

DOI: [10.7242/1999-6691/2021.14.1.3](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.3)

УДК 532.529.5

## ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ГОДУНОВА ДЛЯ РАСЧЕТА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СРЕДЫ

В.С. Сузов

*Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Российская Федерация*

Описан гибридный метод Годунова, предназначенный для численного расчета упругопластической деформации твердого тела в рамках классической модели Прандтля–Рейса с уравнением состояния небаротропного типа. В качестве критерия перехода из упругого в пластическое состояние использовано условие текучести Мизеса. Проведен характеристический анализ уравнений модели и показана их гиперболичность. Отмечено, что если вместо закона Фурье взять закон Максвелла–Каттанео, то для расчета деформации теплопроводной упругопластической среды также можно прибегнуть к гибриднему методу Годунова, поскольку и в этом случае модель среды относится к гиперболическому типу. Детально изложен алгоритм вычислений для систем, в которых имеются не приводящиеся к дивергентному виду уравнения (оригинальный метод Годунова служит для интегрирования систем уравнений, представленных в дивергентной форме). При вычислении потоковых переменных на гранях смежных ячеек применен линейризованный римановский решатель, в алгоритм которого включены правые собственные векторы уравнений модели. В предлагаемом подходе уравнения, записанные в дивергентном виде, выглядят как конечно-объемные формулы, а другие, не приводящиеся к дивергентной форме, – как конечно-разностные соотношения. Для иллюстрации возможностей гибридного метода Годунова решены некоторые одно- и двумерные задачи, в частности, задача об ударе алюминиевого образца о жесткую преграду. Отмечено, что в зависимости от скорости взаимодействия реализуются или одноволновые, или двухволновые с упругим предвестником режимы отражения, описанные в литературе.

*Ключевые слова:* упругопластические деформации, гибридный метод Годунова, линейризованный римановский решатель

## ON ONE VERSION OF THE GODUNOV METHOD FOR CALCULATING ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS OF A MEDIUM

V.S. Surov

*South Ural State University (NRU), Chelyabinsk, Russian Federation*

Godunov's hybrid method suitable for numerical calculation of elastoplastic deformation of a solid body within the framework of the classical Prandtl–Reis model with the non-barotropic state equation is described. Mises' fluidity condition is used as a criterion for the transition from elastic to plastic state. A characteristic analysis of the model equations was carried out and their hyperbolicity was shown. It is noted that, if one takes the Maxwell–Cattaneo law instead of the Fourier law, then the Godunov hybrid method can be applied to calculate the deformation of a thermally conductive elastoplastic medium, since in this case the medium model is of a hyperbolic type. The algorithm for solving the systems in which there are equations that do not lead to divergence form is described in detail; Godunov's original method serves to integrate systems of equations represented in divergence form. When calculating stream variables on the faces of adjacent cells, a linearized Riemannian solver is used, the algorithm of which includes the right eigenvectors of the model equations. In the proposed approach, the equations written in divergence form look like finite-volume formulas, and others that do not lead to divergence form look like finite-difference relations. To illustrate the capabilities of the Godunov hybrid method, several one- and two-dimensional problems were solved, in particular, the problem of hitting an aluminum sample against a rigid barrier. It is shown that, depending on the rate of interaction, either single-wave or two-wave reflections described in the literature can be implemented with an elastic precursor.

*Key words:* elastic-plastic deformations, hybrid Godunov method, Riemann linearized solver

### 1. Введение

Из литературных источников известны примеры использования при моделировании упругопластической деформации среды модификаций метода Годунова [1]–[3], первоначально предложенного Годуновым для численного интегрирования газодинамических задач [4]. Так, в [1] по схеме Годунова первого порядка точности решались плоские и осесимметричные задачи динамики сжимаемых сред с необратимыми объемными и сдвиговыми деформациями на произвольных подвижных сетках. Приведены конечно-разностные соотношения, подробно описана задача распада произвольного разрыва. В [2] для среды в пренебрежении ее конечной деформацией применялась UNO (Uniformly Non Oscillatory)-модификация метода Годунова, имеющая второй порядок точности. Задача распада разрыва, присутствующая в алгоритме метода, решалась с привлечением инвариантов Римана. Как и в [1], в работе [2] рассматривалось баротропное уравнение состояния, поэтому энергетическое уравнение опускалось. В [3] пространственная дискретизация уравнений на движущейся эйлеровой сетке осуществлялась с помощью метода Годунова. Для повышения точности схемы производилось кусочно-линейное восполнение сеточных функций с помощью интерполяционной процедуры типа MUSCL, обобщенной на неструктурированные сетки. Основная идея подхода состояла в расщеплении системы определяющих уравнений на гидродинамическую и упругопластическую составляющие. Уравнения

гидродинамики решались на основе явно-неявной абсолютно устойчивой схемы, а материальные уравнения (упругопластическая составляющая) — с привлечением двухшаговой схемы Рунге–Кутты.

