214-231. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.2.17
24. *Yang Z., Elgamal A.* Application of unconstrained optimization and sensitivity analysis to calibration of a soil constitutive model // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 2003. Vol. 27. P. 1277-1297. https://doi.org/10.1002/nag.320
25. *Qu J., Xu B., Jin Q.* Parameter identification method of large macro-micro coupled constitutive models based on identifiability analysis // CMC. 2010. Vol. 20. P. 119-157. https://doi.org/10.3970/cmc.2010.020.119
26. *Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A.* Parameter identification in elasto-plasticity: distance between parameters and impact of measurement errors // ZAMM. 2019. Vol. 99. e201800340. https://doi.org/10.1002/zamm.201800340
27. *Kotha S., Ozturk D., Ghosh S.* Parametrically homogenized constitutive models (PHCMs) from micromechanical crystal plasticity FE simulations, part I: Sensitivity analysis and parameter identification for titanium alloys // Int. J. Plast. 2019. Vol. 120. P. 296-319. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.05.008
28. *Diehl M.* Review and outlook: mechanical, thermodynamic, and kinetic continuum modeling of metallic materials at the grain scale // MRS Communications. 2017. Vol. 7. P. 735-746. https://doi.org/10.1557/mrc.2017.98
29. *Knezevic M., Beyerlein I.* Multiscale modeling of microstructure-property relationships of polycrystalline metals during thermo-mechanical deformation // Adv. Eng. Mater. 2018. Vol. 20. 1700956. https://doi.org/10.1002/adem.201700956
30. *Трусов П.В., Швейкин А.И., Кондратьев Н.С., Янц А.Ю.* Многоуровневые модели в физической мезомеханике металлов и сплавов: результаты и перспективы // Физ. мезомех. 2020. Т. 23, № 6. С. 33-62. https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16003
31. *Трусов П.В.* Классические и многоуровневые конститутивные модели для описания поведения металлов и сплавов: проблемы и перспективы (в порядке обсуждения) // Изв. РАН. МТТ. 2021. № 1. С. 69-82. https://doi.org/10.31857/S0572329921010128
32. *Васин Р.А.* Свойства функционалов пластичности у металлов, определяемые в экспериментах на двузвенных траекториях деформации // Упругость и неупругость. М.: МГУ, 1987. С. 115-127.
33. *Аннин Б.Д., Жигалкин В.М.* Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 342 с.
34. *Зубчанинов В.Г.* Механика сплошных деформируемых сред. Тверь: Изд-во ТГТУ, ЧуДо, 2000. 703 с.
35. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
36. *Астарита Дж., Марруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.
37. *Rice J.R.* Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity // J. Mech. Phys. Solid. 1971. Vol. 19. P. 433-455. https://doi.org/10.1016/0022-5096(71)90010-X
38. *Mandel J.* Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiquest // Int. J. Solid. Struct. 1973. Vol. 9. P. 725-740. https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90120-0
39. *Aravas N.* Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals // Int. J. Solids Struct. 1992. Vol. 29. P. 2137-2157. https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90062-X
40. *Aravas N.* Finite-strain anisotropic plasticity and the plastic spin // Modelling Simul. Mater. Sci. Eng. 1994. Vol. 2. P. 483-504. https://doi.org/10.1088/0965-0393/2/3A/005
41. *Dafalias Y.F.* On multiple spins and texture development. Case study: kinematic and orthotropic hardening // Acta Mechanica. 1993. Vol. 100. P. 171-194. https://doi.org/10.1007/BF01174788
42. *Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И.* Анализ деформирования ГЦК-металлов с использованием физической теории упругопластичности // Физ. мезомех. 2010. Т. 13, № 3. С. 21-30. (English version https://doi.org/10.1016/j.physme.2011.04.006)
43. *Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П.* Введение в системный анализ. М.: Высшая школа, 1989. 367 с.
44. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
45. *Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
46. *Роговой А.А.* Формализованный подход к построению моделей механики деформируемого твердого тела. Ч. 1. Основные соотношения механики сплошных сред. М.: Изд-во ИКИ, 2021. 288 с.
47. *Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю.* О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // Физ. мезомех. 2016. Т. 19, № 2. С. 47-65. (English version https://doi.org/10.1134/S1029959917040014)
48. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* О разложении движения и определяющих соотношениях в геометрически нелинейной упруговязкопластичности кристаллитов // Физ. мезомех. 2016. Т. 19, № 3. С. 25-38. (English version https://doi.org/10.1134/S1029959917040026)
49. *Trusov P.V., Shveykin A.I., Kondratev N.S.* Multilevel metal models: formulation for large displacements gradients // Nanoscience and Technology: An International Journal. 2017. Vol. 8. P. 133-166. https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.v8.i2.40

