DOI:10.7242/1999-6691/2021.14.1.1
УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ВО ФЛЮИДОНАСЫЩЕННОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗЬЮ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ЖИДКОЙ ФАЗЫ

В.И. Ерофеев, А.В. Леонтьева

Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация

Представлена математическая модель, описывающая распространение плоской продольной волны во флюидонасыщенной пористой среде с учетом геометрической нелинейности жидкой компоненты среды. Нелинейная связь между деформациями и перемещениями уточняет классическую теорию Био, в рамках которой рассматривается флюидонасыщенная пористая среда. Построены эволюционные уравнения для смещений скелета среды и жидкости в порах. Показано, что если жидкость удерживается в порах, то распространение волны описывается уравнением, которое обобщает известное уравнение Бюргерса и имеет решение в виде стационарной ударной волны, возникающей в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и диссипации. Определена зависимость ширины фронта ударной волны от вязкости флюида, насыщающего поры, и амплитуды ударной волны. При увеличении коэффициента вязкости профиль волны становится более крутым, то есть ширина фронта волны уменьшается. С ростом амплитуды волны ширина фронта, в зависимости от остальных параметров исходной системы, может как увеличиваться, так и уменьшаться. Относительно параметра вязкости флюида проанализированы предельные случаи полученного обобщенного уравнения Бюргерса. Если жидкость беспрепятственно перетекает в порах, то система эволюционных уравнений сводится к одному уравнению простой волны, то есть распространение плоской продольной волны в пористой среде представляется известным уравнением нелинейной волновой динамики – уравнением Римана. Уравнение отвечает нелинейным волнам, для которых характерно укручение переднего фронта с последующим опрокидыванием, возникающим в результате нарастания нелинейных эффектов в отсутствие компенсирующих факторов, таких как дисперсия и диссипация.

Ключевые слова: пористая среда (среда Био), геометрическая нелинейность, обобщенное уравнение Бюргерса, стационарная ударная волна, волна Римана

PLANE LONGITUDINAL WAVES IN A FLUID-SATURATED POROUS MEDIUM WITH A NONLINEAR RELATIONSHIP BETWEEN DEFORMATIONS AND DISPLACEMENTS OF THE LIQUID PHASE

V.I. Erofeev and A.V. Leonteva

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

A mathematical model is presented to describe the propagation of a plane longitudinal wave in a fluid saturated porous medium, taking into account the geometric nonlinearity of the liquid component of the medium. The nonlinear relationship between deformations and displacements refines the classical Biot's theory, within the framework of which a fluid saturated porous medium is considered. Evolutionary equations for the displacements of the skeleton of the medium and fluid in the pores are obtained. It is shown that, if the liquid is confined in the pores, then the wave propagation is described by an equation that generalizes the well-known Burgers equation and has a solution in the form of a stationary shock wave resulting from mutual compensation of the effects of nonlinearity and dissipation. The dependence of the width of the shock wave front on the viscosity of the fluid saturating the pores and the shock wave amplitude is determined. As the viscosity coefficient increases, the wave profile becomes steeper, i.e., the wave front width decreases. With an increase in the wave amplitude, the front width can either increase or decrease, depending on the other parameters of the original system. The limiting cases of the obtained generalized Burgers equation are analyzed with respect to the fluid viscosity parameter. If the liquid flows freely in the pores, then the system of evolutionary equations is reduced to a single equation of a simple wave, i.e., the propagation of a plane longitudinal wave in a porous medium can be described by the well-known equation of nonlinear wave dynamics – the Riemann equation. The equation describes the nonlinear waves, which are characterized by a steepening of the leading edge with subsequent overturning resulting from the growth of nonlinear effects in the absence of compensating factors such as dispersion and dissipation.

Key words: porous medium (Biot medium), geometric nonlinearity, generalized Burgers equation, stationary shock wave, Riemann wave

При изучении процессов в геофизике, механике природных и искусственных композиционных материалов широко используются математические модели деформируемых пористых сред. При этом в расчетах применяются как классические модели, восходящие к работам М.А. Био [1, 2], Я.И. Френкеля [3], Ф. Гассмана [4], Л.Я. Косачевского [5], так и их последующие модификации [6–36].

Авторы большинства перечисленных работ ограничиваются в своих исследованиях линейной теорией пороупругости, однако, как показано экспериментально в [37], нелинейные эффекты в пористых материалах могут быть существенными, что также представляет интерес. Нелинейное обобщение модели Био произведено в [38].

