

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.4.36](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.36)

УДК 532.5

## О ПРИМЕНЕНИИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ВИДЕБУРГА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СМЕСИ С КОНЦЕНТРАЦИОННО-ЗАВИСИМОЙ ДИФФУЗИЕЙ

Д.А. Брацун, В.А. Вяткин

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация*

Рассматривается задача устойчивости изотермической системы двух смешивающихся жидкостей в поле силы тяжести. Жидкости представляют собой водные растворы не реагирующих веществ, имеющих разные коэффициенты диффузии. В начальный момент времени растворы разделены в пространстве бесконечно тонкой горизонтальной контактной поверхностью. Такая конфигурация легко реализуется экспериментально, но более сложна для теоретического анализа, поскольку профили концентрации эволюционируют во времени. Предполагается, что начальная конфигурация системы статически устойчива. После старта эволюции растворы начинают смешиваться, проникают друг в друга и создают условия для развития конвективной неустойчивости двойной диффузии. Важным осложняющим фактором задачи служит функциональная зависимость коэффициентов диффузии растворов от их концентрации. В последние годы этот эффект активно изучается, так как его существенное влияние на конвективную устойчивость было доказано экспериментально. В данной работе для простоты предполагается, что коэффициенты диффузии растворов зависят от концентрации линейным образом. Математическая постановка задачи устойчивости смеси включает в себя уравнение движения в приближении Дарси и Буссинеска, уравнение неразрывности, а также два уравнения переноса для концентраций веществ. Решение такой задачи при отсутствии концентрационно-зависимой диффузии хорошо известно из литературы. Учет же этой зависимости приводит к уравнениям нелинейной диффузии, которые в общем случае могут быть решены только численно. Для нахождения приближенного аналитического решения авторами предлагается использовать метод линеаризации уравнений диффузии, предложенный Видебургом в 1890 г. Метод хорошо известен в теории теплопроводности, хотя изначально был разработан именно для растворов веществ. Показано, что в этом случае условия для конвективной устойчивости основного состояния могут быть получены в аналитическом виде. Проводится сравнительный анализ невязки между решением Видебурга и численным решением. На основании аналитического решения построена карта устойчивости. Исследовано влияние концентрационной зависимости коэффициентов диффузии на устойчивость смеси.

*Ключевые слова:* концентрационно-зависимая диффузия, неустойчивость двойной диффузии, смешивающиеся жидкости, линеаризация Видебурга

## APPLICATION OF WIEDEBURG LINEARIZATION FOR SOLVING THE STABILITY PROBLEM OF A TWO-LAYER MIXTURE WITH CONCENTRATION-DEPENDENT DIFFUSION

D.A. Bratsun and V.A. Vyatkin

*Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation*

In this paper, we consider the problem of the stability of an isothermal system of two miscible fluids in a gravity field. Fluids are aqueous solutions of non-reacting substances with different diffusion coefficients. At the very beginning, the solutions uniformly fill half-spaces, which are separated from each other by an infinitely thin horizontal contact surface. Such a configuration can be easily realized experimentally, although it is more difficult for theoretical analysis. We assume that the initial configuration of the system is statically stable. After the start of evolution, the solutions begin to mix, penetrating each other, and creating conditions for the development of the convective instability of double diffusion. An important complicating factor of the problem is the functional dependence of the diffusion coefficients of solutions on their concentration. In recent years, this effect has been actively studied, since its significant influence on convective stability has been proven experimentally. For simplicity, we assume that the diffusion coefficients of solutions depend linearly on concentration. The problem of the stability of a mixture includes the equation of motion in the Darcy and Boussinesq approximation, the continuity equation, and two transport equations for the concentrations. The solution to this problem in the absence of the effect of concentration-dependent diffusion is well known from the literature. If we take into account such a dependence, then we have to deal with the problem of nonlinear diffusion, which can only be solved numerically. To find an analytical solution to the problem, we propose to apply the method of preliminary linearization of Wiedeberg (1890). The method is well known in the theory of thermal conductivity, although it was originally developed specifically for solutions of substances. In our case, we demonstrate that the conditions for convective stability of the base state can be obtained analytically. The comparative analysis of the discrepancy between the Wiedeberg solution and the numerical solution is given. Based on the closed-form analytical solution, we obtain a stability map for the problem under the consideration. We show how the effect of concentration-dependent diffusion affects stability.

*Key words:* concentration-dependent diffusion, double diffusion instability, miscible liquids, Wiedeberg linearization

### 1. Введение

Как известно, индивидуальные особенности каждой жидкости определяются набором физических констант, из которых к основным относятся коэффициенты вязкости, теплопроводности, поверхностного натяжения и диффузии растворенного вещества. Хотя, как правило, в задачах механики жидкости эти коэффициенты считаются постоянными, в некоторых случаях необходимо учитывать их функциональную зависимость от значения физических полей — давления, температуры и концентрации. Одной из первых в этом ряду стала изучаться связь кинематической вязкости и температуры в задачах тепловой конвекции

[1, 2], что было обусловлено сильным влиянием на вязкость нагрева системы и тем, что диапазоны практически интересных разностей температур могли достигаться в лабораторных условиях. Как оказалось, особенно ярко температурный отклик проявляется в вязких жидкостях, так как конвекция возникает здесь при значительных разностях температур. Эксперименты показывают, что вязкость может меняться с температурой на порядок величины. В работах [1, 2] рассмотрена задача устойчивости вертикального плоского слоя жидкости, нагреваемого сбоку. Обнаружено, что температурная зависимость вязкости приводит к нарушению центральной симметрии основного течения. Свойства устойчивости системы также существенно меняются: например, в случае жидкостей с высоким значением числа Прандтля наблюдается снятие вырождения между температурными волнами, идущими вниз и вверх по слою [3]. Все это приводит к перестройке характерных структур течения.

Другой яркий пример температурной зависимости показывает коэффициент поверхностного натяжения жидкости [4]. Это его свойство приводит к тому, что при наложении градиента температуры вдоль свободной поверхности натяжение более горячего участка уменьшается, и жидкость приходит в движение [5]. Устойчивость слоя нарушается беспороговым образом, то есть жидкость начинает двигаться при сколь угодно малом градиенте температуры. Такое течение называют термокапиллярным, и для его возникновения не требуется наличие силы тяжести. Исследованию термокапиллярного течения посвящен большой объем литературы (см., например, библиографию в [6]), так как оно имеет множество практических приложений. Такой же большой интерес вызывают концентрационно-капиллярные течения [7], в которых поверхностное натяжение зависит от концентрации растворенного компонента.