50. *Трусов П.В., Швейкин А.И., Нечаева Е.С., Волегов П.С.* Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры // Физ. мезомех. 2012. Т. 15, № 1. С. 33-56. https://doi.org/10.24411/1683-805X-2012-00007
51. *Habraken A.M.* Modelling the plastic anisotropy of metals // Arch. Computat. Methods Eng. 2004. Vol. 11. P. 3-96. https://doi.org/10.1007/BF02736210
52. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физ. мезомех. 2011. Т. 14, № 4. С. 17-28. (English version https://doi.org/10.1134/S1029959913010037)
53. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физ. мезомех. 2011. Т. 14, № 5. С. 5-30. (English version https://doi.org/10.1134/S1029959913020021)
54. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 495 с.
55. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
56. *Ильюшин А.А.* Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
57. *Швейкин А.И.* Многоуровневые модели поликристаллических металлов: сопоставление определяющих соотношений для кристаллитов // ППП. 2017. Т. 79, № 4. С. 385-397.
58. *Швейкин А.И., Трусов П.В.* Сопоставление сформулированных в терминах актуальной и разгруженной конфигураций геометрически нелинейных упруговязкопластических определяющих соотношений для кристаллитов // Физ. мезомех. 2016. Т. 19, № 5. С. 48-57. (English version https://doi.org/10.1134/S1029959918030025)
59. *Shveykin A.I., Trusov P.V.* Multilevel models of polycrystalline metals: Comparison of relations describing the rotations of crystallite lattice // Nanoscience and Technology: An International Journal. 2019. Vol. 10. P. 1-20. https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018028673
60. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М., Л.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1950. 470 с.
61. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с. (English version https://doi.org/10.1007/978-3-662-40368-6)
62. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
63. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
64. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
65. *Lyapunov A.M.* The general problem of the stability of motion // Int. J. Contr. 1992. Vol. 55. P. 531-534. https://doi.org/10.1080/00207179208934253
66. *Азбелев Н.В., Симонов П.М.* Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. 229 с.
67. *Линь Ц.-Ц.* Теория гидродинамической устойчивости. М.: Изд. иностр. лит., 1958. 196 с.
68. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А.* Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 318 с.
69. *Баландин А.С., Сабатулина Т.Л.* Локальная устойчивость одной модели популяции в условиях воздействия вредных веществ // Сибирские электронные математические известия. 2015. Т. 12. С. 610-624. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.049
70. *Демидова А.В., Дружинина О.В., Масина О.Н.* Исследование устойчивости модели популяционной динамики на основе построения стохастических самосогласованных моделей и принципа редукции // Вестник РУДН. Сер. Математика. Информатика. Физика. 2015. № 3. С. 18-29.
71. *Тимошенко С.П., Гере Дж.* Механика материалов. М.: Лань, 2002. 672 с.
72. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
73. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1955. 176 с.
74. *Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St.* Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method // International Journal of Computers, Communications & Control. 2009. Vol. 4. P. 415-426. https://doi.org/10.15837/ijccc.2009.4.2457
75. *Li Y., Chen Y.Q., Podlubny I.* Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability // Comput. Math. Appl. 2010. Vol. 59. P. 1810-1821. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.019
76. *Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A.* Lyapunov functions for fractional order systems // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2014. Vol. 19. P. 2951-2957. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.022
77. *Георгиевский Д.В., Квачёв К.В.* Метод Ляпунова–Мовчана в задачах устойчивости течений и процессов деформирования // ПММ. 2014. Вып. 6. С. 862-885.
78. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009. 572 с.
79. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с.
80. *Гитман М.Б.* Введение в стохастическую оптимизацию. Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. 104 с.
81. *Romanov K.A., Shveykin A.I.* Investigation of HCP metal mesolevel model sensitivity to lattice orientation perturbations // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2216. 020010. https://doi.org/10.1063/5.0003386