Уравнения, описывающие движение флюидонасыщенной пористой среды в одномерном случае с учетом геометрической нелинейности твердой и жидкой фаз, имеют вид:

$$\begin{cases} \rho_{11}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\rho_{12}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}+b\left(\dfrac{\partial U}{\partial t}-\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}, \\ \rho_{12}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\rho_{22}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}+b\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}-\dfrac{\partial U}{\partial t}\right)=\dfrac{\partial s}{\partial x}, \end{cases} \tag{1}$$

где $U=U(x,t)$, $V=V(x,t)$ — смещения скелета и жидкости в порах вдоль координаты x со временем t, ρ_{11}, ρ_{22} — эффективные плотности, соответственно, скелета и жидкости в порах, ρ_{12} — коэффициент массовой связи между флюидом и твердой фазой,

$$\sigma_{11}=Ae_U+2Ne_{11}+Qe_V\,,\qquad s=Qe_U+Re_V\,,$$
$$e_U=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2,\qquad e_V=\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2,\qquad e_{11}=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2,$$

A, N, Q, R — упругие константы, $b=\left(\eta/K_{pr}\right)\Phi^2$, η — динамическая вязкость флюида, Φ — коэффициент пористости, K_{pr} — коэффициент проницаемости.

Решение системы уравнений (1) ищем в виде асимптотических разложений по малому параметру $\varepsilon<<1$:

$$U=U_{(0)}+\varepsilon U_{(1)}+\ldots\,,\qquad V=V_{(0)}+\varepsilon V_{(1)}+\ldots\,.$$

Вводим новые переменные $\xi=x-ct$, $\tau=\varepsilon t$. Такой выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси x, медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Считаем, что в системе (1) нелинейность имеет первый порядок малости по ε и вязкость является малой величиной.

В данной работе ограничиваемся рассмотрением нелинейности только относительно функции смещений жидкости $V(\xi,\tau)$.

В нулевом приближении по ε получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\rho_{11}c^2-A-2N\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\left(\rho_{12}c^2-Q\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}=0, \\ \left(\rho_{12}c^2-Q\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+\left(\rho_{22}c^2-R\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}=0. \end{cases}$$

Условие существования ненулевого решения этой системы дает следующее биквадратное уравнение для определения скорости:

$$m_1c^4+m_2c^2+m_3=0\,,$$

где $m_1=\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2$, $m_2=2\rho_{12}Q-\rho_{11}R-\rho_{22}(A+2N)$, $m_3=R(A+2N)-Q^2$. Для существования двух действительных и положительных корней уравнения необходимо выполнение неравенств одной из двух следующих систем:

$$\begin{cases} m_1>0, \\ m_2<0, \\ m_3>0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} m_1<0, \\ m_2>0, \\ m_3<0. \end{cases}$$

Связи присоединенной плотности массы ρ_{12} с истинными плотностями фаз даны, например, в [2] и имеют вид: $\rho_{11}=\rho_1-\rho_{12}$, $\rho_{22}=\rho_2-\rho_{12}$, $\rho_{12}<0$, ρ_1, ρ_2 — плотности твердой и жидкой фаз соответственно. Очевидно, что $m_1>0$.

Первое приближение по параметру ε приводит к системе эволюционных уравнений:

$$\begin{cases} 2\varepsilon c\left(\rho_{11}+\rho_{12}\right)\dfrac{\partial W}{\partial \tau}+2\varepsilon c\left(\rho_{12}+\rho_{22}\right)\dfrac{\partial G}{\partial \tau}+\left(Q+R\right)G\dfrac{\partial G}{\partial \xi}=0, \\ cb\left(\rho_{12}+\rho_{11}\right)W-cb\left(\rho_{12}+\rho_{11}\right)G-2\varepsilon c\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)\dfrac{\partial G}{\partial \tau}+\left(\rho_{12}Q-\rho_{11}R\right)G\dfrac{\partial G}{\partial \xi}=0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: $W=\dfrac{\partial U}{\partial \xi}$, $G=\dfrac{\partial V}{\partial \xi}$.