Данная работа посвящена исследованию эффекта концентрационно-зависимой диффузии в многокомпонентных водных растворах. До недавнего времени практически вся литература, посвященная конвективной устойчивости растворов, как реагирующих, так и не реагирующих, содержала предположение постоянства коэффициентов диффузии растворенных веществ. Можно было найти лишь редкие источники, в которых в задачах реакции–диффузии жидкость с самого начала считается неподвижной (например, см. [8, 9]). На практике коэффициенты диффузии всегда зависят от концентрации раствора. Однако, если в теории диффузии эта взаимосвязь известна достаточно давно [10], то в механике жидкостей она, как правило, считается настолько слабой, что ею пренебрегают. В работах [11–14] впервые рассмотрена задача о конвективной устойчивости, в которой постулируется взаимообусловленность коэффициентов диффузии веществ и их концентрации. Авторами данных работ широко изучается как экспериментально, так и теоретически развитие неустойчивости в двухслойной системе смешивающихся жидкостей, помещенных в узкий вертикальный зазор ячейки Хеле-Шоу. Ее верхний и нижний слои образованы, соответственно, водными растворами кислоты и основания. При приведении жидкостей в контакт в системе начинается фронтальная реакция нейтрализации. В серии исследований показано, что 1) макроскопическое движение жидкости вызывается новым механизмом неустойчивости — CDD конвекцией (Concentration-Dependent Diffusion), которая обусловлена концентрационной зависимостью коэффициентов диффузии, 2) структурообразование в двухслойной системе реагирующих жидкостей принципиально зависит от CDD конвекции, 3) возникающая неустойчивость является одной из разновидностей конвекции двойной диффузии. Таким образом, этот эффект впервые в механике жидкости попал в поле зрения исследователей. И если сначала сложилось мнение, что зависимость коэффициентов диффузии реагентов от их концентраций проявляется только при наличии между компонентами смеси химической реакции, то на сегодняшний день такой уверенности уже нет.

В данной работе рассматривается задача без химических реакций между компонентами смеси. Это позволяет существенно упростить постановку и изучить влияние нелинейной диффузии на устойчивость смеси в рамках классической задачи о двойной диффузии [15, 16]. Если эффект CDD не учитывается и система стартует из начального состояния, в котором два однородных полупространства разделены и заполнены смешивающимися растворами, то задача устойчивости имеет точное решение [17]. В общем случае концентрационной зависимости коэффициентов диффузии устойчивость этой системы может быть исследована только численно [11–14]. Однако в частном случае линейной зависимости, как оказалось, возможно аналитическое решение. В данной работе используется метод линеаризации уравнения диффузии, предложенный немецким физиком Отто Видебургом в 1890 году [18]. Интересно, что оригинальная работа Видебурга посвящена диффузии именно растворов веществ, хотя методика линеаризации, предложенная им, известна исключительно как теоретический прием теории теплопроводности [19]. Сам Видебург применял этот прием для вычисления профилей концентрации одиночных водных растворов различных веществ, которые затем сравнивал с данными своих же экспериментов. По-видимому, работы Рейнольдса по теории гидродинамической устойчивости Видебургу были неизвестны, и ему не пришло в голову, что его метод можно приложить к анализу устойчивости смеси. С другой стороны, явление неустойчивости двойной диффузии было обнаружено и осмысленно лишь спустя 70 лет после выхода в свет работы немецкого ученого [15].

Причина, по которой предложенный метод не был востребован в теории диффузии растворов, является комплексной. Концентрационные поля сравнительно сложно измерять и контролировать в эксперименте [20]. Надежная экспериментальная технология для определения концентрации (многолучевая лазерная

интерферометрия Физо) появилась только во второй половине XX века. Невозможность получить достоверные данные экспериментальных наблюдений приводила к недостаточной информации о физических процессах и их недооценке. Поэтому долгое время концентрационно-зависимая диффузия вещества находилась в тени другого явления — температурной зависимости коэффициента диффузии тепла. Как известно, в теории теплопередачи надежные методики фиксирования тепловых полей появились достаточно давно, почти со времени открытия Зеебеком в 1821 году термоэлектрического эффекта. За почти 200 лет накоплено много научной информации, и, как следствие, появился ряд важных практических приложений теории. Так как уравнения диффузии вещества и тепла по своей структуре идентичны, то методика Видебурга применима и к уравнению теплопроводности точно так же, как к уравнению переноса вещества.

В данной работе метод Видебурга используется для изучения устойчивости двойных смесей. На его основе находится точное решение для нейтральных кривых устойчивости и исследуется влияние концентрационно-зависимой диффузии на устойчивость механического равновесия двухслойной системы. В каком-то смысле методика Видебурга возвращается на свое законное место в теории диффузии вещества, откуда она парадоксальным образом переместилась в теорию теплопроводности.

## 2. Математическая модель

Рассмотрим двухслойную систему двух растворов, которые способны смешиваться. В начальный момент времени растворы разделены в пространстве горизонтальной плоскостью  $x=0$  и располагаются один над другим в поле силы тяжести (Рис. 1). Будем считать, что оба раствора являются водными,

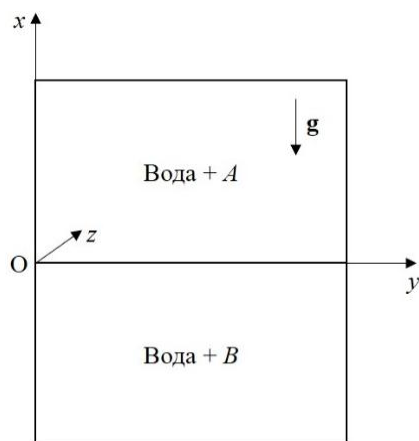


Рис. 1. Геометрии расчетной области и система координат

а растворенные вещества тяжелее воды. Начальные концентрации веществ, растворенных в верхнем и нижнем слоях, обозначим, как  $A_0$  и  $B_0$  соответственно. Концентрации веществ подобраны таким образом, чтобы в самом начале эволюции система имела устойчивую стратификацию по плотности, что исключает наступление неустойчивости Рэля–Тейлора. Для определенности положим, что переменные  $A$  и  $B$  — это концентрации растворов выше и ниже первоначальной контактной поверхности. Вещества, растворенные в воде, являются химически инертными, а система в целом находится в изотермических условиях. Пусть координатная система такова, что ось  $x$  направлена вверх, против действия силы тяжести, а ось  $y$  лежит на начальной контактной поверхности  $Oyz$  с координатой  $x=0$ . Будем считать, что задача двумерная, все поля не зависят от  $z$  и процессы, протекающие в системе, могут быть описаны в рамках плоской задачи.

Далее, положим, что движение жидкости определяется законом Дарси, что позволяет пренебречь инерционными и вязким слагаемыми в уравнении Навье–Стокса. На практике это означает, что система растворов помещена либо в пористую среду с низкой проницаемостью, либо в ячейку Хеле–Шоу с узким зазором между стенками. На самом деле для дальнейшего анализа использование закона Дарси не является принципиальным, но он дает возможность существенно упростить постановку задачи и выкладки при описании движения жидкости, которое в данной работе второстепенно. Акцент делается на процессах диффузии растворенных веществ.