References

1. Trusov P.V. (ed.) *Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye* [Introduction to mathematical modeling] Moscow, Logos, 2007. 440 p.
2. Sobol' I.M. Ob otsenke chuvstvitel'nosti nelineynykh matematicheskikh modeley [On the estimation of the sensitivity of nonlinear mathematical models]. *Matem. modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations,* 1990, vol. 2, no. 1, pp. 112-118.
3. Archer G.E.B., Saltelli A., Sobol I.M. Sensitivity measures, anova-like Techniques and the use of bootstrap. *J. Stat. Comput. Simulat.*, 1997, vol. 58, pp. 99-120. https://doi.org/10.1080/00949659708811825
4. Saltelli A., Tarantola S., Chan K.P.-S. A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, 1999, vol. 41, pp. 39-56. https://doi.org/10.1080/00401706.1999.10485594

5. Sobol I.M. Global sensitivity indices for the investigation of nonlinear mathematical models. *Matem. modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2005, vol. 17, no. 9, pp. 43-52.
6. Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S. *Global sensitivity analysis. The Primer*. John Wiley & Sons Ltd., 2008. 292 p.
7. Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. Observational data assimilation in the problem of Black Sea circulation and sensitivity analysis of its solution. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2013, vol. 49, pp. 592-602. https://doi.org/10.1134/S0001433813060029
8. Nurislamova L.F., Gubaydullin I.M. Reduction of detailed schemes for chemical transformations of formaldehyde and hydrogen oxidation reactions based on a sensitivity analysis of a mathematical model. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye – Numerical methods and programmin*g, 2014, vol. 15, no. 4, pp. 685-696.
9. Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B., Tsvetkov I.N. Stochastic sensitivity of equilibrium and cycles of 1D discrete maps. *Izv. vuzov. PND – Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2009, vol. 17, no. 6, pp. 74-85. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-6-74-85
10. Nossent J., Elsen P., Bauwens W. Sobol' sensitivity analysis of a complex environmental model. *Environ. Model. Software*, 2011, vol. 26, pp. 1515-1525. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2011.08.010
11. Gan Y., Duan Q., Gong W., Tong C., Sun Y., Chu W., Ye A., Miao C., Di Z. A comprehensive evaluation of various sensitivity analysis methods: A case study with a hydrological model. *Environ. Model. Software*, 2014, vol. 51, pp. 269-285. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2013.09.031
12. Haug E.J., Choi K.K., Komkov V. *Design sensitivity analysis of structural systems*. Academic Press, 1986. 370 p.
13. Kleiber M., Hien T.D., Postek E. Incremental finite element sensitivity analysis for non-linear mechanics applications. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1994, vol. 37, pp. 3291-3308. https://doi.org/10.1002/nme.1620371906
14. Gutiérrez M.A., de Borst R. Simulation of size-effect behaviour through sensitivity analyses. *Eng. Fract. Mech.*, 2003, vol. 70, pp. 2269-2279. https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00221-7
15. Khaledi K., Mahmoudi E., Datcheva M., König D., Schanz T. Sensitivity analysis and parameter identification of a time dependent constitutive model for rock salt. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 128-138. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.03.049
16. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity. *Int. J. Plast.*, 2010, vol. 26, pp. 1280-1309. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008
17. Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications. *Acta Materialia*, 2010, vol. 58, pp. 1152-1211. https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.10.058