Система (2) может быть сведена к одному уравнению для функции продольной деформации G:

$$4\varepsilon^2 c\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2}+2\varepsilon bc\left(\rho_{11}+\rho_{22}+2\rho_{12}\right)\frac{\partial G}{\partial \tau}+b\left(Q+R\right)G\frac{\partial G}{\partial \xi}+2\varepsilon\left(\rho_{11}R-\rho_{12}Q\right)\frac{\partial}{\partial \tau}\left(G\frac{\partial G}{\partial \xi}\right)=0\,. \quad (3)$$

Известно, что классическим уравнением для описания волн в нелинейной недиспергирующей среде с диссипацией является уравнение Бюргерса [39, 40]. Из полученного уравнения (3) видно, что дисперсия в рассматриваемой среде отсутствует. Уравнение (3) от уравнения Бюргерса отличают вторая производная по времени и еще одно квадратично-нелинейное слагаемое — производная по времени от имеющейся в уравнении Бюргерса квадратичной нелинейности. Диссипативные слагаемые входят в уравнение (3) как явно, так и неявно. Явно в уравнении фигурирует только одно диссипативное слагаемое. Но отчасти диссипативным проявляет себя дополнительное, по сравнению с уравнением Бюргерса, нелинейное слагаемое. Об этом свидетельствует линейное приближение относительно малых возмущений. Наличие в уравнении (3) нелинейных и диссипативных слагаемых позволяет сделать предположение о возможности существования стационарных ударных волн в среде.

Рассмотрим стационарную волну $G=G\left(\chi\right)$, где $\chi=\xi-v\tau$ — бегущая координата. Уравнение (3) принимает вид:

$$v^2\frac{d^2G}{d\chi^2}-a_1 v\frac{d}{d\chi}\left(G\frac{dG}{d\chi}\right)+2a_2 bG\frac{dG}{d\chi}-a_3 bv\frac{dG}{d\chi}=0\,,$$

или

$$\frac{d}{d\chi}\left(v^2\frac{dG}{d\chi}-a_1 vG\frac{dG}{d\chi}+a_2 bG^2-a_3 bvG\right)=0\,, \quad (4)$$

где $a_1=\dfrac{\rho_{11}R-\rho_{12}Q}{2c\varepsilon\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)}$, $a_2=\dfrac{Q+R}{8c\varepsilon^2\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)}$, $a_3=\dfrac{\rho_{11}+\rho_{22}+2\rho_{12}}{2\varepsilon\left(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2\right)}$.

Уравнение (4) с точностью до коэффициентов похоже на уравнение, приведенное в [40], но отличается от него последним слагаемым. Уравнение (4) имеет решение в виде стационарной ударной волны. Интегрируя уравнение один раз по бегущей координате с учетом граничных условий

$$G\left(\chi\right)=\begin{cases} G_1, & \chi\to-\infty, \\ G_2, & \chi\to+\infty, \end{cases}$$

приходим к выражению для скорости нелинейной волны:

$$v=\frac{a_2}{a_3}\left(G_1+G_2\right). \quad (5)$$

Найденное в результате однократного интегрирования уравнение далее с помощью метода разделения переменных интегрируем еще раз, учитывая скорость ударной волны (5). При повторном интегрировании константу интегрирования принимаем равной нулю. Получаем решение в неявном виде:

$$\chi=\frac{\left(G_1+G_2\right)}{a_3^2 b\left(G_2-G_1\right)}\left[\left(-a_1a_3G_1+a_2\left(G_1+G_2\right)\right)\ln\left(G-G_1\right)+\left(a_1a_3G_2-a_2\left(G_1+G_2\right)\right)\ln\left(G_2-G\right)\right]. \quad (6)$$

Производная представляется как

$$\frac{dG}{d\chi} = \frac{a_3^2 b\left(G_2 - G\right)\left(G - G_1\right)}{\left(G_1 + G_2\right)\left(a_2\left(G_1 + G_2\right) - a_1 a_3 G\right)},$$

где G определяется из уравнения (6).

Профили решения $G(\chi)$ и производной $G'(\chi)$ при различных значениях коэффициента вязкости b приведены на рисунках 1 и 2. Из рисунков видно, что профиль решения уравнения (6) имеет вид кинка — плавного перепада между двумя значениями функции, у которого отсутствует симметрия относительно точки перегиба. При уменьшении коэффициента вязкости профиль волны становится более пологим, то есть ширина фронта волны увеличивается.