Таким образом, уравнения конвекции смеси растворов, записанные в приближении Дарси с учетом несжимаемости жидкости, для рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

$$\nabla p + \frac{\eta}{K} \mathbf{v} + g \rho \mathbf{n} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = \nabla \cdot (D_A \nabla A), \tag{3}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla B = \nabla \cdot (D_B \nabla B), \tag{4}$$

где  $t$  — время,  $\nabla$  — оператор набла,  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $A$  и  $B$  — концентрации растворов,  $D_A$  и  $D_B$  — коэффициенты диффузии веществ  $A$  и  $B$ ,  $K$  — коэффициент проницаемости,  $g$  — модуль ускорения свободного падения,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении оси  $x$ . Уравнение движения несжимаемой жидкости (2)

записано в форме, стандартной для однородных пористых сред и сверхтонких ячеек Хеле-Шоу, в которых можно пренебречь инерционным слагаемым [21]. Диффузионные слагаемые в уравнениях переноса (3), (4) представлены в общем виде, учитывающем возможную концентрационную зависимость коэффициентов диффузии растворенных веществ  $D_A$  и  $D_B$  без их перекрестной диффузии [10].

Предположим, что коэффициенты диффузии растворенных веществ в (3), (4) являются функциями концентрации этих веществ. Как известно, эта связь проявляется достаточно ярко у спиртов и кислот, где коэффициент диффузии может меняться на порядок величины, причем зависит от концентрации сильно нелинейным образом. У других веществ (солей и щелочей) коэффициенты диффузии обусловлены концентрацией гораздо слабее. Тем не менее, для любых веществ всегда можно указать диапазон изменений концентраций, в котором их коэффициент диффузии меняется линейным образом.

Рассмотрим растворы, которые настолько слабые, что коэффициенты диффузии веществ зависят только от своей концентрации. Обозначим характерные концентрации растворов как  $A_{\text{lim}}$  и  $B_{\text{lim}}$ . Разложим коэффициенты  $D_A$  и  $D_B$  в ряд Тейлора по степеням концентрации в окрестностях точек  $A=0$  и  $B=0$ . Удерживая только линейные слагаемые, получим:

$$D_A(A) \approx D_{A0}(1 + \alpha A), \quad (5)$$

$$D_B(B) \approx D_{B0}(1 + \beta B), \quad (6)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — коэффициенты при линейных слагаемых в разложении, могут быть как положительными, так и отрицательными, а величины  $D_{A0}$  и  $D_{B0}$  являются постоянными табличными значениями коэффициентов диффузии рассматриваемых веществ, измеренными в данном растворителе при температуре 25°C и очень малой концентрации. Пусть при нулевых концентрациях коэффициенты диффузии обоих веществ совпадают с табличными значениями, то есть  $D_A(0) = D_{A0}$  и  $D_B(0) = D_{B0}$ . Данное предположение справедливо, так как экспериментальные наблюдения показывают, что закон диффузии слабо зависит от концентрации при ее малых значениях. Такой же вывод можно сделать, если рассмотреть данный вопрос с общезначимой точки зрения: чем меньше молекул вещества в некотором объеме, тем слабее их влияние друг на друга. Поэтому диффузия будет определяться только свойствами той среды, в которую вещество переходит. Очевидно, что в рамках поставленной задачи должны выполняться условия:  $A_0 < A_{\text{lim}}$ ,  $B_0 < B_{\text{lim}}$ . Типичные значения концентраций веществ из гомологического ряда гидроксидов щелочных металлов и сильных неорганических кислот, при которых еще сохраняются линейные зависимости (5), (6) составляют 3–5 моль/л.

Приближение Буссинеска требует учитывать изменение плотности только в слагаемом объемной силы. Так как задача изотермическая, то плотность может меняться только благодаря концентрациям растворенных в воде веществ:

$$\rho(A, B) = \rho_0(1 + \beta_A A + \beta_B B), \quad (7)$$

где  $\rho_0$  — плотность растворителя, а коэффициенты объемного расширения  $\beta_A$  и  $\beta_B$  считаются положительно определенными в силу того, что растворенные вещества  $A$  и  $B$  тяжелее воды. На самом деле есть класс веществ, которые легче воды (спирты), но их растворы в данной работе рассматриваться не будут.

Обезразмеривание задачи произведем таким образом, чтобы не было привязки задачи к конкретной геометрии с характерным размером. Выберем в качестве единиц измерения длины, времени, скорости, давления и концентраций следующие величины:

$$\frac{D_{A0} \nu}{gK\beta_A A_{\text{lim}}}, \quad \frac{D_{A0} \nu^2}{g^2 K^2 \beta_A^2 A_{\text{lim}}^2}, \quad \frac{gK\beta_A A_{\text{lim}}}{\nu}, \quad \frac{\eta D_{A0}}{K}, \quad A_{\text{lim}}, B_{\text{lim}}. \quad (8)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости воды. По сути единицы длины, времени и скорости привязаны к характерному размеру, времени и скорости конвективной структуры, формирующейся в поле силы тяжести за счет перепада плотности  $\beta_A A_{\text{lim}}$  под действием диффузионного механизма неустойчивости. Похожий прием использован в работе [17]. Здесь же в качестве характерных концентраций рассмотрим  $A_{\text{lim}}$  и  $B_{\text{lim}}$ , поскольку в фокусе внимания находится концентрационная зависимость диффузии. Итак, с учетом разложения (7) получим следующие уравнения:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \tag{9}$$

$$\mathbf{v} = -\nabla p - (A + RB)\mathbf{n}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla A = \nabla \cdot ((1 + \tilde{\alpha}A)\nabla A), \tag{11}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla B = \delta \nabla \cdot ((1 + \tilde{\beta}B)\nabla B), \tag{12}$$

где для простоты безразмерные величины обозначены теми же символами, что и в (1)–(4).

К уравнениям (9)–(12) добавим начальные условия, учитывающие двухслойную конфигурацию системы:

$$x > 0: \quad A(0, x, y) = \tilde{A}_0, \quad B(0, x, y) = 0, \quad \mathbf{v} = 0; \tag{13}$$

$$x \leq 0: \quad A(0, x, y) = 0, \quad B(0, x, y) = \tilde{B}_0, \quad \mathbf{v} = 0. \tag{14}$$

В задаче (9)–(14) сформировано несколько безразмерных параметров, определяющих эволюцию системы:

$$R = \frac{\beta_B B_{\text{lim}}}{\beta_A A_{\text{lim}}}, \quad \delta = \frac{D_{B0}}{D_{A0}}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha A_{\text{lim}}, \quad \tilde{\beta} = \beta B_{\text{lim}}, \quad \tilde{A}_0 = \frac{A_0}{A_{\text{lim}}}, \quad \tilde{B}_0 = \frac{B_0}{B_{\text{lim}}}. \tag{15}$$

Далее знак «~» над символами будет везде опущен, кроме специально оговоренных случаев.

