

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.1.4](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.4)

УДК 539.3, 539.8

## НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНО-ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ

А.В. Земсков<sup>1,2</sup>, Д.В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>, Г.М. Файкин<sup>1</sup><sup>1</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация<sup>2</sup>НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

Рассматривается нестационарная задача изгиба консольно-закрепленной упруго-диффузионной однородной изотропной балки Бернулли–Эйлера. Математическая постановка представляет собой замкнутую систему уравнений поперечных нестационарных колебаний балки с учетом диффузии. Разрешающая система уравнений изгиба балки получена из общей модели упругой диффузии в сплошной среде с помощью вариационного принципа Даламбера. При этом предполагается, что прогибы балки являются малыми и выполняется гипотеза плоских сечений. Повороты сечений удовлетворяют гипотезе Бернулли–Эйлера. Решение ищется методом эквивалентных граничных условий, который позволяет перейти от исходной формулировки с произвольными граничными условиями к задаче того же вида, с той же геометрией области, но с заведомо достижимым решением. В данной работе в качестве вспомогательной выступает такая задача, решение которой находится путем интегрального преобразования Лапласа по времени и разложением в тригонометрические ряды Фурье. Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий исходной и вспомогательной задач. Они являются интегральными уравнениями Вольтерра 1-го рода и образуют систему, которая разрешается численно с использованием квадратурных формул средних прямоугольников. В итоге решение исходной задачи представляется в виде сверток функций Грина вспомогательной задачи с функциями, определяемыми из решения системы интегральных уравнений Вольтерра. На примере двухкомпонентного материала выполнено численное исследование взаимодействия нестационарных полей – механического и диффузионного, в изотропной балке. Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости искомых полей перемещений балки и приращений концентраций компонентов среды от времени и координат. Исходя из их анализа сделан вывод о влиянии связанности механо-диффузионных полей на напряженно-деформированное состояние и массоперенос в балке.

*Ключевые слова:* упругая диффузия, функция Грина, балка Эйлера–Бернулли, принцип Даламбера, метод эквивалентных граничных условий, численное исследование

## UNSTEADY BENDING OF A CANTILEVERED EULER–BERNOULLI BEAM WITH DIFFUSION

A.V. Zemskov<sup>1,2</sup>, D.V. Tarlakovskii<sup>1,2</sup> and G.M. Faykin<sup>1</sup><sup>1</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation<sup>2</sup>Research Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

We considered the problem of unsteady direct bending of an isotropic homogeneous elastodiffusive cantilevered Euler–Bernoulli beam. For the mathematical formulation of the problem, we use the closed system of equations of transverse unsteady beam vibrations with inner diffusion. The formulation is based on the model of elastic diffusion using the d'Alembert variational principle. It is assumed that the deflections of the beam are small and the hypothesis of flat sections is fulfilled. The Euler–Bernoulli hypothesis is valid for section rotations. A solution to the problem is sought using the method of equivalent boundary conditions, which allows a transition from the initial formulation with arbitrary boundary conditions to the problem of the same type and with the same domain geometry. First, an auxiliary problem is solved using the integral Laplace transform in time and trigonometric Fourier series. Then, some relations connecting the boundary conditions right-hand sides of the original and auxiliary problems are constructed. These relations are the Volterra integral equations of the first kind. For solving this system, quadrature formulas of an average rectangle are used. Finally, the solution of the original problem is represented in the form of the convolution of the Green's functions for the auxiliary problem with the functions determined by solving the system of the Volterra integral equations. The interaction between unsteady mechanical and diffusion fields is analyzed using an isotropic beam as an example. Graphs showing the dependence of the displacement fields and concentration increments on time and coordinates are given. Analysis of the results obtained led to conclusion that the coupling action of mechanical and diffusion fields affects the stress-strain state and mass transfer in a beam.

*Key words:* elastic diffusion, Green's function, Euler–Bernoulli beam, d'Alembert principle, equivalent boundary condition method, numerical analysis

### 1. Введение

Эффекты взаимодействия полей разной физической природы, проявляющиеся в виде механо-диффузии, термомехано-диффузии, электродиффузии, магнитодиффузии и другого, хорошо изучены экспериментально и широко используются в технике. Различные постановки и методы решения задач механо-диффузии с возможным учетом других физических полей в последние десятилетия рассматривались в работах как отечественных, так и зарубежных авторов, что говорит об актуальности исследований в данной области [1–4].

С другой стороны, следует отметить, что подавляющее большинство публикаций связано с моделированием стационарных и нестационарных процессов в телах канонической формы: в слое или

полупространстве. В то же время реальные тела имеют конечный размер, поэтому наибольший практический интерес вызывают задачи механо диффузии в балках, пластинах и оболочках, являющихся основными элементами реальных конструкций.

Данной тематике посвящено сравнительно немного публикаций, среди которых можно отметить работу [5], в которой оценивается влияние диффузионных процессов на несущую способность полой трансверсально-изотропной оболочки. Контактное взаимодействие стержня с упругим полупространством обсуждается в статьях [6, 7]. Публикации [8–10] содержат исследования механо диффузионных процессов в пластинах. Расчет сферических оболочек с учетом диффузии рассмотрен в [11].

В перечисленных работах механо диффузионные процессы являются стационарными, что полезно при изучении установившихся режимов работы различного рода механических систем. Для анализа кратковременных — импульсных — воздействий необходимо использовать нестационарные модели. Так, в публикациях [12–14] моделируются эффекты взаимодействия механического и диффузионного полей, вызванные нестационарным изгибом свободно опертых балок и пластин.

Как известно, граничные условия существенно влияют на подход к решению начально-краевой задачи и сложность его реализации. Например, условия свободного опирания позволяют строить решение в виде рядов по собственным функциям соответствующего упруго-диффузионного оператора. Для консольно-закрепленной балки, которая рассматривается в данной работе, получить такие функции не представляется возможным. В связи с этим применяется метод эквивалентных граничных условий. Суть метода заключается в переходе от исходной задачи к вспомогательной задаче для того же предмета исследования, но с граничными условиями, допускающими представление решения в виде рядов Фурье. Далее выводятся соотношения, связывающие правые части граничных условий для одинаковых параметров обеих задач. Они имеют вид интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода. Система этих уравнений решается численно, с помощью квадратурных формул.