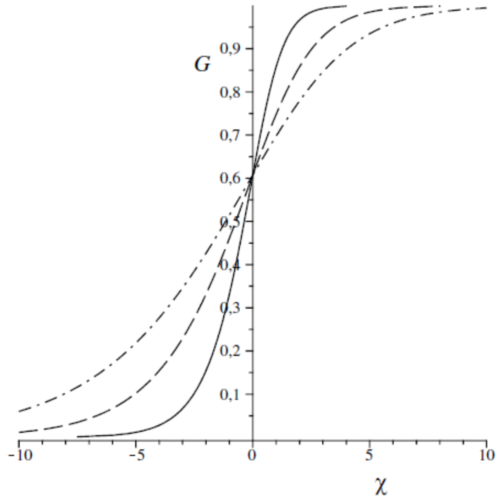

Рис. 1. Профиль стационарной ударной волны $G(\chi)$ при различных значениях коэффициента вязкости b: b_1 (сплошная линия), b_2 (пунктирная), b_3 (штрихпунктирная); $b_3 < b_2 < b_1$

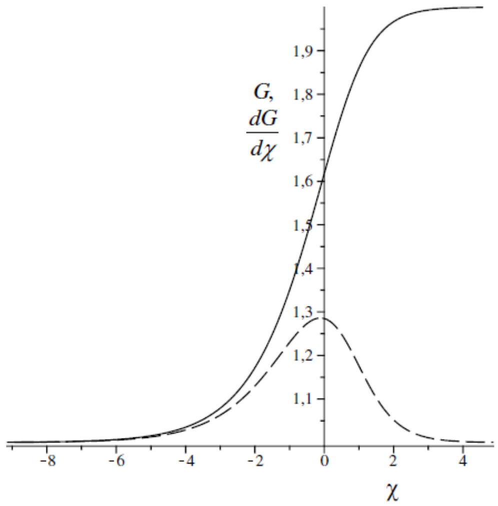

Рис. 2. Зависимости $G(\chi)$ (сплошная линия) и $G'(\chi)$ (пунктирная, график сдвинут по оси ординат вверх на величину G_1)

Параметры ударной волны, возникающей в результате взаимной компенсации эффектов нелинейности и диссипации, связаны соотношением:

$$\left(a_1 - \frac{v}{A}\right)\frac{v}{a_2 b \Delta} = \text{const}, \tag{7}$$

где $A = G_2 - G_1$ — амплитуда ударной волны, Δ — характерная ширина фронта ударной волны, v — скорость ударной волны, которая определяется выражением (5).

Из соотношения (7) видно, что зависимость между шириной фронта результирующей волны и вязкостью флюида является обратно пропорциональной. По отношению к амплитуде ширина фронта этой ударной волны ведет себя обратно пропорционально при $a_1 < v/A$ и прямо пропорционально при $a_1 > v/A$. Связь между параметрами ударной волны теперь иная, чем у стационарной ударной волны уравнения Бюргерса. В классическом уравнении Бюргерса ширина фронта прямо пропорциональна вязкости.

При стремлении b к нулю, то есть когда вязкость пренебрежимо мала и жидкость беспрепятственно перетекает в порах, уравнение (3) при последующем интегрировании по τ переходит в уравнение:

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{\rho_{11}R - \rho_{12}Q}{2c\varepsilon\left(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2\right)} G \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0, \tag{8}$$

которое является уравнением простой волны или уравнением Римана [39–42] и может быть решено методом характеристик как уравнение в частных производных первого порядка.

По мере распространения возмущения, описываемого уравнением (8), профиль волны искажается. С течением времени и, соответственно, с увеличением пройденного волной расстояния ее передний фронт (обращенный в направлении движения) становится более крутым, а задний — более пологим. Разные участки профиля волны бегут с разными скоростями. Опрокидывание волны произойдет в момент, когда первый раз пересекутся характеристики — при времени $t^* = \sqrt{\dfrac{e}{2a^2}}$, где $a = \dfrac{\rho_{11}R - \rho_{12}Q}{2c\varepsilon\left(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2\right)}$, e — число Эйлера (экспонента).

Заметим, что в другом предельном случае, когда b — бесконечно большая величина, также получаем уравнение Римана.

В природе, технике и технологиях часто встречаются пористые жидконасыщенные материалы с наполненными жидкостью и хаотически расположенными полостями. При определенных условиях полости под воздействием упругой волны колеблются и существенно влияют на закономерности ее распространения. В [43–45] показано, что, наряду с геометрической (нелинейной связью между деформациями и перемещениями) и физической (нелинейной связью между напряжениями и деформациями) нелинейностями, важно учитывать полостную нелинейность.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 20-19-00613).