### 3. Решение Видебурга для одного раствора

Рассмотрим задачу об одномерной диффузии компонента  $A(t, x)$  в неподвижной среде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1 + \alpha A) \frac{\partial A}{\partial x} \right], \tag{16}$$

$$x > 0: \quad A(0, x) = A_0, \tag{17}$$

$$x \leq 0: \quad A(0, x) = 0. \tag{18}$$

Преобразуем уравнение (16) к следующему виду:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 A^2}{\partial x^2}, \tag{19}$$

который более удобен для дальнейших выкладок. Уравнение (19) показывает, что учет даже линейной концентрационно-зависимой диффузии приводит к нелинейному уравнению диффузии.

При  $\alpha=0$  уравнение (19) становится линейным, а решение такой задачи (17)–(19) хорошо известно [10]. В случае  $\alpha \neq 0$  Отто Видебург предложил использовать следующий эффектный прием [18]: решение для  $\alpha=0$ , определяемое через дополнительную функцию ошибок, подставлять в последнее слагаемое (19) в виде аппроксимации профиля концентрации, для которого вычисляется концентрационная зависимость коэффициента диффузии:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\alpha A_0^2}{8} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \operatorname{erfc} \left( -\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right]^2. \tag{20}$$

Если  $\alpha$  мало, то его влияние на профиль концентрации не столь существенно. Поэтому такой подход становится вполне оправданным, и решение нелинейной задачи (17)–(19) можно заменить решением линейной неоднородной задачи (17), (18), (20). Таким образом, пришли к решению, которое включает в себя общее решение однородной задачи и частное решение неоднородной задачи:

$$A(t,x) = \frac{1}{2} A_0 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{4} \alpha A_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right) + \frac{1}{4} \alpha A_0^2 \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{8} \frac{\alpha A_0^2 x}{\sqrt{\pi t}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) e^{-x^2/(4t)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha A_0^2}{\pi} \left(1 - e^{-x^2/(2t)}\right) - \frac{1}{8} \alpha A_0^2 \left(1 + \operatorname{erfc}^2\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right). \quad (21)$$

Видебург не только получил аналитическое решение (21), но и проверил его экспериментально для некоторых веществ (например, для солей дихромата калия  $K_2Cr_2O_7$  и сульфата меди  $CuSO_4$ ). Отклонения между экспериментальными измерениями и аналитической оценкой на основе формулы (21) в большинстве случаев составили порядка 1–2% [18]. Но в свое время Видебург не мог осуществить решение численно. Сейчас это стало возможным.

Для построения дискретного аналога уравнения (16) применялась равномерная пространственная сетка на отрезке  $-40 \leq x \leq 40$  с количеством узлов 801 и равномерная временная сетка. Задача решалась методом конечных разностей с использованием явной схемы:

$$A_i^{t+\Delta t} = A_i^t + \Delta t \left( \alpha \frac{(A_{i+1}^t - A_{i-1}^t)^2}{4\Delta x^2} + (1 + \alpha A_i^t) \frac{(A_{i+1}^t - 2A_i^t + A_{i-1}^t)}{\Delta x^2} \right), \quad (22)$$

которая является условно устойчивой при соблюдении критерия  $2\Delta t/\Delta x^2 < 1$ , где  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  — соответственно шаги сетки по координате и времени. Как известно [27], конечно-разностная схема (22) аппроксимирует дифференциальное уравнение переноса (19) с первым порядком по  $\Delta t$  и вторым порядком по  $\Delta x$ . То есть разностная задача (22) аппроксимирует задачу (17)–(19) с точностью  $O(\Delta t + \Delta x^2)$ .

На такой же равномерной пространственной сетке были найдены числовые значения решения (21). Для тестирования использовалась диффузионная модель азотной кислоты  $HNO_3$ , предложенная в работе [11]:  $D_A(A) \approx 1 + 0,16A$ . Как видно из данного выражения, азотная кислота демонстрирует сильную зависимость от собственной концентрации в диапазоне концентраций до  $A_{\text{lim}} = 3$  моль/л. Из формулы также следует, что с ростом концентрации подвижность молекул кислоты значительно меняется: при начальной концентрации раствора  $A_0 = 1$  коэффициент диффузии в толще раствора увеличивается почти на 16%.

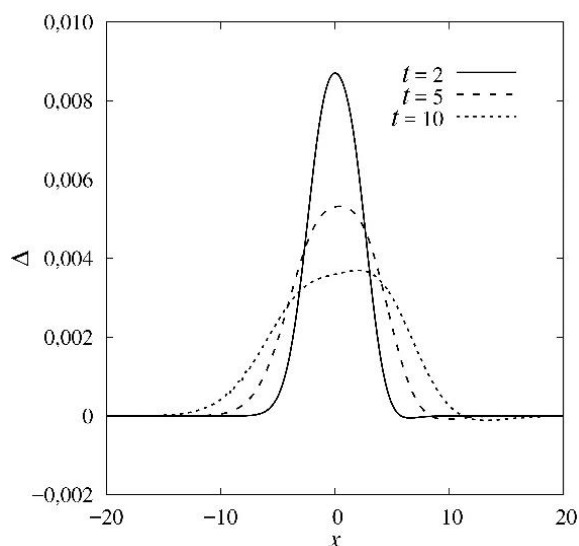


Рис. 2. Невязка между аналитическим и численным решениями в различные моменты времени

существеннее в тех точках пространства, где больше самого вещества.

Выражение (21) для профиля концентрации диффундирующего вещества с учетом эффекта концентрационно-зависимой диффузии интересно тем, что оно является очень хорошей, как свидетельствует рисунок 2, аппроксимацией точного решения задачи (17)–(19). Кроме того, это аналитическое выражение, представленное в явной замкнутой форме. Таким образом, приближенное решение (21) может быть использовано в качестве инструмента анализа различных типов конвективной неустойчивости, связанной с диффузией вещества, так как позволяет сформулировать основное состояние исследуемой системы в аналитическом виде.