## 2. Постановка задачи

В работе рассматривается нестационарная задача упруго-диффузионного изгиба консольно-закрепленной однородной изотропной балки Бернулли–Эйлера при действии силы, приложенной к свободному концу (Рис. 1).

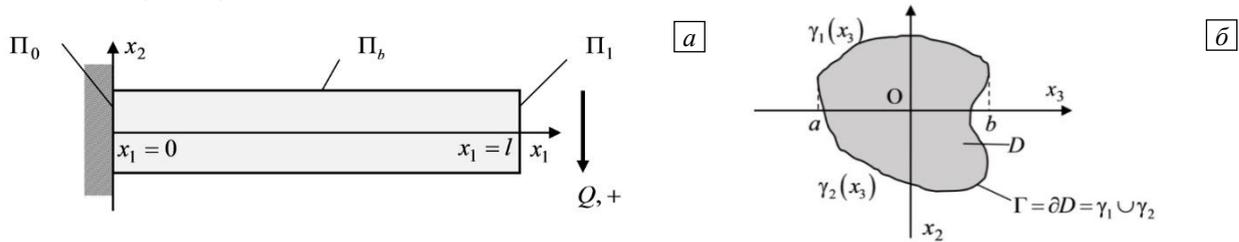


Рис. 1. Иллюстрации к постановке задачи: схема приложенных усилий (а) и ориентация координатных осей в поперечном сечении балки (б)

Для описания общего случая изгибного деформирования балки используется линейная модель упруго-диффузионных процессов в сплошных средах в прямоугольной декартовой системе координат. Если деформируемая среда однородна, уравнения имеют вид [15–18]:

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad \dot{\eta}^{(q)} = -\frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} + Y^{(q)} \quad (i, j = \overline{1,3}, \quad q = \overline{1,N}), \quad (1)$$

где точка над символом обозначает производную по времени,  $\sigma_{ij}$  и  $J_i^{(q)}$  — компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока, которые определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{q=1}^N \alpha_{ij}^{(q)} \eta^{(q)}, \quad J_i^{(q)} = -\sum_{l=1}^N D_{ij}^{(q)} g^{(q)} \frac{\partial \eta^{(l)}}{\partial x_j} + \Lambda_{ijkl}^{(q)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (q = \overline{1,N}). \quad (2)$$

Все величины в (1) и (2) являются безразмерными:

$$x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad u_i = \frac{u_i^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}^*}{C_{1111}}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}^*}{\rho}, \quad \alpha_{ij}^{(q)} = \frac{\alpha_{ij}^{*(q)}}{C_{1111}}, \quad (3)$$

$$D_{ij}^{(q)} = \frac{D_{ij}^{*(q)}}{Cl}, \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{ij}^{*(q)} \alpha_{kl}^{*(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad F_i = \frac{\rho l F_i^*}{C_{1111}}, \quad Y^{(q)} = \frac{l Y^{*(q)}}{C},$$

где в качестве характерных масштабов используются длина балки —  $l$ , и скорость волны растяжения-сжатия в упругой среде —  $C$ . Также приняты обозначения:  $t$  — время;  $x_i^*$  — прямоугольные декартовы координаты;  $u_i^*$  — компоненты вектора перемещений;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  — приращение концентрации  $q$ -го вещества в составе многокомпонентной однородной среды;  $n_0^{(q)}$  и  $n^{(q)}$  — начальная и актуальная концентрации  $q$ -го вещества;  $C_{ijkl}^*$  — компоненты тензора упругих постоянных;  $\rho$  — плотность среды;  $\alpha_{ij}^{*(q)}$  — коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счет диффузии;  $D_{ij}^{*(q)}$  — коэффициенты самодиффузии;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T_0$  — температура среды;  $m^{(q)}$  — молярная масса  $q$ -го вещества;  $F_i^*$  — плотность массовых сил;  $Y^{*(q)}$  — плотность объемных источников массопереноса.

Уравнения (1) и (2) включают  $N$  независимых компонент, описывающих процесс деформирования многокомпонентной среды, состоящей из  $N+1$ -го вещества. При этом приращение массовой доли  $N+1$ -го вещества выражается через приращения долей остальных  $N$  компонент среды:

$$\eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^N \eta^{(q)},$$

что обеспечивает выполнение закона сохранения массы:

$$\sum_{q=1}^{N+1} \eta^{(q)} = 0.$$

Начально-краевые условия относительно независимых компонент уравнений в общем виде записываются так:

$$u_i|_{\tau=0} = u_{i0}, \quad \dot{u}_i|_{\tau=0} = v_{i0}, \quad \eta^{(q)}|_{\tau=0} = \eta_0^{(q)} \quad (i, j = \overline{1,3}, \quad q = \overline{1,N}), \quad (4)$$

$$u_i|_{\Pi_u} = U_i, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\Pi_\sigma} = P_i \quad (\tau > 0), \quad \partial G = \Pi_u \cup \Pi_\sigma, \quad (5)$$

$$\eta^{(q)}|_{\Pi_\eta} = N^{(q)}, \quad J_i^{(q)}|_{\Pi_J} = I_i^{(q)} \quad (\tau > 0, \quad q = \overline{1,N}), \quad \partial G = \Pi_\eta \cup \Pi_J.$$

Здесь:  $\partial G$  — граница области решения задачи  $G$ ;  $n_i$  — компоненты единичного вектора внешней нормали к  $\partial G$ ;  $u_{i0}$ ,  $v_{i0}$ ,  $\eta_0^{(q)}$  — заданные функции пространственных координат. Далее полагается, что  $u_{i0} = 0$ ,  $v_{i0} = 0$ ,  $\eta_0^{(q)} = 0$ . Величины, стоящие в правых частях граничных условий (5), есть поверхностные кинематические ( $U_i$ ,  $N^{(q)}$ ) и динамические ( $P_i$ ,  $I_i^{(q)}$ ) возмущения.