В настоящей работе для численного интегрирования гиперболической системы, описывающей упругопластическую деформацию твердого тела с уравнением состояния общего небаротропного вида, используется гибридный метод Годунова (ГМГ), ранее примененный автором при численном моделировании течений гетерогенных смесей [5]. Отметим, что ГМГ предназначен для интегрирования гиперболических систем, в которых имеются уравнения, записанные как в дивергентном виде, так и не приводящиеся к такой форме, в то время как оригинальный метод Годунова предполагает решение только представленных в дивергентном виде уравнений. Параметры среды на гранях смежных ячеек определялись с помощью линеаризованного римановского решателя [6]. Для этих же целей может быть использован решатель задачи Римана, основанный на характеристическом подходе [7]. Поскольку далее в работе области интегрирования являются объединением прямоугольных подобластей, то при интегрировании уравнений будет рассматриваться упрощенный вариант ГМГ [8]. При наличии криволинейных подобластей необходимо прибегать к конечно-объемному варианту ГМГ [9].

## 2. Характеристический анализ уравнений модели

Уравнения, описывающие упругопластическую деформацию твердого тела в рамках модели Прадтля–Рейса [10], имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_{,t} + (\rho u_i)_{,x_i} &= 0, \\ (\rho u_i)_{,t} + (\rho u_i u_j - \sigma_{ij})_{,x_j} &= 0, \\ (\rho e)_{,t} + (\rho u_j e - u_i \sigma_{ij})_{,x_j} &= 0, \\ s_{ij,t} + u_k s_{ij,x_k} - s_{ik} \omega_{jk} - s_{jk} \omega_{ik} + \lambda s_{ij} &= 2\mu (e_{ij} - e_{kk} \delta_{ij}/3), \\ \omega_{ij} &= (u_{i,x_j} - u_{j,x_i})/2, \quad e_{ij} = (u_{i,x_j} + u_{j,x_i})/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:  $p$  — давление;  $u_i$  — компоненты вектора скорости;  $\rho$  — плотность;  $\varepsilon$  и  $e = \varepsilon + (u_i u_i)/2$  — удельные внутренняя и полная энергии среды;  $\sigma_{ij} = s_{ij} - p \delta_{ij}$  — тензор напряжений, который представляется в виде шаровой ( $p = -\sigma_{ii}/3$ ) и девиаторной ( $s_{ij}$ ) частей, где  $\delta_{ij}$  — дельта Кронекера;  $e_{ij}$  — тензор скоростей деформации;  $\mu$  — модуль сдвига;  $\lambda$  — параметр; индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей переменной.

Для упрощения изложения ограничимся двумерным случаем. Перепишем систему (1) в квазилинейной форме, при этом вместо индексных обозначений воспользуемся координатными, полагая, что в декартовой системе Оху индексам 1 и 2 соответствуют  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(p - s_{xx})}{\partial x} - \frac{\partial s_{xy}}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(p - s_{yy})}{\partial y} - \frac{\partial s_{xy}}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{Dp}{Dt} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left[ s_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + s_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + s_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] B &= 0, \\ \frac{Ds_{xx}}{Dt} - 2s_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\lambda s_{xx}, \\ \frac{Ds_{xy}}{Dt} + (s_{xx} - s_{yy}) \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\lambda s_{xy}, \\ \frac{Ds_{yy}}{Dt} - 2s_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= -\lambda s_{yy}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ ;  $B = \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^{-1}$ ;  $c = \sqrt{B \left( \frac{p}{\rho} - \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)}$  — гидродинамическая скорость звука в твердом теле с калорическим уравнением состояния общего вида  $\varepsilon = \varepsilon(p, \rho)$ . Отметим, что при условии

$s_{xx} = s_{xy} = s_{yy} = \mu = 0$  твердое тело ведет себя подобно сжимаемой жидкости, поскольку в этом случае система (2) совпадает с уравнениями гидродинамики. В качестве критерия перехода из упругого состояния в пластическое использовалось условие текучести Мизеса, согласно которому при выполнении неравенства

$$s_{xx}^2 + s_{xy}^2 + s_{yy}^2 + s_{xx}s_{yy} \geq \sigma_s^2/3,$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала при одноосном растяжении–сжатии, компоненты девиатора тензора напряжений корректируются путем «посадки» на поверхность текучести, то есть делением на  $\sqrt{\lambda}$  [11]. Параметр  $\lambda$  характеризует суммарную работу пластических деформаций и вычисляется по формуле:

$$\lambda = (3/\sigma_s^2)(s_{xx}^2 + s_{xy}^2 + s_{yy}^2 + s_{xx}s_{yy}).$$

Перепишем систему (2) в векторно-матричной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = \mathbf{H}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})^T, \quad \mathbf{H} = -\lambda(0, 0, 0, 0, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})^T,$$

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho & -1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -1/\rho & 0 \\ 0 & \rho c^2 - s_{xx}B & -s_{xy}B & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4\mu/3 & 2s_{xy} & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{xx} - s_{yy} - \mu & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 2\mu/3 & -2s_{xy} & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho & 0 & 0 & -1/\rho \\ 0 & -s_{xy}B & \rho c^2 - s_{yy}B & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2s_{xy} & 2\mu/3 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & s_{yy} - s_{xx} - \mu & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 2s_{xy} & -4\mu/3 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Символ «Т» означает операцию транспонирования. Собственные значения матриц  $A_x$  и  $A_y$  следующие:

$$\begin{aligned} &u - c_{1x}, \quad u - c_{2x}, \quad u, \quad u, \quad u, \quad u + c_{2x}, \quad u + c_{1x}, \\ &v - c_{1y}, \quad v - c_{2y}, \quad v, \quad v, \quad v, \quad v + c_{2y}, \quad v + c_{1y}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$c_{1x} = \sqrt{c^2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu - s_{xx} B \right)}, \quad c_{2x} = \sqrt{\frac{1}{\rho} (\mu + s_{yy} - s_{xx})}, \quad c_{1y} = \sqrt{c^2 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu - s_{yy} B \right)}, \quad c_{2y} = \sqrt{\frac{1}{\rho} (\mu + s_{xx} - s_{yy})}.$$

Таким образом, в твердом теле имеются две скорости звука:  $c_1$  — продольная,  $c_2$  — поперечная.