На рисунке 2 представлен график невязки  $\Delta$  аналитического и численного решений как функция координаты  $x$  для трех моментов эволюции. Рисунок показывает, что аналитическое решение (21) практически везде дает завышенное значение для концентрации. Тем не менее, относительное значение невязки крайне невелико — не превышает 0,9, 0,5 и 0,4%, соответственно, в моменты времени  $t=2, 5, 10$ . Наибольшие отклонения между решениями наблюдаются в самом начале эволюции, когда профиль концентрации испытывает стремительные изменения, максимальное значение ошибки достигается в диффузионной зоне на границе растворов. Со временем невязка становится меньше, так как перестройка поля концентрации в системе уменьшается. Любопытно, что со временем распределение невязки становится несимметричным. Это можно объяснить тем, что вклад последнего слагаемого в (16) связан с концентрацией вещества — он

#### 4. Граница устойчивости двухслойной двойной смеси

Рассмотрим устойчивость двойной смеси, компоненты которой в начальный момент разделены и представлены в пространстве в виде двух однородных слоев (Рис. 1). После приведения растворов в контакт слои начинают смешиваться, и вещества *A* и *B* проникают в слои друг друга благодаря диффузии. Чтобы охарактеризовать распределение примеси в любой момент времени, определим следующую безразмерную величину:

$$\Delta\rho(t, x, y) = A(t, x, y) + RB(t, x, y), \quad (23)$$

которая по смыслу является нормированной добавкой к постоянной плотности растворителя. Не сложно заметить, что именно эта величина стоит в слагаемом объемной силы в уравнении (10). Распределение (23) вдоль вертикальной координаты является ключевым для анализа устойчивости. Если предположить, что исследуемая система в начале эволюции находится в механическом равновесии, то зависимость от горизонтальной координаты в основном состоянии можно проигнорировать. Будем считать растворы настолько слабыми, что вещества в процессе диффузии не влияют на диффузию друг друга. Тогда, основываясь на формуле (21), в основном состоянии выразим добавку к плотности (23) через нестационарные концентрации диффундирующих навстречу друг другу веществ:

$$\begin{aligned} \Delta\rho(t, x) = & \frac{A_0}{2} \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + R \frac{B_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\delta t}}\right) + \frac{\alpha A_0^2}{8} \left[ \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \left( 2 - \frac{x}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4t)} - \operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right) - \frac{2}{\pi} e^{-x^2/(2t)} \right] + \\ & + R \frac{\beta B_0^2}{8} \left[ \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\delta t}}\right) \left( 2 - \frac{x}{\sqrt{\pi \delta t}} e^{-x^2/(4\delta t)} - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\delta t}}\right) \right) - \frac{2}{\pi} e^{-x^2/(2\delta t)} \right], \quad (24) \end{aligned}$$

где часть выражения, которая не зависит от поправок коэффициентов диффузии, представлена двумя первыми слагаемыми.

В данной работе исходным является предположение, что начальная конфигурация системы всегда такова, что плотность имеет устойчивую стратификацию:  $A_0 < RB_0$ . Каким же образом в изначально устойчивой системе может развиваться неустойчивость?

Неустойчивость двойной диффузии, как и любая другая, требует конечного количества энергии для поддержания роста возмущений. Если раствор в основном состоянии неподвижен, нестабильность может быть вызвана изменением потенциальной энергии одного из компонентов плотности. Понятно, что сразу после начала процесса взаимодиффузии центр тяжести смеси стремиться расположиться ниже. Это приводит к высвобождению кинетической энергии, которое проявляется в зарождении движения жидкости. Возникающая в результате конвекция, с точки зрения ее характера и динамики, в значительной степени зависит от того, имеет дестабилизирующий компонент более высокий или низкий коэффициент диффузии [22]. Конфигурация, в которой необходимая энергия поступает от более быстрого вещества, находящегося в начальный момент сверху, называется неустойчивостью диффузионного слоя — DLC (Diffusive Layer Convection). Если слой с быстрым компонентом в начальный момент находится снизу, то развивается неустойчивость двойной диффузии — DD (Double Diffusive instability). Для определенности в этой работе ограничимся рассмотрением только случая DD, для которого выполняются условия:  $\varphi R > 1$ ,  $\delta > 1$ , где  $\varphi = B_0/A_0$ . Первое неравенство гарантирует, что в начальный момент смесь всегда устойчива, а второе означает, что более быстрый компонент расположен снизу. Таким образом, безразмерные параметры  $\varphi R$  и  $\delta$  являются для двухслойной системы управляющими.

В самом начале эволюции профиль плотности  $\Delta\rho$  не имеет экстремумов, и его производная по координате  $x$  везде отрицательна. Следовательно, наступление неустойчивости можно фиксировать по возникновению экстремума на профиле плотности. Если эффект концентрационно-зависимой диффузии не принимать во внимание, то получим следующее выражение:

$$\left. \frac{\partial \Delta\rho}{\partial x} \right|_{\alpha=0, \beta=0} = \frac{A_0 e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}} - R \frac{B_0 e^{-x^2/(4\delta t)}}{2\sqrt{\pi \delta t}}, \quad (25)$$

которое после приравнивания к нулю и несложных преобразований приводится к виду:

$$x^2 = \frac{4\delta t}{1-\delta} \ln \frac{\varphi R}{\sqrt{\delta}}. \quad (26)$$

Учитывая, что левая часть (26) знакоопределена, приходим к следующим условиям для наступления неустойчивости (при условии соблюдения неравенств  $\varphi R > 1$ ,  $\delta > 1$ ):

$$\delta > \varphi^2 R^2.$$

Этот результат хорошо известен в литературе, посвященной неустойчивости двойной диффузии в двухслойной системе (см., например, работу [17]).

Возьмем теперь полную производную плотности (23) по координате  $x$  и сразу соберем слагаемые с одинаковыми степенями по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} & \left[ \left( \frac{A_0}{2} + \frac{\alpha A_0^2}{4} - \frac{3\alpha A_0^2}{8} \operatorname{erfc} \left( -\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) \right) e^{-x^2/(4t)} - \frac{R}{\sqrt{\delta}} \left( \frac{B_0}{2} + \frac{\beta B_0^2}{4} + \frac{3\beta B_0^2}{8} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\delta t}} \right) \right) e^{-x^2/(4\delta t)} \right] + \\ & + \frac{1}{\pi t} \left[ \frac{\alpha A_0^2}{8} x e^{-x^2/(2t)} - \frac{R \beta B_0^2}{\delta} x e^{-x^2/(2\delta t)} \right] + \frac{1}{\pi t \sqrt{\pi t}} \left[ \frac{\pi \alpha A_0^2}{16} x^2 \operatorname{erfc} \left( -\frac{x}{2\sqrt{t}} \right) e^{-x^2/(4t)} - \right. \\ & \left. - \frac{R}{\delta \sqrt{\delta}} \frac{\pi \beta B_0^2}{16} x^2 \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) e^{-x^2/(4\delta t)} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Для нахождения условия неустойчивости выражение (27) нужно приравнять к нулю и решить получившееся уравнение. Упростим себе задачу, положив, что неустойчивость развивается на длительных временах наблюдения:  $t \rightarrow \infty$ . Это допущение обоснованно, так как характерные диффузионные времена достаточно велики, а диффузионные процессы являются одними из самых медленных среди полевых процессов. Исходя из этого, имеет смысл учитывать в (27) только слагаемое, пропорциональное  $t^{-1/2}$ . Кроме того, надо принять во внимание, что дополнительная функция ошибок на больших временах также стремится к нулю. Тогда вместо (26) будем иметь выражение:

$$x^2 = \frac{4\delta t}{1-\delta} \ln \left[ \frac{\varphi R}{\sqrt{\delta}} \left( 1 - \frac{1}{4} \beta B_0^2 \right) / \left( 1 - \frac{1}{4} \alpha A_0^2 \right) \right]. \quad (28)$$