Для построения уравнений изгиба балки предпринимаются действия: — осуществляется переход к вариационной формулировке задачи (1), (2), (4), (5). Согласно вариационному принципу Даламбера, их можно записать в виде следующего вариационного уравнения:

$$\int_G \left( \ddot{u}_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - F_i \right) \delta u_i dG + \sum_{q=1}^N \int_G \left( \dot{\eta}^{(q)} + \frac{\partial J_i^{(q)}}{\partial x_i} - Y^{(q)} \right) \delta \eta^{(q)} dG + \iint_{\Pi_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - P_i) \delta u_i dS + \sum_{q=1}^N \iint_{\Pi_J} (J_i^{(q)} - I_i^{(q)}) n_i \delta \eta^{(q)} dS = 0, \quad (6)$$

где  $\delta u_i$  — виртуальные перемещения балки,  $\delta \eta^{(q)}$  — виртуальные приращения концентраций веществ, образующих материал балки;

— формулируются следующие предположения:

1) Область решения задачи — цилиндр  $G = D \times [0,1]$ , где  $D$  — область, занятая поперечным сечением балки. Граница сечения  $\Gamma = \partial D = \gamma_1(x_3) \cup \gamma_2(x_3)$  (см. Рис. 1).

2) Ось  $Ox_3$  является центральной осью сечения. В этом случае

$$\iint_D x_2 dx_2 dx_3 = 0. \quad (7)$$

3) Поверхность балки представляется как  $\Pi = \Pi_0 \cup \Pi_1 \cup \Pi_b$ , где  $\Pi_0$  — торец при  $x_1 = 0$ ,  $\Pi_1$  — торец при  $x_1 = 1$ ,  $\Pi_b$  — боковая поверхность. Предполагается, что боковая поверхность свободна от механических нагрузок, то есть

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Pi_b} = 0. \quad (8)$$

Также считается, что массоперенос через боковую поверхность отсутствует:

$$J_i^{(q)} \Big|_{\Pi_b} = 0. \quad (9)$$

4) Материал балки изотропен:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad \alpha_{ij}^{(q)} = \delta_{ij} \alpha_q, \quad D_{ij}^{(q)} = \delta_{ij} D_q, \quad \Lambda_{ijkl}^{(q)} = \delta_{ij} \delta_{kl} \Lambda_q, \quad (10)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  — безразмерные коэффициенты Ламе,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При этом, в силу (3),  $\lambda + 2\mu = 1$ .

5) С точки зрения процесса массопереноса материал балки — идеальный твердый раствор. В этом случае [15–18]

$$g^{(qr)} = \delta_{qr}, \quad D_{ij}^{(q)} g^{(qr)} = D_{ij}^{(q)} = \delta_{ij} D_q. \quad (11)$$

6) Рассматривается изгиб балки в плоскости  $Ox_1x_2$ . Тогда  $u_k = u_k(x_1, x_2, \tau)$ , при этом ( $k = 1, 2$ ),  $u_3 = 0$ ,  $\epsilon_{i3} = 0$  ( $i = \overline{1, 3}$ ). В этой же плоскости осуществляется массоперенос:  $\eta^{(q)} = \eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau)$ .

7) Поперечные прогибы считаются малыми. Сечения, перпендикулярные оси балки до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений). Тогда искомые величины  $u_1(x_1, x_2, \tau)$ ,  $u_2(x_1, x_2, \tau)$  и  $\eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau)$ , линеаризованные по переменной  $x_2$ , могут быть представлены в виде [12–14]:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \tau) &= u(x_1, \tau) + x_2 \chi(x_1, \tau), & u_2(x_1, x_2, \tau) &= v(x_1, \tau) + x_2 \psi(x_1, \tau), \\ \eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau) &= N_q(x_1, \tau) + x_2 H_q(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (12)$$

8) Вследствие принятой гипотезы Бернулли–Эйлера поперечные сечения после деформации остаются нормальными к изогнутой оси балки. Кроме того, при свободной от нагрузок боковой поверхности можно полагать, что деформации вдоль оси  $Ox_2$ , ввиду малости, отсутствуют. Тогда [12, 14] (штрих означает производную по переменной  $x_1$ )

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0, \quad \chi(x_1, \tau) = -v'(x_1, \tau),$$

а равенства (12) запишутся так:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, \tau) &= u(x_1, \tau) - x_2 v'(x_1, \tau), & u_2(x_1, x_2, \tau) &= v(x_1, \tau), \\ \eta^{(q)}(x_1, x_2, \tau) &= N_q(x_1, \tau) + x_2 H_q(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (10), (11) и (13) компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (u' - x_2 v'') - \sum_{q=1}^N \alpha_q (N_q + x_2 H_q), & \sigma_{22} &= \lambda (u' - x_2 v'') - \sum_{q=1}^N \alpha_q (N_q + x_2 H_q), & \sigma_{12} &= 0, \\ J_1^{(q)} &= -D_q (N_q' + x_2 H_q') + \Lambda_q (u'' - x_2 v'''), & J_2^{(q)} &= -D_q H_q - \Lambda_q v'' \quad (q = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (14)$$

В результате подстановки равенств (7)–(14) в (6) получаются уравнения упруго-диффузионных колебаний балки [12]:

– продольных

$$\ddot{u} = u'' - \sum_{q=1}^N \alpha_q N'_q + \frac{n}{F}, \quad \dot{N}_q = D_q N''_q - \Lambda_q u''' + \frac{y^{(q)}}{F}; \quad (15)$$

– поперечных

$$\ddot{v}'' - a\ddot{v} = v'''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H''_j - \frac{q+m'}{F}, \quad \dot{H}_q = D_q H''_q + \Lambda_q v'''' + \frac{z^{(q)}}{J_3}, \quad \frac{J_3}{F} = a. \quad (16)$$

В (15), (16) приняты обозначения:  $F$  — площадь поперечного сечения балки;  $J_3$  — момент инерции сечения относительно оси  $Ox_3$ ; распределенные погонные нагрузки, соответственно, продольная  $n$ , момент  $m$  и поперечная  $q$ ;  $y^{(q)}$  и  $z^{(q)}$  — линейные плотности объемных источников массопереноса.