Собственным значениям матриц  $A_x$  и  $A_y$  соответствуют собственные векторы — столбцы следующих матриц:

$$\left( \begin{array}{cccccc} \frac{3\rho}{2\mu} & \frac{3\rho(B+2)}{2N_x} & 0 & 0 & 1 & \frac{3\rho(B+2)}{2N_x} & \frac{3\rho}{2\mu} \\ -\frac{3c_{1x}}{2\mu} & -\frac{3c_{2x}(B+2)}{2N_x} & 0 & 0 & 0 & \frac{3c_{2x}(B+2)}{2N_x} & \frac{3c_{1x}}{2\mu} \\ 0 & -\frac{3\rho c_{2x}(c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}{2s_{xy}N_x} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\rho c_{2x}(c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}{2s_{xy}N_x} & 0 \\ \frac{3\rho c_{1x}^2}{2\mu} - 2 & \frac{L_x}{2N_x} & 0 & 1 & 0 & \frac{L_x}{2N_x} & \frac{3\rho c_{1x}^2}{2\mu} - 2 \\ -2 & \frac{M_x}{N_x} & 0 & 1 & 0 & \frac{M_x}{N_x} & -2 \\ 0 & -\frac{3\rho^2 c_{2x}^2 (c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}{2s_{xy}N_x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3\rho^2 c_{2x}^2 (c_{1x}^2 - c_{2x}^2)}{2s_{xy}N_x} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad (5)$$

$$\left( \begin{array}{cccccc} -\frac{3\rho}{4\mu} & -\frac{3\rho(B+2)}{2N_y} & 0 & 0 & 1 & -\frac{3\rho(B+2)}{2N_y} & -\frac{3\rho}{4\mu} \\ 0 & -\frac{3\rho c_{2y}(c_{1y}^2 - c_{2y}^2)}{2s_{xy}N_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\rho c_{2y}(c_{1y}^2 - c_{2y}^2)}{2s_{xy}N_y} & 0 \\ \frac{3c_{1y}}{4\mu} & -\frac{3c_{2y}(B+2)}{2N_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{3c_{2y}(B+2)}{2N_y} & -\frac{3c_{1y}}{4\mu} \\ 1 - \frac{3\rho c_{1y}^2}{4\mu} & \frac{L_y}{2N_y} & 1 & 0 & 0 & \frac{L_y}{2N_y} & 1 - \frac{3\rho c_{1y}^2}{4\mu} \\ -\frac{1}{2} & \frac{M_y}{N_y} & 0 & 1 & 0 & \frac{M_y}{N_y} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3\rho^2 c_{2y}^2 (c_{1y}^2 - c_{2y}^2)}{2s_{xy}N_y} & 0 & 0 & 0 & \frac{3\rho^2 c_{2y}^2 (c_{1y}^2 - c_{2y}^2)}{2s_{xy}N_y} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

где

$$\begin{aligned} L_x &= 6\rho c^2 + (3\rho c_{2x}^2 - 6s_{xx} - 4\mu)B, & M_x &= 3\rho(c_{1x}^2 - c_{2x}^2) - 2\mu(B+2), \\ N_x &= 3\rho(c_{2x}^2 - c^2) + (3s_{xx} + \mu)B - 2\mu, & L_y &= -6\rho c^2 - (3\rho c_{2y}^2 - 6s_{yy} - 4\mu)B, \\ M_y &= 3\rho(c_{1y}^2 - c_{2y}^2) - \mu(B+2), & N_y &= 3\rho(c_{2y}^2 - c^2) + (3s_{yy} + 2\mu)B, \end{aligned}$$

которые являются линейно независимыми. Следовательно, рассматриваемая система уравнений (2) относится к гиперболическому типу [12].

Взятый в данной работе за основу ГМГ также может быть применен для расчета деформации теплопроводной упругопластической среды. Для этого случая уравнение закона сохранения энергии из системы (2) имеет вид:

$$\frac{Dp}{Dt} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left( \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^{-1} \left[ s_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + s_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + s_{xy} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\partial w_y}{\partial y} \right] = 0,$$

где  $w_x$  и  $w_y$  — проекции вектора плотности теплового потока  $\mathbf{w}$  на координатные оси. Для того чтобы остаться в рамках гиперболической модели, вместо закона Фурье необходимо использовать его гиперболический аналог, то есть закон Максвелла–Каттанео [13]:

$$\tau \frac{Dw_x}{Dt} + w_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \tau \frac{Dw_y}{Dt} + w_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (6)$$