18. Beyerlein I., Knezevic M. Review of microstructure and micromechanism-based constitutive modeling of polycrystals with a low-symmetry crystal structure. *J. Mater. Res.*, 2018, vol. 33, pp. 3711-3738. https://doi.org/10.1557/jmr.2018.333
19. Trusov P.V., Shveykin A.I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskikh materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multilevel models of mono- and polycrystalline materials: theory, algorithms, examples of application]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 2019. 605 p. https://doi.org/10.15372/MULTILEVEL2019TPV
20. Guo Y.B., Wen Q., Horstemeyer M.F. An internal state variable plasticity-based approach to determine dynamic loading history effects on material property in manufacturing processes. *Int. J. Mech. Sci.*, 2005, vol. 47, pp. 1423-1441. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2005.04.015
21. Trusov P.V., Ashikhmin V.N., Volegov P.S., Shveykin A.I. Constitutive relations and their application to the description of microstructure evolution. *Phys. Mesomech.*, 2010, vol. 13, pp. 38-46. https://doi.org/10.1016/j.physme.2010.03.005
22. Maugin G.A. The saga of internal variables of state in continuum thermos-mechanics (1893-2013). *Mech. Res. Comm.*, 2015, vol. 69, pp. 79-86. https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2015.06.009
23. Shveykin A.I., Sharifullina E.R., Trusov P.V., Pushkov D.A. About estimation of sensitivity of statistical multilevel polycrystalline metal models to parameter variations. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 214-231. https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.2.17
24. Yang Z., Elgamal A. Application of unconstrained optimization and sensitivity analysis to calibration of a soil constitutive model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2003, vol. 27, pp. 1277-1297. https://doi.org/10.1002/nag.320
25. Qu J., Xu B., Jin Q. Parameter identification method of large macro-micro coupled constitutive models based on identifiability analysis. *CMC*, 2010, vol. 20, pp. 119-157. https://doi.org/10.3970/cmc.2010.020.119
26. Shutov A.V., Kaygorodtseva A.A. Parameter identification in elasto-plasticity: distance between parameters and impact of measurement errors. *ZAMM*, 2019, vol. 99, e201800340. https://doi.org/10.1002/zamm.201800340
27. Kotha S., Ozturk D., Ghosh S. Parametrically homogenized constitutive models (PHCMs) from micromechanical crystal plasticity FE simulations, part I: Sensitivity analysis and parameter identification for titanium alloys. *Int. J. Plast.*, 2019, vol. 120, pp. 296-319. https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2019.05.008
28. Diehl M. Review and outlook: mechanical, thermodynamic, and kinetic continuum modeling of metallic materials at the grain scale. *MRS Communications*, 2017, vol. 7, pp. 735-746. https://doi.org/10.1557/mrc.2017.98
29. Knezevic M., Beyerlein I. Multiscale modeling of microstructure-property relationships of polycrystalline metals during thermo-mechanical deformation. *Adv. Eng. Mater.*, 2018, vol. 20, 1700956. https://doi.org/10.1002/adem.201700956
30. Trusov P.V., Shveikin A.I., Kondratyev N.S., Yants A.Yu. Multilevel models in physical mesomechanics of metals and alloys: results and prospects. *Phys. Mesomech.*, 2020, vol. 23, no. 6, pp. 33-62. https://doi.org/10.24411/1683-805X-2020-16003
31. Trusov P.V. Classical and multi-level constitutive models for describing the behavior of metals and alloys: Problems and Prospects (as a matter for discussion). *Mech. Solids*, 2021, vol. 56, pp. 55-64. https://doi.org/10.3103/S002565442101012X
32. Vasin R.A. Svoystva funktsionalov plastichnosti u metallov, opredelyayemyye v eksperimentakh na dvuzvennykh trayektoriyakh deformatsii [*Properties of plasticity functionals for metals determined in experiments on two-link deformation trajectories*] // Uprugost' i neuprugost' [Elasticity and inelasticity]. Moscow, MGU, 1987. Pp. 115-127.