Уравнения (15), (16) дополняются краевыми условиями, которые также вытекают из вариационного уравнения (6). В соответствии с постановкой исходной задачи, математическая модель упруго-диффузионного изгиба консоли под действием сосредоточенной нагрузки, приложенной к свободному концу, включает в себя уравнения (16) при  $m=0$ ,  $q=0$  и  $z^{(q)}=0$  и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} v'|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=0} = 0, \quad H_q|_{x=0} = 0, \quad (D_q H'_q + \Lambda_q v''')|_{x=1} = 0, \\ \left( v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j \right)|_{x=1} = 0, \quad \left( v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j - \dot{v}' \right)|_{x=1} = f_{22}(\tau). \end{aligned} \quad (18)$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

### 3. Метод решения

Основная проблема заключается в невозможности построения решения поставленной задачи в виде тригонометрических рядов Фурье. Это существенно осложняет обращение преобразований Лапласа, которое также требуется в применяемом подходе. Для преодоления возникающей трудности используется метод эквивалентных граничных условий [17, 18], который заключается в выполнении ряда шагов.

Вначале вместо исходной задачи рассматривается вспомогательная задача (16) с граничными условиями:

$$\begin{aligned} v'|_{x=0} = 0, \quad v'|_{x=1} = f_{12}^*(\tau), \\ (D_q H'_q + \Lambda_q v''')|_{x=0} = f_{q+2,1}^*(\tau), \quad (D_q H'_q + \Lambda_q v''')|_{x=1} = 0, \\ \left( v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j - \dot{v}' \right)|_{x=0} = f_{21}^*(\tau), \quad \left( v''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j H'_j - \dot{v}' \right)|_{x=1} = f_{22}(\tau), \end{aligned} \quad (19)$$

где функции  $f_{12}^*(\tau)$ ,  $f_{q+2,1}^*(\tau)$ ,  $f_{21}^*(\tau)$  подлежат определению. С учетом (19) решение приобретает вид [12]:

$$\begin{aligned} v(x, \tau) = \int_0^\tau [G_{12}(x, \tau-t) f_{21}^*(t) - G_{12}(1-x, \tau-t) f_{22}(t)] dt - \int_0^\tau G_{11}(1-x, \tau-t) f_{12}^*(t) dt + \\ + \sum_{p=1}^N \int_0^\tau G_{1,p+2}(x, \tau-t) f_{p+2,1}^*(t) dt, \\ \eta_q(x, \tau) = \int_0^\tau [G_{q+1,2}(x, \tau-t) f_{21}^*(t) - G_{q+1,2}(1-x, \tau-t) f_{22}(t)] dt - \int_0^\tau G_{q+1,1}(1-x, \tau-t) f_{12}^*(t) dt + \\ + \sum_{p=1}^N \int_0^\tau G_{q+1,p+2}(x, \tau-t) f_{p+2,1}^*(t) dt, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $G_{mk}$  — поверхностные функции Грина задачи (16), (19), которые являются решениями следующих задач:

$$\ddot{G}'_{1k} - a\ddot{G}_{1k} = G_{1k}^{IV} + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}''', \quad \dot{G}'_{j+1,k} = D_q G_{q+1,k}'' + \Lambda_q G_{1k}^{IV}; \quad (21)$$

$$\left( G_{1k}''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}'' - \dot{G}'_{1k} \right) \Big|_{x_1=0} = \delta_{2k} \delta(\tau), \quad G'_{1k} \Big|_{x_1=0} = \delta_{1k} \delta(\tau), \quad \left( G_{1k}''' + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}'' - \dot{G}'_{1k} \right) \Big|_{x_1=1} = 0, \quad (22)$$

$$G'_{1k} \Big|_{x_1=1} = 0, \quad \left( D_q G'_{q+1,k} + \Lambda_q G_{1k}''' \right) \Big|_{x_1=0} = \delta_{q+2,k} \delta(\tau), \quad \left( D_q G'_{q+1,k} + \Lambda_q G_{1k}''' \right) \Big|_{x_1=1} = 0.$$

Для нахождения функций Грина используется преобразование Лапласа по времени и разложение в тригонометрические ряды Фурье. После применения указанных действий к задаче (21), (22), получается система линейных алгебраических уравнений (индекс  $L$  — означает трансформанту Лапласа,  $\lambda_n = \pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ):

$$k_1(\lambda_n, s) G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = F_{1k}(\lambda_n), \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) - \Lambda_q \lambda_n^4 G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) = F_{q+1,k}(\lambda_n),$$

$$G_{mk}^L(x, s) = \frac{G_{mk}^{Lc}(0, s)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} G_{mk}^{Lc}(\lambda_n, s) \cos \lambda_n x, \quad G_{mk}^{Lc}(\lambda_n, s) = 2 \int_0^1 G_{mk}^L(x, s) \cos \lambda_n x dx,$$

$$k_1(\lambda_n, s) = (\lambda_n^2 + a) s^2 + \lambda_n^4, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = s + D_q \lambda_n^2,$$

$$F_{1k}(\lambda_n) = -2\lambda_n^2 \delta_{1k} + 2\delta_{2k}, \quad F_{1k}(0) = \delta_{2k}, \quad F_{q+1,k}(\lambda_n) = 2\lambda_n^2 \Lambda_q \delta_{1k} - 2\delta_{q+1,k}, \quad F_{q+1,k}(0) = -\delta_{q+1,k}.$$

Решение этой системы находится по формулам Крамера и имеет вид:

$$G_{1k}^{Lc}(0, s) = \frac{\delta_{2k}}{as^2}, \quad G_{q+1,k}^L(0, s) = -\frac{\delta_{q+2,k}}{s},$$

$$G_{1k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,k}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{P_{q+1,2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \quad (23)$$

$$G_{q+1,1}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{2\Lambda_q \lambda_n^2}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} + \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)}, \quad G_{q+1,p+2}^{Lc}(\lambda_n, s) = \frac{-2\delta_{qp}}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} + \frac{P_{q+1,p+2}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)},$$