Здесь:  $T$  — температура;  $\tau$  — время релаксации. С учетом термического уравнения состояния среды  $T = T(p, \rho)$ , а также выражений  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y}$  уравнения (6) могут быть переписаны как

$$\frac{Dw_x}{Dt} + k_p \frac{\partial \rho}{\partial x} + k_p \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{w_x}{\tau}, \quad \frac{Dw_y}{Dt} + k_p \frac{\partial \rho}{\partial y} + k_p \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{w_y}{\tau},$$

где  $k_p = \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial \rho}$ ,  $k_p = \frac{1}{\tau} \frac{\partial T}{\partial p}$ . Соответствующие матрицы  $A_x$  и  $A_y$  модифицированной модели, входящие в уравнение (3), принимают вид:

$$A_x = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho c^2 - s_{xx} B & -s_{xy} B & u & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -4\mu/3 & 2s_{xy} & 0 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho c_{2x}^2 & 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu/3 & -2s_{xy} & 0 & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ k_p & 0 & 0 & k_p & 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & -s_{xy} B & \rho c^2 - s_{yy} B & v & 0 & 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & -2s_{xy} & 2\mu/3 & 0 & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c_{2y}^2 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_{xy} & -4\mu/3 & 0 & 0 & 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ k_p & 0 & 0 & k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матриц  $A_x$  и  $A_y$  следующие:

$$\begin{aligned} &u - c_{1x}, \quad u - c_{2x}, \quad u - c_{3x}, \quad u, \quad u, \quad u, \quad u + c_{3x}, \quad u + c_{2x}, \quad u + c_{1x}, \\ &v - c_{1y}, \quad v - c_{2y}, \quad v - c_{3y}, \quad v, \quad v, \quad v, \quad v + c_{3y}, \quad v + c_{2y}, \quad v + c_{1y}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} c_{1x}^2 &= \frac{1}{2} \left[ c^2 + k_p B + \left( \frac{4}{3} \mu - s_{xx} B \right) \frac{1}{\rho} + A_x \right], \quad c_{2x}^2 = \frac{\mu (s_{yy} - s_{xx})}{\rho}, \quad c_{3x}^2 = \frac{1}{2} \left[ c^2 + k_p B + \left( \frac{4}{3} \mu - s_{xx} B \right) \frac{1}{\rho} - A_x \right], \\ A_x^2 &= (k_p B + c^2)^2 + 4k_p B + \frac{2}{\rho} \left[ c^2 \left( \frac{4}{3} \mu - s_{xx} B \right) - k_p \left( \frac{4}{3} \mu + s_{xx} B \right) \right] + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu - s_{xx} B \right) \right]^2, \\ c_{1y}^2 &= \frac{1}{2} \left[ c^2 + k_p B + \left( \frac{4}{3} \mu - s_{yy} B \right) \frac{1}{\rho} + A_y \right], \quad c_{2y}^2 = \frac{\mu (s_{xx} - s_{yy})}{\rho}, \quad c_{3y}^2 = \frac{1}{2} \left[ c^2 + k_p B + \left( \frac{4}{3} \mu - s_{yy} B \right) \frac{1}{\rho} - A_y \right], \\ A_y^2 &= (k_p B + c^2)^2 + 4k_p B + \frac{2}{\rho} \left[ c^2 \left( \frac{4}{3} \mu - s_{yy} B \right) - k_p \left( \frac{4}{3} \mu + s_{yy} B \right) \right] + \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu - s_{yy} B \right) \right]^2. \end{aligned}$$

Таким образом, в модели теплопроводного твердого тела, помимо продольной ( $c_1$ ) и поперечной ( $c_2$ ) скоростей звука, стала присутствовать еще и скорость перемещения тепловой волны ( $c_3$ ). Собственные векторы, соответствующие собственным значениям (7), линейно независимы, поэтому рассматриваемая система уравнений также относится к гиперболическому типу.

### 3. Гибридный метод Годунова

Для интегрирования уравнений (2) разобьем исходную систему на две подсистемы. К первой отнесем уравнения, записанные в дивергентном виде, ко второй — остальные. Первая подсистема имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

где

$$\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho e)^T, \quad \mathbf{F}_x = [\rho u, p - s_{xx} + \rho u^2, \rho uv - s_{xy}, u(\rho e + p) - us_{xx} - vs_{xy}]^T, \\ \mathbf{F}_y = [\rho v, \rho uv - s_{xy}, p - s_{yy} + \rho v^2, v(\rho e + p) - us_{xy} - vs_{yy}]^T.$$

Конечно-объемные выражения, аппроксимирующие (8) и связывающие искомые параметры на новом временном слое  $t + \Delta t$  с соответствующими значениями на предыдущем слое  $t$ , согласно классическому методу Годунова [4], запишем как

$$\mathbf{U}^{i,j} = \mathbf{U}_{i,j} + \left( \frac{\Phi_{i-1/2,j} - \Phi_{i+1/2,j}}{\Delta x_{i,j}} + \frac{\Psi_{i,j-1/2} - \Psi_{i,j+1/2}}{\Delta y_{i,j}} \right) \Delta t, \quad (9)$$