Вследствие того, что левая часть (28) знакоопределена, получим следующие условия для наступления неустойчивости (и снова одновременно должны быть выдержаны неравенства  $\varphi R > 1$ ,  $\delta > 1$ ):

$$\delta > \varphi^2 R^2 \left( 1 + \frac{1}{4} (\alpha A_0 - \beta B_0) \right)^2. \quad (29)$$

Формула (29) дает поправку к нейтральной кривой в основном порядке. Как видно, максимально концентрационная зависимость диффузии сказывается в случае, если компоненты двойной смеси зависят от концентрации разнонаправленно, то есть поправочные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  имеют разный знак. Условие (29) не предоставляет исчерпывающей информации о границе наступления неустойчивости двойной диффузии, так как неустойчивость может наступить и в случае, когда профиль плотности остается монотонным. Здесь нужно заметить следующее.

Как известно, задача об устойчивости двойной смеси (или одинарной смеси с нагревом) рассматривалась в двух постановках. В рамках первой постановки в классических работах Штерна [15] и Гершуни, Жуховицкого [21, 23] рассматривалась задача об устойчивости плоского горизонтального слоя несжимаемой жидкости, в котором в основном состоянии градиенты концентрационного и теплового полей поддерживаются постоянными. Такой подход до сих пор популярен среди теоретиков, так как анализ устойчивости при этом прост, а формула для нейтральной кривой получается аналитически. Но оказалось, что основное состояние теряет устойчивость по отношению к монотонным возмущениям вида

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}(t, x, y) \\ A(t, x, y) \\ B(t, x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0(x) \\ a(x) \\ b(x) \end{pmatrix} \exp(\lambda t + iky), \quad (30)$$

если выполняется следующее неравенство [21, 23]:



$$\frac{g\beta_A A_{\text{lim}} G_A L^4}{\nu D_{A0}} + \frac{g\beta_B B_{\text{lim}} G_B L^4}{\nu D_{B0}} > \pi^4, \tag{31}$$

где  $G_A$  и  $G_B$  — безразмерные постоянные градиенты веществ в смеси,  $L$  — характерный размер системы. В выражении (31) использованы характерные величины, которые введены ранее для обезразмеривания задачи.

Обобщение на случай пористой среды, где уравнение движения, как и в рассмотренном выше случае, включает в себя закон Дарси (2), выполнено в работе [24]:

$$\frac{g\beta_A A_{\text{lim}} G_A L^4}{\nu D_{A0}} + \frac{g\beta_B B_{\text{lim}} G_B L^4}{\nu D_{B0}} > 4\pi^4. \tag{32}$$

Выражение (32) отличается от (31) всего лишь наличием числового коэффициента в правой части. Первое и второе слагаемые в (32) представляют собой концентрационные числа Рэлея для компонентов смеси. Как правило, в реальных физических системах они принимают большие значения (десятки и сотни тысяч). Поэтому небольшой константой в правой части неравенства (32) можно смело пренебречь. Впервые эта нехитрая процедура выполнена в работе [25], где для наступления неустойчивости по отношению к монотонным возмущениям вида (30) авторы получили следующее условие:

$$\frac{D_{B0}}{D_{A0}} > -\frac{\beta_B B_{\text{lim}} G_B}{\beta_A A_{\text{lim}} G_A}. \tag{33}$$

Все написанное выше относится к случаю плоского горизонтального слоя с фиксированными линейными профилями концентраций в основном состоянии. Но у такой задачи практически нет шансов быть реализованной в эксперименте. Исследователю гораздо легче сконструировать двухслойную систему из разделенных в начальный момент перегородкой смесей, а затем, после удаления разделяющей

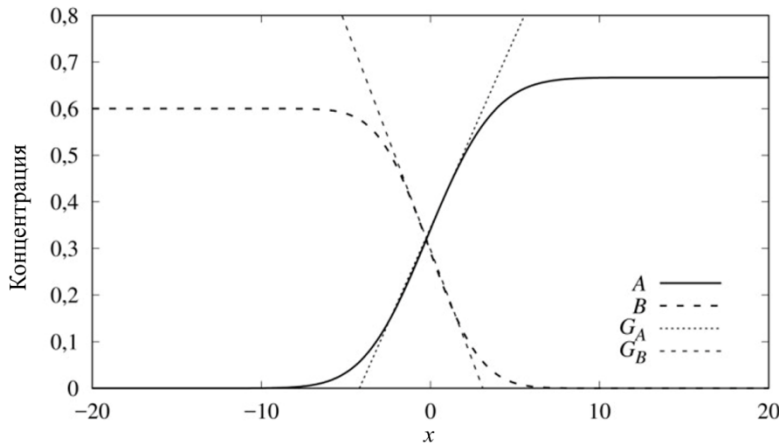


Рис. 3. Мгновенный вид профилей концентрации веществ в момент эволюции  $t=5$ ; прямые линии — значения градиентов концентрации на поверхности первоначального контакта растворов ( $x=0$ )

плоскости, наблюдать за их динамическим смешением. Эта формулировка задачи считается сейчас более востребованной, так как она допускает прямое сравнение с экспериментом. Но с математической точки зрения она является затратной: основное состояние смеси необратимо меняется со временем, поэтому требуется применение специальной техники линейного анализа динамически меняющихся возмущений, развивающихся на фоне перестройки основного состояния (см. [26]). Однако задачу можно решить приближенно. Следуя за авторами работы [17], применим следующий прием.

В каждый момент времени эволюции основного состояния в зоне смешения растворов выделим приблизительно прямолинейные участки профилей концентрации и аппроксимируем их прямыми линиями. Рисунок 3 показывает мгновенное значение профилей концентрации веществ  $A$  и  $B$  в момент эволюции  $t=5$ . Чтобы применить результаты классического линейного анализа, будем считать профили концентрации в рамках зоны смешения (где развивается неустойчивость) линейными, а градиенты постоянными.