где

$$P(\lambda_n, s) = k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j(\lambda_n, s), \quad Q_q(\lambda_n, s) = k_{q+1}(\lambda_n, s) P(\lambda_n, s),$$

$$P_{11}(\lambda_n, s) = -2\lambda_n^2 \left[ \Pi(\lambda_n, s) + \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \Lambda_j \Pi_j(\lambda_n, s) \right],$$

$$P_{12}(\lambda_n, s) = 2\Pi(\lambda_n, s), \quad P_{1,q+2}(\lambda_n, s) = -2\alpha_q \lambda_n^2 \Pi_q(\lambda_n, s), \quad P_{q+1,k}(\lambda_n, s) = \Lambda_q \lambda_n^4 P_{1k}(\lambda_n, s),$$

$$\Pi(\lambda_n, s) = \prod_{j=1}^N k_{q+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi_q(\lambda_n, s) = \prod_{j=1, j \neq q}^N k_{j+1}(\lambda_n, s).$$

Так как в полученные равенства (23) входят рациональные функции параметра преобразования Лапласа  $s$ , то их оригиналы находятся с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления [19]:

$$G_{1k}^c(0, \tau) = \frac{\delta_{2k} \tau}{a}, \quad G_{q+1,k}^c(0, \tau) = -\delta_{q+2,k} H(\tau), \quad G_{1k}^c(\lambda_n, \tau) = \sum_{j=1}^{N+2} A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n) \tau},$$

$$G_{q+1,k}^c(\lambda_n, \tau) = 2 \left( \Lambda_q \lambda_n^2 \delta_{1k} - \delta_{q+2,k} \right) e^{-D_q \lambda_n^2 \tau} + \sum_{l=1}^{N+3} A_{q+1,k}^{(l)}(\lambda_n) e^{s_l(\lambda_n) \tau}, \quad (24)$$

$$A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_j)}{P'(\lambda_n, s_j)}, \quad A_{q+1,k}^{(l)}(\lambda_n) = \frac{P_{q+1,k}(\lambda_n, s_l)}{Q'_q(\lambda_n, s_l)}.$$

Здесь:  $H(\tau)$  — функция Хевисайда;  $s_j(\lambda_n)$  ( $j = \overline{1, N+2}$ ) — нули многочлена  $P(\lambda_n, s)$ ;  $s_{N+3}(\lambda_n) = -D_q \lambda_n^2$  — дополнительный нуль многочлена  $Q_q(\lambda_n, s)$ ; штрих означает производную по параметру  $s$ .

Далее строятся соотношения, связывающие правые части граничных условий обеих задач — исходной и вспомогательной. Так как решение вспомогательной задачи (16), (19) должно удовлетворять граничным условиям исходной задачи для консольно-закрепленной балки (18), то с учетом представлений (20) выражения связи могут быть записаны в виде системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода [17, 18]:

$$\sum_{j=1}^{N+2} \int_0^{\tau} a_{ij}(\tau-t) y_j(t) dt = \varphi_i(\tau), \quad (25)$$

где (штрихом обозначается производная по переменной  $x$ )

$$\begin{aligned} a_{11}(\tau) &= G_{12}(0, \tau), & a_{12}(\tau) &= -G_{11}(1, \tau), & a_{1,p+2}(\tau) &= G_{1,p+2}(0, \tau), \\ a_{21}(\tau) &= G_{12}''(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,2}(1, \tau), & a_{22}(\tau) &= -G_{11}''(0, \tau) - \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,1}(0, \tau), \\ a_{2,q+2}(\tau) &= G_{1,q+2}''(1, \tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,q+2}(1, \tau), \\ a_{q+2,1}(\tau) &= G_{q+1,2}(0, \tau), & a_{q+2,2}(\tau) &= -G_{q+1,1}(1, \tau), & a_{q+2,p+2}(\tau) &= G_{q+1,p+2}(0, \tau), \\ y_1(\tau) &= f_{21}^*(\tau), & y_2(\tau) &= f_{12}^*(\tau), & y_{p+2}(\tau) &= f_{p+2,1}^*(\tau), \\ \varphi_1(\tau) &= \int_0^{\tau} G_{12}(1, \tau-t) f_{22}(t) dt, & \varphi_{q+2}(\tau) &= \int_0^{\tau} G_{q+1,2}(1, \tau-t) f_{22}(t) dt, \\ \varphi_2(\tau) &= \int_0^{\tau} \left[ G_{12}''(0, t-\tau) + \sum_{j=1}^N \alpha_j G_{j+1,2}(0, t-\tau) \right] f_{22}(t) dt. \end{aligned}$$

Следует заметить, что ряды Фурье в представлениях для  $G_{km}''$ , в соответствии с формулами (23), (24), сходятся только в обобщенном смысле, что затрудняет применение для решения системы (25) численных алгоритмов. Для преодоления указанной сложности в (25) выполняется интегрирование по частям. Получается система интегральных уравнений относительно производных  $\partial y_j / \partial \tau$ :

$$\sum_{j=1}^{N+2} \int_0^{\tau} A_{ij}(\tau-t) \frac{\partial y_j(t)}{\partial t} dt = \Phi_i(\tau), \quad \Phi_i(\tau) = \varphi_i(\tau) - \sum_{j=1}^{N+2} A_{ij}(\tau) y_j(0), \quad (26)$$

$$A_{ij}(\tau) = \int_0^{\tau} a_{ij}(t) dt, \quad A_{ij}(\tau-t) = \int_0^{\tau-t} a_{ij}(\xi) d\xi. \quad (27)$$

При этом функции  $y_j(0)$  должны удовлетворять определенным соотношениям. Исходя из условия сопряжения начальных и граничных условий в угловых точках пространственно-временной области рассматриваемых задач, а также с учетом нулевых начальных условий полагается, что  $y_j(0) = 0$ .