где

$$\Phi = [RU, P - S_{xx} + RU^2, RUV - S_{xy}, U(RE + P) - US_{xx} - VS_{xy}]^T, \\ \Psi = [RV, RUV - S_{xy}, P - S_{yy} + RV^2, V(RE + P) - US_{xy} - VS_{yy}]^T.$$

При этом «большие» величины, то есть  $R$  — плотность газа;  $U$ ,  $V$  — компоненты вектора скорости;  $P$  — давление;  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$  — компоненты девиатора тензора напряжений, относящиеся к граням смежных ячеек, определим из решения соответствующих задач Римана с использованием линейризованного римановского решателя [8], формулы для которого имеют вид:

– в направлении оси  $Ox$

$$\mathbf{U}_{(L+R)/2} = \mathbf{U} - \frac{1}{2} \sum_k a_k \text{sign}(\lambda_k) \mathbf{X}_k, \quad (10)$$

где  $\mathbf{X}_k$  — правые собственные векторы матрицы,  $A_x$  — столбцы первой матрицы из (5),

$$\mathbf{U}_{(L+R)/2} = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{(L+R)/2}^T, \quad \mathbf{U} = (\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_R)/2, \\ \mathbf{U}_L = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i-1/2,j}^T, \quad \mathbf{U}_R = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i+1/2,j}^T;$$

– в направлении оси  $Oy$ :

$$\mathbf{V}_{(D+T)/2} = \mathbf{V} - \frac{1}{2} \sum_k b_k \text{sign}(\lambda_k) \mathbf{Y}_k, \quad (11)$$

где  $\mathbf{Y}_k$  — правые собственные векторы матрицы  $A_y$  — столбцы второй матрицы (5),

$$\mathbf{V}_{(D+T)/2} = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{(D+T)/2}^T, \quad \mathbf{V} = (\mathbf{V}_D + \mathbf{V}_T)/2, \\ \mathbf{V}_D = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i,j-1/2}^T, \quad \mathbf{V}_T = (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i,j+1/2}^T.$$

Значения констант  $a_k$  и  $b_k$ , входящих в формулы (10) и (11), определим из решения систем линейных уравнений:

$$\sum_k a_k \mathbf{X}_k = \Delta \mathbf{U}, \quad \sum_k b_k \mathbf{Y}_k = \Delta \mathbf{V},$$

где  $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L$ ,  $\Delta \mathbf{V} = \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_D$ . «Большие» величины для (9) рассчитаем с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} (R, U, V, P, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy})_{i+1/2, j} &= \begin{cases} (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i, j}, & \text{если } (u - c_{1x})_{i+1/2, j} > 0, \\ (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i+1, j}, & \text{если } (u + c_{1x})_{i+1/2, j} < 0, \\ (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i+1/2, j}, & \text{если } (u - c_{1x})_{i+1/2, j} \leq 0, \quad (u + c_{1x})_{i+1/2, j} \geq 0; \end{cases} \\ (R, U, V, P, S_{xx}, S_{xy}, S_{yy})_{i, j+1/2} &= \begin{cases} (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i, j}, & \text{если } (u - c_{1y})_{i, j+1/2} > 0, \\ (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i, j+1}, & \text{если } (u + c_{1y})_{i, j+1/2} < 0, \\ (\rho, u, v, p, s_{xx}, s_{xy}, s_{yy})_{i, j+1/2}, & \text{если } (u - c_{1y})_{i, j+1/2} \leq 0, \quad (u + c_{1y})_{i, j+1/2} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для вычисления компонент девиатора тензора напряжений  $(s_{xx})^{i,j}$ ,  $(s_{xy})^{i,j}$ ,  $(s_{yy})^{i,j}$  запишем уравнения недивергентного вида, образующие вторую подсистему ГМГ, в конечно-разностном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(s_{xx})^{i,j} - (s_{xx})_{i,j}}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{(S_{xx})_{i+1/2, j} - (S_{xx})_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} + v_{i,j} \frac{(S_{xx})_{i, j+1/2} - (S_{xx})_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} - \\ & - 2(s_{xy})_{i,j} \left( \frac{U_{i, j+1/2} - U_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} - \frac{V_{i+1/2, j} - V_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{U_{i+1/2, j} - U_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} - \frac{V_{i, j+1/2} - V_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} \right) = -\lambda (s_{xx})_{i,j}, \\ & \frac{(s_{xy})^{i,j} - (s_{xy})_{i,j}}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{(S_{xy})_{i+1/2, j} - (S_{xy})_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} + v_{i,j} \frac{(S_{xy})_{i, j+1/2} - (S_{xy})_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} - \\ & - (\rho c_{2x}^2)_{i,j} \frac{V_{i+1/2, j} - V_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} - (\rho c_{2y}^2)_{i,j} \frac{U_{i, j+1/2} - U_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} = -\lambda (s_{xy})_{i,j}, \\ & \frac{(s_{yy})^{i,j} - (s_{yy})_{i,j}}{\Delta t} + u_{i,j} \frac{(S_{yy})_{i+1/2, j} - (S_{yy})_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} + v_{i,j} \frac{(S_{yy})_{i, j+1/2} - (S_{yy})_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} - \\ & - 2(s_{xy})_{i,j} \left( \frac{V_{i+1/2, j} - V_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} - \frac{U_{i, j+1/2} - U_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( 2 \frac{V_{i, j+1/2} - V_{i, j-1/2}}{\Delta y_{i,j}} - \frac{U_{i+1/2, j} - U_{i-1/2, j}}{\Delta x_{i,j}} \right) = -\lambda (s_{yy})_{i,j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Получение значений девиатора тензора напряжений завершает вычислительный цикл.