Литература

1. *Biot M.A.* General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 1941. Vol. 12. P. 155-164. https://doi.org/10.1063/1.1712886
2. *Biot M.A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 1482-1498. https://doi.org/10.1063/1.1728759
3. *Френкель Я.И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т. 8, № 4. С. 134-149.
4. *Gassmann F.* Uber die elastizitat poroser medien // Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 1951. Vol. 96. P. 1-23. (English version https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.48.9319&rep=rep1&type=pdf)
5. *Косачевский Л.Я.* О распространении упругих волн в двухкомпонентных средах // ПММ. 1959. Т. 23, № 6. С. 1115-1123. (English version https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90015-2)
6. *Николаевский В.Н., Басниев А.Т., Горбунов А.Т., Зотов Г.А.* Механика пористых насыщенных сред. М: Недра. 1970. 339 с.
7. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М: Наука, 1978. 336 с.
8. *Coussy O.* Poromechanics. Wiley, 2004. 312 p.
9. *Coussy O.* Mechanics and physics of porous solids. Wiley, 2010. 282 p.
10. *Быков В.Г.* Сейсмические волны в пористых насыщенных породах. Владивосток: Дальнаука, 1999. 108 с.
11. *Schanz M.* Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: A boundary element approach. Springer, 2001. 170 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-44575-3
12. *Leclario Ph., Cohen-Tenoudji F., Aguirre-Puente J.* Extension of Boit's theory of waves propagation to frozen porous media // J. Acoust. Soc. Am. 1994. Vol. 96. P. 3753-3768. https://doi.org/10.1121/1.411336
13. *Заславский Ю.М.* Об эффективности возбуждения быстрой и медленной волн Био в водо- и газонасыщенных средах // Техническая акустика. 2002. Т. 2. С. 123-134.
14. *Заславский Ю.М.* Характеристики волн Био, излучаемых вибрационным источником во флюидонасыщенную среду // Акустический журнал. 2005. Т. 51, № 6. С. 759-770. (English version https://doi.org/10.1134/1.2130896)
15. *Марков М.Г.* Распространение упругих продольных волн в насыщенной пористой среде со сферическими неоднородностями // Акустический журнал. 2005. Т. 51, № 7. С. 132-139. (English version https://doi.org/10.1134/1.2133959)
16. *Абрашкин А.А., Авербах В.С., Власов С.Н., Заславский Ю.М., Соустова И.А., Судариков Р.А., Троицкая Ю.И.* О возможном механизме акустического воздействия на частично насыщенные пористые среды // Акустический журнал. 2005. Т. 51, № 7. С. 19-30. (English version https://doi.org/10.1134/1.2133949)
17. *Акуленко Л.Д., Нестеров С.В.* Инерционные и диссипативные свойства пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // Изв. РАН. МТТ. 2005. № 1. С. 109-119.
18. *Нестеров С.В., Акуленко Л.Д.* Динамическая модель пористой среды, заполненной вязкой жидкостью // ДАН. 2005. Т. 401, № 5. С. 630-633. (English version https://doi.org/10.1134/1.1922564)
19. *Марков М.Г.* Распространение волны Релея вдоль границы пористой среды, насыщенной неньютоновской жидкостью // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 4. С. 502-508. (English version https://doi.org/10.1134/S1063771006040099)
20. *Хоа Н.Н., Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // МКМК. 2011. Т. 17, № 4. С. 567-576.
21. *Заславский Ю.М., Заславский В.Ю.* Исследование акустического излучения при фильтрации воздушного потока сквозь пористую среду // Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 6. С. 756-761. (English version https://doi.org/10.1134/S1063771012060164)
22. *Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Тарлаковский Д.В., Локтева Н.А.* Численное моделирование динамики составного пороупругого тела // ППП. 2013. Т. 75, № 2. С. 130-136.
23. *Игумнов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А.* Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористом и вязкоупругом полупространствах // ППП. 2013. Т. 75, № 2. С. 145-151.
24. *Данг К.З., Тарлаковский Д.В.* Действие на границу упруго-пористого полупространства с касательной диафрагмой нестационарной нормальной осесимметричной нагрузки // МКМК. 2014. Т. 20, № 1. С. 148-158.
25. *Игумнов Л.А., Аменицкий А.В., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н.* Численно-аналитическое исследование динамики вязких пористо-упругих тел // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 1. С. 108-114. (English version https://doi.org/10.1134/S002189441401012X)