Система уравнений (26) решается численно, с помощью квадратурных формул. Для этого область изменения времени  $\tau$   $[0, T]$  разбивается с равномерным шагом  $h = T/N_\tau$  на  $N_\tau$  отрезков, и в точках  $\tau_m = mh$  ( $m = \overline{0, N_\tau}$ ) вводятся сеточные функции  $y_m^j = \partial y_j(\tau_m) / \partial \tau$ ,  $A_m^{ij} = A_{ij}(\tau_m)$ . Каждый из интегралов в (26) при  $\tau = \tau_m$  заменяется приближенной суммой, соответствующей квадратурной формуле средних прямоугольников:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} A_{ij}(\tau-t) \frac{\partial y_j(t)}{\partial t} dt &\approx h S_{m-1/2}^{ij} + h A_{1/2}^{ij} y_{m-1/2}^j, & S_{m-1/2}^{ij} &= \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l+1/2}^{ij} y_{l-1/2}^j \quad (i, j = \overline{1, N+2}), \\ \tau_{m-1/2} &= \frac{\tau_{m-1} + \tau_m}{2} = h \left( m - \frac{1}{2} \right), & \tau_{m-l+1/2} &= \tau_m - \tau_{l-1/2} = h \left( m - l + \frac{1}{2} \right) \quad (m = \overline{1, N_\tau}). \end{aligned}$$

В результате образуется рекуррентная последовательность систем линейных алгебраических уравнений ( $m \geq 1$ ):

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{m-1/2} = \mathbf{b}_{m-1/2},$$

где  $\mathbf{y}_{m-1/2} = (y_{m-1/2}^i)_{(N+2) \times 1}$  — столбец неизвестных, а остальные величины определяются следующим образом:

$$\mathbf{A} = (A_{1/2}^{ij})_{(N+2) \times (N+2)}, \quad \mathbf{b}_{m-1/2} = (b_{m-1/2}^i)_{(N+2) \times 1}, \quad b_{m-1/2}^i = \frac{\Phi_i(\tau_m)}{h} - \sum_{j=1}^{N+2} S_{m-1/2}^{ij}.$$

Ее решение находится по формулам Крамера:

$$y_{m-1/2}^j = \frac{\Delta_m^j}{\Delta},$$

где  $\Delta = \det \mathbf{A}$ ,  $\Delta_m^j$  — определители Крамера для матриц, полученных из матрицы  $\mathbf{A}$  путем замены  $j$ -го столбца столбцом  $\mathbf{b}_{m-1/2}$ .

Окончательный вид решения исходной задачи находится в результате численного расчета сверток функций Грина вспомогательной задач (21), (22) с функциями, определенными из решения системы уравнений (26). Таким образом, уравнения (20) запишутся так:

$$\begin{aligned} v(x, \tau) &= \int_0^\tau \left[ \tilde{G}_{12}(x, \tau-t) \frac{f_{21}^*(t)}{\partial t} - \tilde{G}_{12}(1-x, \tau-t) \frac{f_{22}^*(t)}{\partial t} - \tilde{G}_{11}(1-x, \tau-t) \frac{f_{12}^*(t)}{\partial t} \right] dt + \\ &\quad + \int_0^\tau \sum_{p=1}^N \tilde{G}_{1,p+2}(x, \tau-t) \frac{f_{p+2,1}^*(t)}{\partial t} dt, \\ \eta_q(x, \tau) &= \int_0^\tau \left[ \tilde{G}_{q+1,2}(x, \tau-t) \frac{f_{21}^*(t)}{\partial t} - \tilde{G}_{q+1,2}(1-x, \tau-t) \frac{f_{22}^*(t)}{\partial t} - \tilde{G}_{q+1,1}(1-x, \tau-t) \frac{f_{12}^*(t)}{\partial t} \right] dt + \\ &\quad + \int_0^\tau \sum_{p=1}^N \tilde{G}_{q+1,p+2}(x, \tau-t) \frac{f_{p+2,1}^*(t)}{\partial t} dt, \\ \tilde{G}_{mk}(x, \tau) &= \int_0^\tau G_{mk}(x, t) dt. \end{aligned} \tag{28}$$

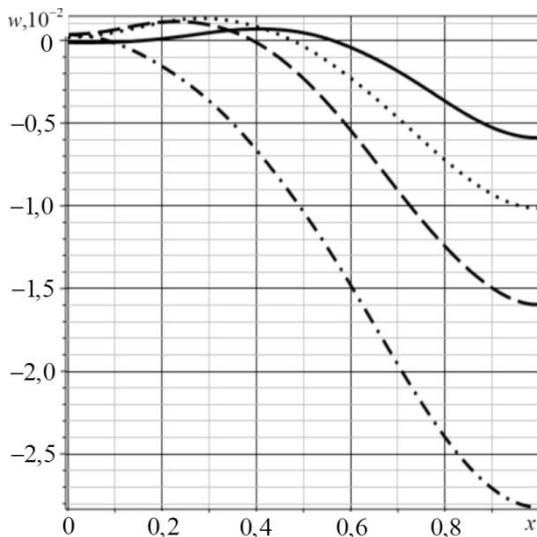


Рис. 2. Прогибы балки  $v(x, \tau)$  в разные моменты времени  $\tau$ : 3,3 (сплошная линия); 5 (пунктирная линия); 6,6 (штриховая линия); 10 (штрихпунктирная линия)

#### 4. Пример

Для исследования взаимодействия нестационарных полей (механического и диффузионного) рассмотрена консольно-закрепленная балка длиной  $l = 1$  см с прямоугольным сечением  $h \times b = 0,05l \times 0,05l$ , изготовленная из 2-компонентного материала, в котором 95% алюминия и 5% меди. В качестве независимого компонента выступает медь [20]. Данные для расчета были следующими ( $\lambda^*$ ,  $\mu^*$  — размерные аналоги упругих постоянных Ламе; верхний индекс 1 указывает на характеристики меди):

$$\begin{aligned} \lambda^* &= 6,93 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad \mu^* = 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ T_0 &= 800 \text{ К}, \quad \rho = 2780 \text{ кг/м}^3, \quad l = 0,01 \text{ м}, \\ D_{11}^{*(1)} &= 6,67 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}, \quad n_0^{(1)} = 0,05, \\ \alpha_{11}^{*(1)} &= 6,14 \cdot 10^7 \text{ Дж/кг}, \quad m^{(1)} = 0,064 \text{ кг/моль}. \end{aligned}$$

Поперечная нагрузка, приложенная к свободному ( $x = 1$ ) концу балки, задавалась в виде:

$$f_{22}(\tau) = H(\tau).$$

Численное решение системы (26) и подстановка найденных функций в свертки (28), дает в результате прогибы балки, приведенные на рисунке 2.