#### 4. Результаты численного моделирования

При апробации описанного выше ГМГ применялось двухчленное уравнение состояния:

$$\varepsilon = \frac{p - c_0^2 (\rho - \rho_0)}{\rho (\gamma - 1)}, \quad (13)$$

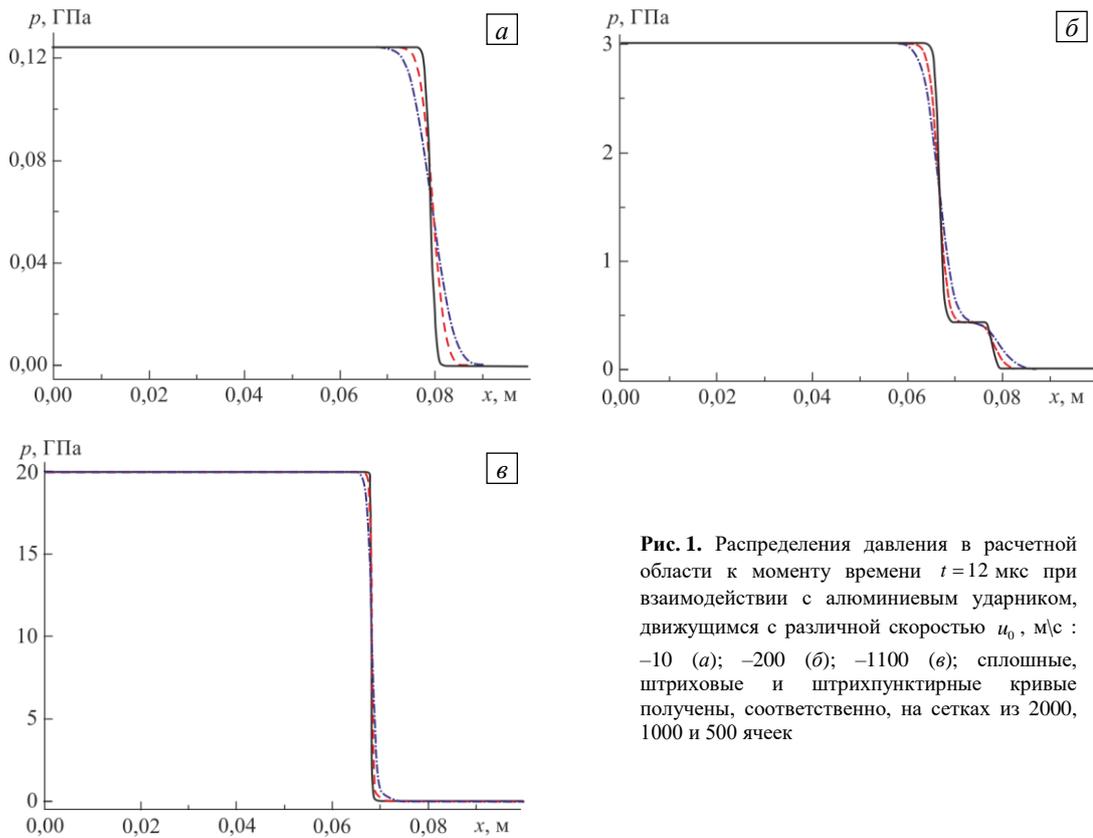
ранее использованное автором при исследовании в гидродинамическом приближении «косого» соударения металлических пластин (см. [14]), при этом для алюминия константы в уравнении (13) полагались следующими [15]:  $c_0 = 5500$  м/с,  $\rho_0 = 2710$  кг/м<sup>3</sup>,  $\gamma = 3,099$ , и выбирались из условия аппроксимации имеющихся в литературе экспериментальных данных. Предел текучести  $\sigma_s$  алюминия принимался равным 0,29 ГПа, модуль сдвига  $\mu = 27,6$  ГПа. Для выбранного уравнения состояния твердого тела

выражение гидродинамической скорости звука имеет вид:  $c = \sqrt{\frac{\gamma (p + p_*)}{\rho}}$ , где  $p_* = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma}$ .

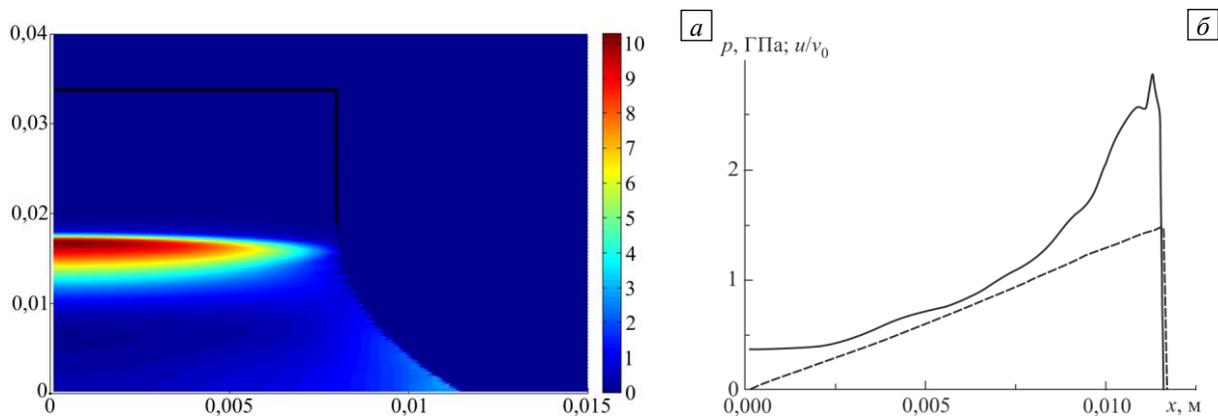
Покажем возможности предложенного ГМГ.