Используя формулу Видебурга (21), оценим градиенты концентрации веществ на первоначальной контактной поверхности растворов ( $x=0$ ):

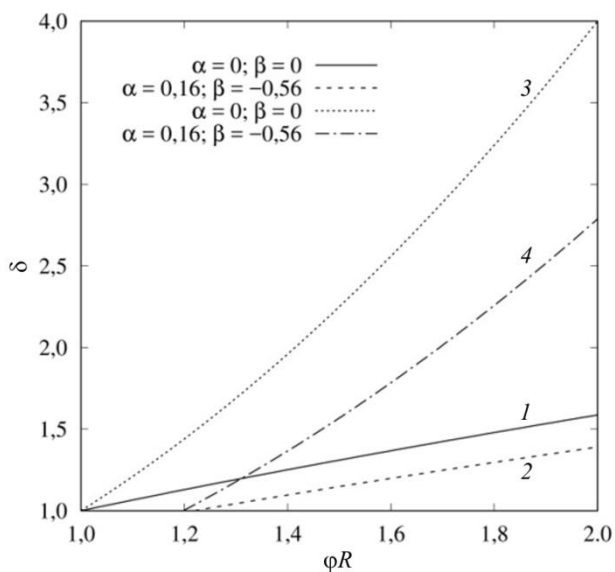
$$G_A \approx \frac{\partial A(t,0)}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} A_0 \left(1 - \frac{1}{4} \alpha A_0\right), \quad G_B \approx \frac{\partial B(t,0)}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi \delta t}} B_0 \left(1 - \frac{1}{4} \beta B_0\right). \tag{34}$$

Подставив (34) в (33) и произведя несложные преобразования, окончательно получим:

$$\delta > \left[ \varphi R \left( 1 + \frac{1}{4} (\alpha A_0 - \beta B_0) \right) \right]^{2/3}. \quad (35)$$

Видно, что выражение не зависит от времени.

В предельном случае  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$  формула (35) переходит в классический «закон 2/3», который впервые в неявном виде получен в работе [15], а позднее в явном виде — в [25]. В случае равенства выражение (35) определяет классическую нейтральную кривую для наступления неустойчивости двойной диффузии. На плоскости управляющих параметров  $\delta$  и  $\varphi R$  равенство (29) дает кривую, лежащую несколько выше. На рисунке 4 представлены обе линии, отвечающие классическому случаю как без концентрационно-зависимой диффузии (35) (кривая 1), так и с учетом эффекта (29) (кривая 2).



**Рис. 4.** Карта устойчивости двухкомпонентной смеси на плоскости управляющих параметров; классические нейтральные кривые для неустойчивости двойной диффузии обозначены цифрами 1 и 3; нейтральные кривые для той же неустойчивости в случае концентрационной зависимости коэффициентов диффузии отмечены цифрами 2 и 4

проявится слабее в силу того, что у растворов солей концентрационные зависимости диффузии, как правило, одного знака, и они будут ослаблять друг друга. На рисунке область абсолютной конвективной устойчивости находится справа внизу. При пересечении нейтральной кривой 1 (или 2 в присутствии эффекта CDD) система входит в область очень медленного развития неустойчивости двойной диффузии. Авторы работы [17] даже сочли возможным выделить этот режим отдельным названием «затянутая неустойчивость двойной диффузии» — DDD конвекция (Delayed Double Diffusive instability), хотя, скорее всего, это не очень обоснованное решение, поскольку в дальнейшем такая классификация не прижилась. При пересечении кривой 3 (или 4 в случае эффекта CDD) на профиле плотности в основном состоянии появляется область с инверсией, а система входит в режим интенсивного развития пальчиковых структур.

В случае отрицательного значения поправки  $(\alpha A_0 - \beta B_0)/4$  эффект концентрационной зависимости диффузии, наоборот, будет стабилизировать основное состояние.

## 6. Заключение

Задачи с нелинейной диффузией вещества сложны в рассмотрении и, как правило, могут быть решены лишь численно даже для простейших законов диффузии. Тем не менее, последние годы интерес к этим задачам растет в связи с новыми приложениями в механике жидкости. В данной работе для исследования наступления неустойчивости двойной диффузии в двухслойной системе смешивающихся растворов предложено использовать метод линеаризации Отто Видебурга.

Показано, что данная методика позволяет найти приближенное решение задачи, которое отклоняется от точного решения не более чем на 1% величины начальной концентрации раствора. Получены аналитические формулы для нейтральных кривых неустойчивости двойной диффузии. Изучен вопрос

В качестве конкретного примера рассмотрим двойной водный раствор азотной кислоты и нитрата натрия с начальными значениями безразмерных концентраций  $A_0 = 1$  и  $B_0 = 1$  соответственно. Закон диффузии для первого вещества приведен выше, закон диффузии нитрата задается формулой [11]:  $D_B(B) \approx 0,5(1 - 0,56B)$ . Зависимость веществ от концентрации имеет разный знак. Оценка поправки к формулам (29) и (35) дает значение:  $(\alpha A_0 - \beta B_0)/4 \approx 0,18$ . Нейтральные кривые для данного случая также показаны на рисунке 4. Из рисунка видно, что нейтральные кривые смещаются (кривая 1 переходит в положение 2, а кривая 3 — в положение 4), то есть учет CDD эффекта существенно дестабилизирует основное состояние. Наблюдается сильное влияние нелинейной диффузии, так как коэффициенты диффузии компонентов смеси зависят от концентрации разнонаправленно. Если вместо кислоты и соли взять раствор двух солей, то эффект

о влиянии эффекта линейной концентрационной зависимости коэффициентов диффузии компонентов смеси на ее конвективную устойчивость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00621).