26. Poromechanics – A Tribute to Maurice A. Biot: Proceedings of the First Biot Conference on Poromechanics / Ed. J.-F. Thimus, Y. Abousleiman, A.H.-D. Cheng, O. Coussy, E. Detournay. Louvain la Neuve, Belgium, September 14-16, 1998. 648 p.
27. Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics / Ed. J.-L. Auriault, C. Geindrean, P. Royer, J.-F. Bloch, C. Boutin, L. Lewandovska. Grenoble, France, August 26-28, 2002. 955 p.
28. Poromechanics III – Biot Centennial (1905-2005): Proceedings of the Third Biot Conference on Poromechanics / Ed. Y.N. Abousleiman, A.H.-D. Cheng, F.-J. Ulm. Norman, Oklahoma, USA, May 24-27, 2005. 828 p.
29. Poromechanics IV: Proceedings of the Fourth Biot Conference on Poromechanics / Ed. H.I. Ling, A. Smyth, R. Betti. New York, USA, June 8-10, 2009. 1151 p.
30. Poromechanics V: Proceedings of the Fifth Biot Conference on Poromechanics / Ed. C. Hellmich, B. Pichler, D. Adam. Vienna, Austria, July 10-12, 2013. 2605 p.
31. *Городецкая Н.С.* Волны в пористо-упругих насыщенных жидкостью средах // Акустичний вісник. 2007. Т.10, № 2. С. 43-63.
32. *Mavko G., Mukeji T., Dvorkin J.* The rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media. Cambrige University Press, 2009. 524 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511626753
33. *Chrotiros N.P.* Acoustics of the seabed as a poroelastic medium. Springer, 2017. 100 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14277-7
34. *Rasolofosaon P.N.J.* Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media // Appl. Phys. Lett. 1988. Vol. 52. P. 780-782. https://doi.org/10.1063/1.99282
35. *Berryman J.G.* Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Am. 1981. Vol. 69. P. 416-424. https://doi.org/10.1121/1.385457
36. *Лебедев А.В.* Анализ поверхностных волн в упругой среде с пористым насыщенным слоем // Изв. вузов. Радиофизика. 2019. Т. 62, № 6. С. 469-489. (English version https://doi.org/10.1007/s11141-019-09988-5)
37. Проблемы нелинейной сейсмики / под ред. А.В. Николаева, И.Н. Галкина. М.: Наука, 1987. 257 с.
38. *Ерофеев В.И., Леонтьева А.В.* Волны Римана и ударные волны в пористой жидконасыщенной геометрически нелинейной среде // ИФЖ. 2020. Т. 93, № 5. С. 1197-1203. (English version https://doi.org/10.1007/s10891-020-02217-1)
39. *Рыскин Н.М., Трубецков Д.И.* Нелинейные волны. М.: Ленанд, 2017. 312 с.
40. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
41. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
42. *Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O.* Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the non-linear micropolar medium // ZAMM. 2017. Vol. 97. P. 1064-1071. https://doi.org/10.1002/zamm.201600146
43. *Наугольных К.А., Островский Л.А.* Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990. 236 с.
44. *Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В.* Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
45. *Bagdoev A., Erofeyev V., Shekoyan A.* Wave dynamics of generalized continua. Springer, 2016. 274 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37267-4