В качестве первой задачи рассмотрено взаимодействие алюминиевого образца с жесткой преградой, расположенной в начале координатной системы ( $x=0$ ), в одномерной постановке. На левой границе расчетной области ставилось условие жесткой стенки:  $u|_{x=0} = 0$ , а правая граница ( $x=0,1$  м) полагалась свободной, через нее материал ударника мог свободно втекать или вытекать (длина ударника превосходила размеры расчетной области). Начальные параметры при  $t=0$  принимались следующими: плотность  $\rho = \rho_0$ , скорость  $u = u_0$ , давление  $p_0 = 0$ , девиатор напряжений  $(s_{ij})_0 = 0$ . Из [3] для этой задачи известны режимы распространения отраженной от стенки волны. Так, в диапазоне скорости от  $-991$  до  $-34$  м/с реализуется двухволновой режим отражения с упругим предвестником, вне этого диапазона имеют место одноволновые режимы отражения.

На рисунке 1 представлены данные об изменении давления  $p(x)$  в расчетной области, полученные к моменту времени  $t = 12$  мкс при трех характерных скоростях удара  $u_0$ :  $-10$ ;  $-200$ ;  $-1100$  м/с. Вычисления проводились при постоянном шаге по времени  $\Delta t = 6 \cdot 10^{-9}$  с на равномерной сетке, состоящей из 500, 1000 и 2000 ячеек. Рассчитанные волновые режимы соответствуют описанным в [3] вариантам отражения.



**Рис. 1.** Распределения давления в расчетной области к моменту времени  $t = 12$  мкс при взаимодействии с алюминиевым ударником, движущимся с различной скоростью  $u_0$ , м/с:  $-10$  (а);  $-200$  (б);  $-1100$  (в); сплошные, штриховые и штрихпунктирные кривые получены, соответственно, на сетках из 2000, 1000 и 500 ячеек



**Рис. 2.** Картина распределения гидродинамического давления (ГПа) к моменту времени  $t = 0,32$  мкс (а); зависимости давления (сплошная кривая) и относительной скорости растекания материала ударника (штриховая) у жесткой преграды (б)

Для иллюстрации двумерного расчета рассмотрена задача о взаимодействии алюминиевого ударника размером  $0,8 \times 4$  см с жесткой преградой. Вычисления проводились на прямоугольной сетке из  $150 \times 400$  ячеек с постоянным шагом по времени  $\Delta t = 710^{-9}$  с. Начальные и граничные условия были теми же, что и в предыдущей задаче. Для локализации контактной границы использовался метод маркеров [16]. Рисунок 2 содержит распределение гидродинамического давления, а также зависимость давления в ударнике  $p(x)$  и относительной скорости растекания  $u(x)/v_0$  его материала у преграды на момент времени  $t = 0,32$  мкс при скорости удара  $v_0 = 1000$  м/с.

## 5. Заключение

Для интегрирования гиперболической нелинейной системы уравнений, описывающей в рамках классической модели Прандтля–Рейса упругопластическую деформацию среды, предложен гибридный метод Годунова. При вычислении потоковых переменных на гранях смежных ячеек применен линеаризованный римановский решатель, в алгоритме которого используются правые собственные векторы уравнений модели. Уравнения, записанные в дивергентном виде, аппроксимировались с помощью конечно-объемных формул, а для представления других, то есть не приводящихся к дивергентной форме уравнений, прибегали к конечно-разностным соотношениям.

Подтверждено расчетами, что если вместо закона Фурье взять закон Максвелла–Каттанео, то для нахождения деформаций теплопроводной упругопластической среды может быть применен ГМГ, поскольку моделирующие уравнения в этом случае также относятся к гиперболическому типу. Для иллюстрации работоспособности предложенного ГМГ рассчитаны одно- и двумерная задачи.