33. Annin B.D., Zhigalkin V.M. *Povedeniye materialov v usloviyakh slozhnogo nagruzheniya* [Behavior of materials under complex loading conditions]. Novosibirsk, Izd-vo SO RAN, 1999. 342 p.
34. Zubchaninov V.G. *Mekhanika sploshnykh deformiruyemykh sred* [Mechanics of continuous deformable media]. Tver, Izd-vo TGTU, ChuDo, 2000. 703 p.
35. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics*. USA, Maryland, Baltimore, The Johns Hopkins University, 1972. 304 p.
36. Astarita G., Marrucci G. *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*. McGraw-Hill, 1974. 296 p.
37. Rice J.R. Inelastic constitutive relations for solids: An internal-variable theory and its application to metal plasticity. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1971, vol. 19, pp. 433-455. https://doi.org/10.1016/0022-5096(71)90010-X
38. Mandel J. Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiquest. *Int. J. Solid. Struct.*, 1973, vol. 9, pp. 725-740. https://doi.org/10.1016/0020-7683(73)90120-0
39. Aravas N. Finite elastoplastic transformations of transversely isotropic metals. *Int. J. Solids Struct.*, 1992, vol. 29, pp. 2137-2157. https://doi.org/10.1016/0020-7683(92)90062-X
40. Aravas N. Finite-strain anisotropic plasticity and the plastic spin. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 1994, vol. 2, pp. 483-504. https://doi.org/10.1088/0965-0393/2/3A/005
41. Dafalias Y.F. On multiple spins and texture development. Case study: kinematic and orthotropic hardening. *Acta Mechanica*, 1993, vol. 100, pp. 171-194. https://doi.org/10.1007/BF01174788
42. Trusov P.V., Ashikhmin V.N., Shveykin A.I. Physical elastoplastic analysis of deformation of FCC metals. *Phys. Mesomech.*, 2011, vol. 14, pp. 40-48. https://doi.org/10.1016/j.physme.2011.04.006
43. Peregudov F.I., Tarasenko F.P. *Vvedeniye v sistemnyy analiz* [Introduction to systems analysis]. Moscow, Vysshaya shkola, 1989. 367 p.
44. Lurie A.I. *Nonlinear theory of elasticity*. Elsevier, 1990. 617 p.
45. Pozdeyev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shiye uprugoplasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications]. Moscow, Nauka, 1986. 232 p.
46. Rogovoy A.A. *Formalizovannyy podkhod k postroyeniyu modeley mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela. Ch. 1. Osnovnyye sootnosheniya mekhaniki sploshnykh sred* [A formalized approach to the construction of models of solid mechanics. Part 1. Basic relations of continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo IKI, 2021. 288 p.
47. Trusov P.V., Shveykin A.I., Yanz A.Yu. Motion decomposition, frame-indifferent derivatives, and constitutive relations at large displacement gradients from the viewpoint of multilevel modeling. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 357-376. https://doi.org/10.1134/S1029959917040014
48. Trusov P.V., Shveykin A.I. On motion decomposition and constitutive relations in geometrically nonlinear elastoviscoplasticity of crystallites. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 377-391. https://doi.org/10.1134/S1029959917040026
49. Trusov P.V., Shveykin A.I., Kondratev N.S. Multilevel metal models: formulation for large displacements gradients. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2017, vol. 8, pp. 133-166. https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.v8.i2.40
50. Trusov P.V., Shveykin A.I., Nechaeva E.S., Volegov P.S. Multilevel models of inelastic deformation of materials and their application for description of internal structure evolution. *Phys. Mesomech.*, 2012, vol. 15, pp. 155-175. https://doi.org/10.1134/S1029959912020038
51. Habraken A.M. Modelling the plastic anisotropy of metals. *Arch. Computat. Methods Eng.*, 2004, vol. 11, pp. 3-96. https://doi.org/10.1007/BF02736210
52. Trusov P.V., Shveykin A.I. Multilevel crystal plasticity models of single- and polycrystals. Statistical models. *Phys. Mesomech.*, 2013, vol. 16, no. 1, pp. 23-33. https://doi.org/10.1134/S1029959913010037
53. Trusov P.V., Shveykin A.I. Multilevel crystal plasticity models of single- and polycrystals. Direct models. *Phys. Mesomech.*, 2013, vol. 16, no. 2, pp. 99-124. https://doi.org/10.1134/S1029959913020021
54. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980. 495 p.
55. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka, 1986. 287 p.
56. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum mechanics]. Moscow, Izd-vo MGU, 1990. 310 p.
57. Shveykin A.I. Mnogourovnevyye modeli polikristallicheskikh metallov: sopostavleniye opredelyayushchikh sootnosheniy dlya kristallitov [Multilevel models of polycrystalline metals: comparison of constitutive relations for crystallites]. *Probl. prochnosti i plastichnosti – Probl. of strength and plasticity*, 2017, vol. 79, no. 4, pp. 385-397.
58. Shveikin A.I., Trusov P.V. Correlation between geometrically nonlinear elastoviscoplastic constitutive relations formulated in terms of the actual and unloaded configurations for crystallites. *Phys. Mesomech.*, 2018, vol. 21, pp. 193-202. https://doi.org/10.1134/S1029959918030025
59. Shveykin A.I., Trusov P.V. Multilevel models of polycrystalline metals: Comparison of relations describing the rotations of crystallite lattice. *Nanoscience and Technology: An International Journal*, 2019, vol. 10, pp. 1-20. https://doi.org/10.1615/NanoSciTechnolIntJ.2018028673
60. Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya* [General problem of motion stability]. Moscow, Leningrad, Gosudarstvennoye izd-vo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. 470 p.
61. Cesari L. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Springer-Verlag, 1959. 278 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-40368-6
62. Barbashin E.A. *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti* [Introduction to the theory of stability]. Moscow, Nauka, 1967. 223 p.
63. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka, 1967. 472 p.
64. Berge P., Pomeau Y., Vidal C. *L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence* [Order in chaos. On a deterministic approach to turbulence]. Hermann, Editeurs des sciences et des arts, 1988. 353 p.
65. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *Int. J. Contr.*, 1992, vol. 55, pp. 531-534. https://doi.org/10.1080/00207179208934253