На рисунке 3 показано, как изменяются распределения концентраций меди (Рис. 3а) и алюминия (Рис. 3б) в результате нестационарного изгиба консольно-закрепленной балки.

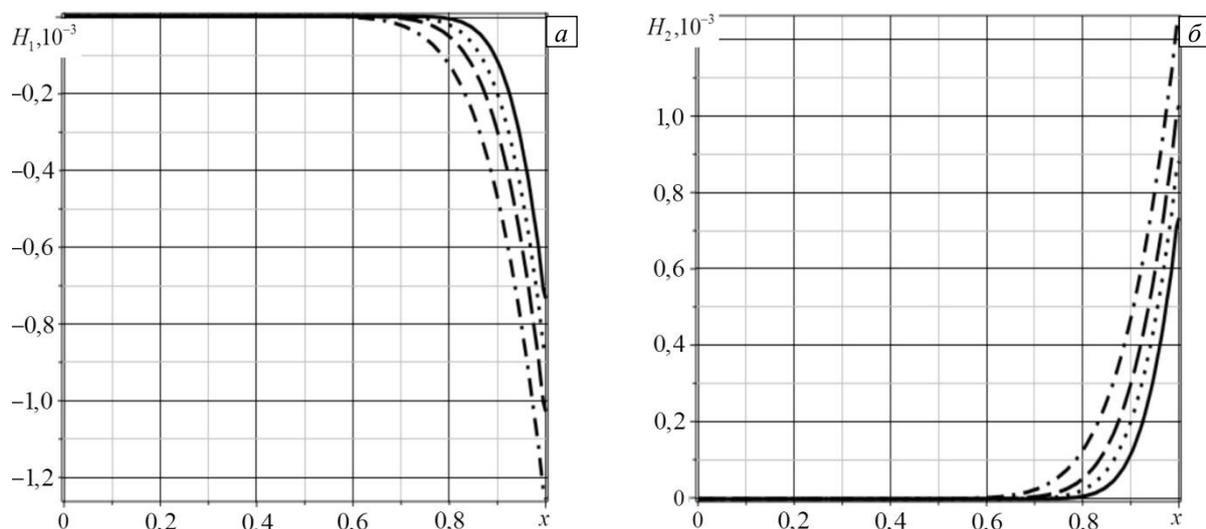


Рис. 3. Линейная плотность приращения концентрации меди (а) и алюминия (б) в разные моменты времени  $\tau$ :  $3,3 \cdot 10^{12}$  (сплошная линия);  $5 \cdot 10^{12}$  (пунктирная линия);  $6,6 \cdot 10^{12}$  (штриховая линия);  $10^{13}$  (штрихпунктирная линия)

## 5. Заключение

Таким образом, построена модель нестационарного изгиба консольно-закрепленной балки Бернулли–Эйлера с учетом механо-диффузионных эффектов. Предложен алгоритм, позволяющий выразить решение задачи с произвольными граничными условиями через известное решение какой-либо задачи того же вида и с той же геометрией области.

Возможности модели и алгоритма продемонстрированы на примере расчета параметров изгиба двухкомпонентной балки. Показано, что нестационарный изгиб консоли инициирует диффузионные потоки каждого из компонентов (Рис. 3). С учетом того, что при  $N_q(x_1, \tau) = 0$  приращения концентраций в итоге определяются по формулам (13), можно сделать вывод, что при деформировании в нижней части балки (в соответствии с Рис. 1) приращение концентрации меди имеет отрицательное значение, а в верхней оно положительное. В результате возникает восходящий диффузионный поток меди, который компенсируется нисходящим потоком частиц алюминия. При этом величина диффузионного потока увеличивается от защемления балки к свободному от нагрузки концу.

Некоторым недостатком предложенного алгоритма является то, что построенную систему уравнений Вольтерра, связывающую правые части граничных условий исходной и вспомогательной задач, приходится решать численно. Стабильный результат при определении перемещений можно получить только в течение сравнительно небольших промежутков времени ( $\tau \leq 10$ , см. Рис. 2). Увеличение длительности промежутка ведет к необходимости использования большего числа разбиений, что осложняет реализацию предложенного алгоритма. Вместе с тем следует отметить, что результаты, приведенные на рисунке 2, соответствуют классическим представлениям об изгибе консольно-закрепленных балок [21].

В противоположность этому, вследствие достаточно медленного протекания диффузии в твердых телах, рассчитывать приращения концентрации компонентов многокомпонентной среды можно на достаточно больших временных промежутках ( $\tau \sim 10^{12} \div 10^{13}$ ) при сравнительно небольшом числе точек разбиения.

В данной работе при численном решении системы уравнений Вольтерра в обоих случаях использовалось  $N_\tau = 40$  точек разбиения. Дальнейшее увеличение их количества уже не приводило к видимому изменению результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 20-19-00217).