References

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation. *J. Appl. Phys.*, 1941, vol. 12, pp. 155-164. https://doi.org/10.1063/1.1712886
2. Biot M.A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.*, 1962, vol. 33, pp. 1482-1498. https://doi.org/10.1063/1.1728759
3. Frenkel' Ya.I. K teorii seysmicheskikh i seysmoelektricheskikh yavleniy vo vlazhnoy pochve [To the theory of the seismic and seismoelectric phenomena in the damp soil]. *Izv. AN SSSR. Ser. geogr. i geofiz. – Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Geophysics Series*, 1944, vol. 8, no. 4, pp. 134-149.
4. Gassmann F. On elasticity of porous media. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.48.9319&rep=rep1&type=pdf
5. Kosachevskii L.Ia. On the propagation of elastic waves in two-phase media. *J. Appl. Math. Mech.*, 1959, vol. 23, pp. 1593-1604. https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90015-2
6. Nikolayevskiy V.N., Basniyev A.T., Gorbunov A.T., Zotov G.A. *Mekhanika poristykh nasyshchennykh sred* [Mechanics of porous saturated environments]. Moscow, Nedra, 1970. 339 p.
7. Nigmatulin R.I. *Osnovy mekhaniki geterogennykh sred* [Bases of mechanics of heterogeneous environments]. Moscow, Nauka, 1978. 336 p.
8. Coussy O. *Poromechanics*. Wiley, 2004. 312 p.
9. Coussy O. *Mechanics and physics of porous solids*. Wiley, 2010. 282 p.
10. Bykov V.G. *Seysmicheskiye volny v poristykh nasyshchennykh porodakh* [Seismic waves in porous saturated breeds]. Vladivostok, Dal'nauka, 1999. 108 p.
11. Schanz M. *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: A boundary element approach*. Springer, 2001. 170 p. https://doi.org/10.1007/978-3-540-44575-3
12. Leclario Ph., Cohen-Tenoudji F., Aguirre-Puente J. Extension of Boit's theory of waves propagation to frozen porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1994, vol. 96, pp. 3753-3768. https://doi.org/10.1121/1.411336
13. Zaslavsky Yu.M. On excitation efficiency of the fast and slow Biot waves in water and gas saturated media. *Tekhnicheskaya akustika – Technical Acoustics*, 2002, vol. 2, pp. 123-134.
14. Zaslavskii Yu.M. Characteristics of Biot waves produced by a vibration exciter in a fluid-saturated medium. *Acoust. Phys.*, 2005, vol. 51, pp. 653-663. https://doi.org/10.1134/1.2130896
15. Markov M.G. Propagation of longitudinal elastic waves in a fluid-saturated porous medium with spherical inclusions. *Acoust. Phys.*, 2005, vol. 51, pp. S115-S121. https://doi.org/10.1134/1.2133959