## Литература

1. Абузаров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40, № 5. С. 940-953.
2. Аганян А.А., Хисматуллина Н.А. Расчет волн в упругопластическом теле // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2018. Т. 160, № 3. С. 435-447.
3. Меньшов И.С., Мищенко А.В., Серёжкин А.А. Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках // Матем. моделирование. 2013. Т. 25, № 8. С. 89-108. (English version <https://doi.org/10.1134/S2070048214020070>)
4. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. Сузов В.С. К расчету течений теплопроводной парогазокапельной смеси // СибЖВМ. 2020. Т. 23, № 2. С. 201-217. (English version <https://doi.org/10.1134/S199542392002007X>)
6. Toro E.F. Riemann solvers with evolved initial condition // Int. J. Numer. Meth. Fluid. 2006. Vol. 52. P. 433-453. <https://doi.org/10.1002/flid.1186>
7. Сузов В.С. Метод Годунова для расчета многомерных течений односкоростной многокомпонентной смеси // ИФЖ. 2016. Т. 89, № 5. С. 1237-1249. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1486-5>)
8. Сузов В.С. Об одном способе приближенного решения задачи Римана для односкоростной многокомпонентной смеси // ИФЖ. 2010. Т. 83, № 2. С. 351-356. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-010-0354-y>)
9. Сузов В.С. Гиперболическая модель односкоростной теплопроводной смеси с учетом межфракционного теплообмена // ТВТ. 2018. Т. 56, № 6. С. 975-985. <https://doi.org/10.31857/S004036440003570-1>
10. Высокоскоростное взаимодействие тел / Отв. ред. В.М. Фомин. Новосибирск: Издательство СО РАН, 1999. 600 с.
11. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир. 1967. С. 212-263
12. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. 607 с.
13. Сузов В.С. О гиперболизации ряда моделей механики сплошной среды // ИФЖ. 2019. Т. 92, № 5. С. 2341-2357. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02046-x>)
14. Сузов В.С. Косое соударение металлических пластин // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24, № 6. С. 115-120. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00740423>)
15. Сузов В.С. Моделирование высокоскоростного взаимодействия капель (струй) жидкости с преградами, воздушными ударными волнами / Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Челябинск, ИТПМ СО РАН, 1993. 160 с.
16. Сузов В.С. Взаимодействие ударных волн с каплями пузырьковой жидкости // ЖТФ. 2001. Т. 71, № 6. С. 17-22. (English version <https://doi.org/10.1134/1.1379630>)

## References

1. Abuzyarov M. Kh, Bazhenov V.G., Kotov V.L., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Feldgun V.R. A Godunov-type method in dynamics of elastoplastic media. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, vol. 40, pp. 900-913.
2. Aganin A.A., Khismatullina N.A. Raschet voln v uprugoplasticheskom tele [Computation of waves in elastic-plastic body]. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, vol. 160, no. 3, pp. 435-447.

3. Menshov I.S., Mischenko A.B., Serejkin A.A. Numerical modeling of elastoplastic flows by the Godunov method on moving Eulerian grids. *Math. Models Comput. Simul.*, 2014, vol. 6, pp. 127-141. <https://doi.org/10.1134/S2070048214020070>
4. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., Krayko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoye resheniye mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 400 p.
5. Surov V.S. Calculation of heat-conducting vapor–gas–drop mixture flows. *Numer. Analys. Appl.*, 2020, vol. 13, pp. 165-179. <https://doi.org/10.1134/S199542392002007X>
6. Toro E.F. Riemann solvers with evolved initial condition. *Int. J. Numer. Meth. Fluid.*, 2006, vol. 52, pp. 433-453. <https://doi.org/10.1002/flid.1186>
7. Surov V.S. The Godunov method for calculating multidimensional flows of a one-velocity multicomponent mixture. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2016, vol. 89, pp. 1227-1240. <https://doi.org/10.1007/s10891-016-1486-5>
8. Surov V.S. On a method of approximate solution of the Riemann problem for a one-velocity flow of a multicomponent mixture. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2010, vol. 83, pp. 373-379. <https://doi.org/10.1007/s10891-010-0354-y>
9. Surov V.S. Hyperbolic model of a single-speed, heat-conductive mixture with interfractional heat transfer. *High Temp.*, 2018, vol. 56, pp. 890-899. <https://doi.org/10.1134/S0018151X1806024X>
10. Fomin V.M. (ed.) *Vysokoskorostnoye vzaimodeystviye tel* [High-speed interaction of bodies]. Novosibirsk, Izdatel'stvo SO RAN, 1999. 600 p.
11. Wilkins M.L. Calculation of elastic-plastic flow. *Fundamental methods in hydrodynamics*, ed. B.J. Alder, S. Fernbach, M. Rotenberg. Academic Press, 1964. Pp. 211-263.
12. Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskiye voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow, Fizmatlit, 2012. 607 p.
13. Surov V.S. On hyperbolization of a number of continuum mechanics models. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2019, vol. 92, pp. 1302-1317. <https://doi.org/10.1007/s10891-019-02046-x>
14. Surov V.S. Oblique impact of metal plates *Combust. Explos. Shock Waves*, 1988, vol. 24, pp. 747-752. <https://doi.org/10.1007/BF00740423>
15. Surov V.S. *Modelirovaniye vysokoskorostnogo vzaimodeystviya kapel' (struy) zhidkosti s pregradami, vozdushnymi udarnymi volnami* [Modeling of high-speed interaction of liquid droplets (jets) with obstacles, air shock waves]. PhD Dissertation, Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Chelyabinsk, 1993. 160 p.
16. Surov V.S. Interaction of shock waves with bubble-liquid drops. *Tech. Phys.*, 2001, vol. 46, pp. 662-667. <https://doi.org/10.1134/1.1379630>

Поступила в редакцию 23.10.2020; после доработки 11.01.2021; принята к опубликованию 15.02.2021