## Литература

1. Князева А.Г., Поболь И.Л., Романова В.А. Поле напряжений в диффузионной зоне соединения, получаемого электронно-лучевой пайкой // *Физ. мезомех.* 2001. Т. 4, № 5. С. 41-53.
2. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Int. J. Math. Math. Sci.* 2006. Vol. 2006. 025976. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>
3. Kumar R., Kansal T. Dynamic problem of generalized thermoelastic diffusive medium // *J. Mech. Sci. Technol.* 2010. Vol. 24. P. 337-342. <https://doi.org/10.1007/s12206-009-1109-6>
4. Sherief H.H., Saleh H. A half space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Int. J. Solid. Struct.* 2005. Vol. 42. P. 4484-4493. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.001>
5. Швец Р.Н., Флячок В.М. Уравнения механотермодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* 1984. № 20. С. 54-61.
6. Aouadi M., Copetti M.I.M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2015. Vol. 93. P. 361-384. <https://doi.org/10.1002/zamm.201400285>
7. Aouadi M., Copetti M.I.M., Fernández J.R. A contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory with second sound // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis.* 2017. Vol. 51. P. 759-796. <https://doi.org/10.1051/m2an/2016039>
8. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin-Pipkin's model // *Asymptotic Analysis.* 2015. Vol. 95. P. 129-160. <https://doi.org/10.3233/ASY-151330>
9. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory // *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.* 2015. Vol. 36. P. 619-632. <https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7>
10. Aouadi M., Miranville A. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory // *Evolution equations and control theory.* 2015. Vol. 4. P. 241-263. <http://dx.doi.org/10.3934/eect.2015.4.241>
11. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two-temperature fractional order generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *IJAIEEM.* 2014. Vol. 3, Is. 8. P. 096-108.
12. Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An elastodiffusive orthotropic Euler-Bernoulli beam with considering diffusion flux relaxation // *Math. Comput. Appl.* 2019. Vol. 24. 23. <https://doi.org/10.3390/mca24010023>
13. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Modelling of unsteady elastic diffusion oscillations of a Timoshenko beam // *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures / Ed. H. Altenbach, V. Eremeyev, I. Pavlov, A. Porubov.* Springer, 2020. P. 447-461. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2_27)
14. Afanasieva O.A., Zemskov A.V. Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Kirchhoff plate under the distributed transverse load action // *Proceedings of the Third International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics / Ed. E. Gdoutos, M. Konsta-Gdoutos.* Springer, 2020. P. 181-186. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_34)
15. Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. Томск: Изд-во «Иван Федоров», 2014. 172 с.
16. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.
17. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // *Materials Physics and Mechanics.* 2015. Vol. 23, No. 1. P. 36-41.
18. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Решение двумерных задач механодиффузии с помощью интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества.* 2016. Т. 13, № 1. С. 49-56.
19. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 467 с.
20. Физические величины: Справочник / Под общ. ред. И.С. Григорьева, И.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
21. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.

## References

1. Knyazeva A.G., Pobol I.L., Romanova V.A. Stress field in the diffusion zone of an electron-beam brazed joint. *Fiz. mezomekh. – Physical Mesomechanics*, 2001, vol. 4, no. 5, pp. 41-53.
2. Aouadi M. A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 2006, vol. 2006, 025976. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>
3. Kumar R., Kansal T. Dynamic problem of generalized thermoelastic diffusive medium. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2010, vol. 24, pp. 337-342. <https://doi.org/10.1007/s12206-009-1109-6>
4. Sherief H.H., Saleh H. A half space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. Solid. Struct.*, 2005, vol. 42, pp. 4484-4493. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.001>
5. Shvets R.N., Flyachok V.M. Uravneniya mekhanotermodyffuzii anizotropnykh obolochek s uchetom poperechnykh deformatsiy [The equations of mechanothermodiffusion of anisotropic shells taking account of transverse strains]. *Mat. metody fiz.-mekh. polya*, 1984, no. 20, pp. 54-61.
6. Aouadi M., Copetti M.I.M. Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 2015, vol. 93, pp. 361-384. <https://doi.org/10.1002/zamm.201400285>
7. Aouadi M., Copetti M.I.M., Fernández J.R. A contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory with second sound. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2017, vol. 51, pp. 759-796. <https://doi.org/10.1051/m2an/2016039>
8. Aouadi M., Miranville A. Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin-Pipkin's model. *Asymptotic Analysis*, 2015, vol. 95, pp. 129-160. <https://doi.org/10.3233/ASY-151330>
9. Aouadi M. On thermoelastic diffusion thin plate theory. *Appl. Math. Mech.-Engl. Ed.*, 2015, vol. 36, pp. 619-632. <https://doi.org/10.1007/s10483-015-1930-7>

10. Aouadi M., Miranville A. Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory. *Evolution equations and control theory*, 2015, vol. 4, pp. 241-263. <http://dx.doi.org/10.3934/eect.2015.4.241>
11. Bhattacharya D., Kanoria M. The influence of two-temperature fractional order generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell. *IJAEM*, 2014, vol. 3, is. 8, pp. 096-108
12. Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. An elastodiffusive orthotropic Euler-Bernoulli beam with considering diffusion flux relaxation. *Math. Comput. Appl.*, 2019, vol. 24, 23. <https://doi.org/10.3390/mca24010023>
13. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Modelling of unsteady elastic diffusion oscillations of a Timoshenko beam. *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures*, ed. H. Altenbach, V. Eremeyev, I. Pavlov, A. Porubov. Springer, 2020. Pp. 447-461. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-030-38708-2_27)
14. Afanasieva O.A., Zemskov A.V. Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Kirchhoff plate under the distributed transverse load action. *Proceedings of the Third International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, ed. E. Gdoutos, M. Konsta-Gdoutos. Springer, 2020. Pp. 181-186. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4\\_34](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47883-4_34)
15. Knyazeva A.G. *Vvedeniye v termodinamiku neobratimyykh protsessov* [Introduction to the thermodynamics of irreversible processes]. Tomsk, Ivan Fedorov publishing house, 2014. 172 p.
16. Eremeyev V.S. *Diffuziya i napryazheniya* [Diffusion and stresses]. Moscow, Energoatomizdat, 1984. 182 p.
17. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 36-41.
18. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Resheniye dvumernyykh zadach mekhanodiffuzii s pomoshch'yu integral'nykh uravneniy Vol'terra 1-go roda* [Solution of two-dimensional problems of mechanodiffusion using Volterra integral equations of the 1st kind]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva – Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, vol. 13, no. 1, pp. 49-56.
19. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Operational calculus handbook]. Moscow, Vysshaya shkola, 1965. 467 p.
20. Grigor'yev I.S., Meylikhov I.Z. (ed.) *Fizicheskiye velichiny: Spravochnik* [Physical quantities: Handbook]. Moscow, Energoatomizdat, 1991. 1232 p.
21. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [The theory of mechanical vibrations]. Moscow, Vysshaya shkola, 1980. 408 p.

Поступила в редакцию 28.12.2020; после доработки 11.01.2021; принята к опубликованию 15.02.2021

---

#### Сведения об авторах

Земсков Андрей Владимирович, дфмн, проф., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ НИУ), 125080, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4; e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, дфмн, проф., зав.лаб., Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова (НИИМ МГУ), 119192, г. Москва, Мичуринский пр-т, д. 1; e-mail: [tdv902@mai.ru](mailto:tdv902@mai.ru)

Файкин Георгий Михайлович, б/с, магистрант, МАИ НИУ; e-mail: [egorc16@mail.ru](mailto:egorc16@mail.ru)