16. Abrashkin A.A., Averbakh V.S., Vlasov S.N., Zaslavskii Yu.M., Soustova I.A., Sudarikov R.A., Troitskaya Yu.I. A possible mechanism of the acoustic action on partially fluid-saturated porous media. *Acoust. Phys.*, 2005, vol. 51, pp. S12-S22. https://doi.org/10.1134/1.2133949
17. Akulenko L.D., Nesterov S.V. Inertial and dissipative properties of a porous medium saturated with viscous fluid. *Mech. Solids*, 2005, vol. 40(1), pp. 90-98.
18. Nesterov S.V., Akulenko L.D. Dynamic model of a porous medium saturated with a viscous liquid. *Dokl. Phys.*, 2005, vol. 50, pp. 211-214. https://doi.org/10.1134/1.1922564
19. Markov M.G. Rayleigh wave propagation along the boundary of a non-Newtonian fluid-saturated porous medium. *Acoust. Phys.*, 2006, vol. 52, pp. 429-434. https://doi.org/10.1134/S1063771006040099
20. Hoa N.N., Tarlakovsky D.V. The kinematics of pertubation in a porous elastic half-plane object. *MKMK – Mechanics of composite materials and structures*, 2011, vol. 17, pp. 567-576.
21. Zaslavskii Yu.M., Zaslavskii V.Yu. Study of acoustic radiation during air stream filtration through a porous medium. *Acoust. Phys.*, 2012, vol. 58, pp. 708-712. https://doi.org/10.1134/S1063771012060164
22. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Tarlakovsky D.V., Lokteva N.A. Numerically modeling the dynamics of a compound poroelastic body. *PPP – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, vol. 75, no. 2, pp. 130-136.
23. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Belov A.A. Boundary-element analysis of waves over elastic, poro and viscoelastic half-spaces. *PPP – Problems of Strength and Plasticity*, 2013, vol. 75, no. 2, pp. 145-151.
24. Dang Q.G., Tarlakovsky D.V. Influence on the border of porous elastic half-space by tangent diaphragm of normal nonstationary axial symmetric loading. *MKMK – Mechanics of composite materials and structures*, 2014, vol. 20, no. 1, pp. 148-158.
25. Igumnov L.A., Amenitskii A.V., Belov A.A., Litvinchuk S.Yu., Petrov A.N. Numerical-analytic investigation of the dynamics of viscoelastic and porous elastic bodies. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2014, vol. 55, pp. 89-94. https://doi.org/10.1134/S002189441401012X
26. *Poromechanics – A Tribute to Maurice A. Biot: Proceedings of the First Biot Conference on Poromechanics*, ed. J.-F. Thimus, Y. Abousleiman, A.H.-D. Cheng, O. Coussy, E. Detournay. Louvain la Neuve, Belgium, September 14-16, 1998. 648 p.
27. *Poromechanics II: Proceedings of the Second Biot Conference on Poromechanics*, ed. J.-L. Auriault, C. Geindrean, P. Royer, J.-F. Bloch, C. Boutin, L. Lewandovska. Grenoble, France, August 26-28, 2002. 955 p.
28. *Poromechanics III – Biot Centennial (1905-2005): Proceedings of the Third Biot Conference on Poromechanics*, ed. Y.N. Abousleiman, A.H.-D. Cheng, F.-J. Ulm. Norman, Oklahoma, USA, May 24-27, 2005. 828 p.
29. *Poromechanics IV: Proceedings of the Fourth Biot Conference on Poromechanics*, ed. H.I. Ling, A. Smyth, R. Betti. New York, USA, June 8-10, 2009. 1151 p.
30. *Poromechanics V: Proceedings of the Fifth Biot Conference on Poromechanics*, ed. C. Hellmich, B. Pichler, D. Adam. Vienna, Austria, July 10-12, 2013. 2605 p.
31. Gorodetskaya N.S. Volny v poristo-uprugikh nasyshchennykh zhidkost'yu sredakh [Waves in poroelastic fluid-saturated media]. *Akustichniy visnik – Acoustic Bulletin*, 2007, vol. 10, no. 2, pp. 43-63.
32. Mavko G., Mukeji T., Dvorkin J. *The rock physics handbook. Tools for seismic analysis in porous media*. Cambrige University Press, 2009. 524 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511626753
33. Chrotiros N.P. *Acoustics of the seabed as a poroelastic medium*. Springer, 2017. 100 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14277-7
34. Rasolofosaon P.N.J. Importance of interface hydraulic condition on the generation of second bulk compressional wave in porous media. *Appl. Phys. Lett.*, 1988, vol. 52, pp. 780-782. https://doi.org/10.1063/1.99282
35. Berryman J.G. Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1981, vol. 69, pp. 416-424. https://doi.org/10.1121/1.385457
36. Lebedev A.V. Analysis of surface waves in an elastic medium with a porous saturated layer. *Radiophys. Quantum El.*, 2019, vol. 62, pp. 420-438. https://doi.org/10.1007/s11141-019-09988-5
37. Nikolayev A.V., Galkin I.N. (eds.) *Problemy nelineynoy seysmiki* [Nonlinear seismic problems]. Moscow, Nauka, 1987. 257 p.
38. Erofeev V.I., Leont'eva A.V. Riemann and shock waves in a porous liquid-saturated geometrically nonlinear medium. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2020, vol. 93, pp. 1156-1162. https://doi.org/10.1007/s10891-020-02217-1
39. Ryskin N.M., Trubetskov D.I. *Nelineynyye volny* [Nonlinear Waves]. Moscow, Lenand, 2017. 312 p.
40. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Teoreticheskiye osnovy nelineynoy akustiki* [Theoretical foundations of nonlinear acoustics]. Moscow, Nauka, 1975. 288 p.
41. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, 1974. 636 p.
42. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O. Stationary longitudinal thermoelastic waves and the waves of the rotation type in the non-linear micropolar medium. *ZAMM*, 2017, vol. 97, pp. 1064-1071. https://doi.org/10.1002/zamm.201600146
43. Naugolnykh K., Ostrovsky L. *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge University Press, 1998. 298 p.
44. Bagdoyev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. *Lineynyye i nelineynyye volny v dispergiruyushchikh sploshnykh sredakh* [The linear and nonlinear waves in dispersive continuous media]. Moscow, Fizmatlit, 2009. 320 p.
45. Bagdoev A., Erofeyev V., Shekoyan A. *Wave dynamics of generalized continua*. Springer, 2016. 274 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37267-4

Поступила в редакцию 09.12.2020; после доработки 13.01.2021; принята к опубликованию 15.01.2021

Сведения об авторах

Ерофеев Владимир Иванович, дфмн, проф., дир., Институт проблем машиностроения РАН (ИПМ РАН), 603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85*;* e-mail: erof.vi@yandex.ru

Леонтьева Анна Викторовна, ктн, снс, ИПМ РАН; e-mail: aleonav@mail.ru