66. Azbelev N.V., Simonov P.M. *Ustoychivost' resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi* [Stability of solutions of equations with ordinary derivatives]. Perm, Izd-vo Perm. un-ta, 2001. 229 p.
67. Lin C.C. *The theory hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1955. 176 p.
68. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M., Nepomnyashchiy A.A. *Ustoychivost' konvektivnykhtecheniy* [Stabilityofconvectivealows]. Moscow, Nauka, 1989. 318 p.
69. Balandin A.S., Sabatulina T.L. The local stability of a population dynamics model in conditions of deleterious effects. *Sibirskiye elektronnyye matematicheskiye izvestiya – Siberian electronic mathematical reports*, 2015, vol. 12, pp. 610-624. https://doi.org/10.17377/semi.2015.12.049
70. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N. Stability research of population dynamics model on the basis of construction of the stochastic self-consistent models and the principle of the reduction. *Vestnik RUDN. Ser. Matematika. Informatika. Fizika – Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science*, 2015, no. 3, pp. 18-29.
71. Timoshenko S.P., Gere Dzh. *Mekhanika materialov* [Mechanics of materials]. Moscow, Lan', 2002. 672 p.
72. Krasovskiy N.N. *Nekotoryye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of stability of motion.]. Moscow, Fizmatgiz, 1959. 211 p.
73. Chetayev N.G. *Ustoychivost' dvizheniya* [Stability of movement]. Moscow, Nauka, 1955. 176 p.
74. Precup R.-E., Tomescu M.-L., Preitl St. Fuzzy logic control system stability analysis based on Lyapunov's direct method. *International Journal of Computers, Communications & Control*, 2009, vol. 4, pp. 415-426. https://doi.org/10.15837/ijccc.2009.4.2457
75. Li Y., Chen Y.Q., Podlubny I. Stability of fractional-order nonlinear dynamic systems: Lyapunov direct method and generalized Mittag–Leffler stability. *Comput. Math. Appl.*, 2010, vol. 59, pp. 1810-1821. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.019
76. Aguila-Camacho N., Duarte-Mermoud M.A., Gallegos J.A. Lyapunov functions for fractional order systems. *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2014, vol. 19, pp. 2951-2957. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.022
77. Georgievskij D.V., Kvachyov K.V. Metod Lyapunova – Movchana v zadachah ustojchivosti techenij i processov deformirovaniya [*Lyapunov - Movchan method in problems of stability of flows and deformation processes*]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* – Applied Mathematics and Mechanics, 2014, no. 6, pp. 862-885.
78. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 572 p.
79. Wilkinson J.H. *The algebraic eigenvalue problem*. Clarendon Press, 1965. 662 p.
80. Gitman M.B. *Vvedeniye v stokhasticheskuyu optimizatsiyu* [Introduction to stochastic optimization]. Perm, Izd-vo Perm. nats. issled. politekhn. un-ta, 2014. 104 p.
81. Romanov K.A., Shveykin A.I. Investigation of HCP metal mesolevel model sensitivity to lattice orientation perturbations. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2216, 020010. https://doi.org/10.1063/5.0003386

Поступила в редакцию 12.03.2021; после доработки 21.03.2021; принята к опубликованию 22.03.2021

Сведения об авторах

Швейкин Алексей Игоревич, дфмн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29; e-mail: shveykin@pstu.ru

Трусов Петр Валентинович, дфмн, проф., зав.каф., ПНИПУ; e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru

Романов Кирилл Андреевич, студ., ПНИПУ; e-mail: k.a.kriv@mail.ru