## Литература

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Шихов В.М. Об устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры // ТВТ. 1975. Т. 13, № 4. С. 771-778.
2. Thangam S., Chen C.F. Stability analysis of the convection of a variable viscosity fluid in an infinite vertical slot // Phys. Fluids. 1986. Vol. 29. P. 1367-1372. <https://doi.org/10.1063/1.865702>
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 320 с.
4. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: АН СССР, 1952. 538 с.
5. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69-72. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00914697>)
6. Nepomnyashchy A.A., Velarde M.G., Colinet P. Interfacial phenomena and convection. Chapman and Hall/CRC, 2002. 365 p.
7. Зувев А.Л., Костарев К.Г. Особенности концентрационно-капиллярной конвекции // УФН. 2008. Т. 178, № 10. С. 1065-1085. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200810d.1065>
8. Ash R., Espenhahn S.E. Transport through a slab membrane governed by a concentration-dependent diffusion coefficient. III. Numerical solution of the diffusion equation: 'early-time' and 't' procedures // J. Membr. Sci. 2000. Vol. 180. P. 133-146. [http://dx.doi.org/10.1016/S0376-7388\(00\)00530-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0376-7388(00)00530-5)
9. Bowen R.W., Williams P.M. Prediction of the rate of cross-flow ultrafiltration of colloids with concentration-dependent diffusion coefficient and viscosity – theory and experiment // Chem. Eng. Sci. 2001. Vol. 56. P. 3083-3099. [http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509\(00\)00552-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509(00)00552-2)
10. Crank J. The mathematics of diffusion. Oxford University Press, 1975. 414 p.
11. Bratsun D., Kostarev K., Mizev A., Mosheva E. Concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 92. 011003. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.92.011003>
12. Bratsun D.A., Stepkina O.S., Kostarev K.G., Mizev A.I., Mosheva E.A. Development of concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids under influence of constant or variable inertia // Microgravity Sci. Technol. 2016. Vol. 28. P. 575-585. <http://dx.doi.org/10.1007/s12217-016-9513-x>
13. Брацун Д.А. Внутренние волны плотности ударного типа, индуцированные хемоконвекцией в смешивающихся реагирующих жидкостях // ПЖТФ. 2017. Т. 43, № 20. С. 69-77. <http://doi.org/10.21883/PJTF.2017.20.45152.16927>
14. Брацун Д.А., Мошова Е.А. Особенности формирования волн плотности в двухслойной системе смешивающихся реагирующих жидкостей // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 3. С. 302-322. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.23>
15. Stern M.E. The salt-fountain and thermohaline convection // Tellus. 1960. Vol. 12. P. 172-175. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v12i2.9378>
16. Turner J.S. Double-diffusive phenomena // Ann. Rev. Fluid Mech. 1974. Vol. 6. P. 37-54. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.06.010174.000345>
17. Trevelyan P.M.J., Almarach C., De Wit A. Buoyancy-driven instabilities of miscible two-layer stratifications in porous media and Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 670. P. 38-65. <https://doi.org/10.1017/S0022112010005008>
18. Wiedeburg O. Ueber die Hydrodiffusion // Annalen der Physik. 1890. Vol. 277, No. 12. P. 675-711. <https://doi.org/10.1002/andp.18902771204>
19. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
20. Зувев А.Л., Костарев К.Г. Особенности концентрационно-капиллярной конвекции // УФН. 2008. Т. 178, № 10. С. 1065-1085. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200810d.1065>
21. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
22. Radko T. Double-diffusive convection. Cambridge University Press, 2013. 344 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139034173>
23. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости двух компонентной смеси в поле тяжести // ПММ. 1963. Т. 27, № 2. С. 301-308. (English version [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90012-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90012-1))
24. Nield D.A. Onset of thermohaline convection in a porous medium // Water Resour. Res. 1968. Vol. 4. P. 553-560. <https://doi.org/10.1029/WR004i003p00553>
25. Huppert H.E., Manins P.C. Limiting conditions for salt-fingering at an interface // Deep Sea Res. Oceanogr. Abstr. 1973. Vol. 20. P. 315-323. [https://doi.org/10.1016/0011-7471\(73\)90056-9](https://doi.org/10.1016/0011-7471(73)90056-9)
26. Автова Е.В., Брацун Д.А., Костарев К.Г., Мизев А.И., Мошова Е.А. Конвективная неустойчивость в двухслойной системе реагирующих жидкостей с диффузией, зависящей от концентрации компонентов // Вычисл. мех. сплош. сред. 2015. Т. 8, №4. С. 345-358. <http://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.29>
27. Таруниин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 228 с.

## References

1. Gershuni G.Z., Zhukhovitsky E.M., Shikhov V.M. Stability of convective flow of fluid with temperature-dependent viscosity. *High Temp.*, 1975, vol. 13, no. 4, pp. 700-705.

2. Thangam S., Chen C.F. Stability analysis of the convection of a variable viscosity fluid in an infinite vertical slot. *Phys. Fluids*, 1986, vol. 29, pp. 1367-1372. <https://doi.org/10.1063/1.865702>
3. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M., Nepomnyashchiy A.A. *Ustoychivost' konvektivnykh techeniy* [Stability of convective flows]. Moscow, Nauka, 1989. 320 p.
4. Levich V.G. *Physicochemical hydrodynamics*. Prentice-Hall, 1962. 700 p.
5. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, pp. 43-44. <https://doi.org/10.1007/BF00914697>
6. Nepomnyashchy A.A., Velarde M.G., Colinet P. *Interfacial phenomena and convection*. Chapman and Hall/CRC, 2002. 365 p.
7. Zuev A.L., Kostarev K.G. Certain peculiarities of the solutocapillary convection. *Phys.-Usp.*, 2008, vol. 51, pp. 1027-1045. <https://doi.org/10.1070/pu2008v51n10abeh006566>
8. Ash R., Espenlahn S.E. Transport through a slab membrane governed by a concentration-dependent diffusion coefficient. III. Numerical solution of the diffusion equation: 'early-time' and 't' procedures. *J. Membr. Sci.*, 2000, vol. 180, pp. 133-146. [http://dx.doi.org/10.1016/S0376-7388\(00\)00530-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0376-7388(00)00530-5)
9. Bowen R.W., Williams P.M. Prediction of the rate of cross-flow ultrafiltration of colloids with concentration-dependent diffusion coefficient and viscosity – theory and experiment. *Chem. Eng. Sci.*, 2001, vol. 56, pp. 3083-3099. [http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509\(00\)00552-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0009-2509(00)00552-2)
10. Crank J. *The mathematics of diffusion*. Oxford University Press, 1975. 414 p.
11. Bratsun D., Kostarev K., Mizev A., Mosheva E. Concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 011003. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.92.011003>
12. Bratsun D.A., Stepkina O.S., Kostarev K.G., Mizev A.I., Mosheva E.A. Development of concentration-dependent diffusion instability in reactive miscible fluids under influence of constant or variable inertia. *Microgravity Sci. Technol.*, 2016, vol. 28, pp. 575-585. <http://dx.doi.org/10.1007/s12217-016-9513-x>
13. Bratsun D.A. Internal density waves of shock type induced by chemoconvection in miscible reacting liquids. *Tech. Phys. Lett.*, 2017, vol. 43, pp. 944-947. <https://doi.org/10.1134/S1063785017100182>
14. Bratsun D.A., Mosheva L.A. Peculiar properties of density wave formation in a two-layer system of reacting miscible liquids. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 302-322. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.23>
15. Stern M.E. The salt-fountain and thermohaline convection. *Tellus*, 1960, vol. 12, pp. 172-175. <https://doi.org/10.3402/tellusa.v12i2.9378>
16. Turner J.S. Double-diffusive phenomena. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 1974, vol. 6, pp. 37-54. <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fl.06.010174.000345>
17. Trevelyan P.M.J., Almarcha C., De Wit A. Buoyancy-driven instabilities of miscible two-layer stratifications in porous media and Hele-Shaw cells. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 670, pp. 38-65. <https://doi.org/10.1017/S0022112010005008>
18. Wiedeburg O. Ueber die Hydrodiffusion. *Annalen der Physik*, 1890, vol. 277, no. 12, pp. 675-711. <https://doi.org/10.1002/andp.18902771204>
19. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conduction]. Moscow, Vysshaya shkola, 1989. 320 p.
20. Zuev A.L., Kostarev K.G. Certain peculiarities of the solutocapillary convection. *Phys.-Usp.*, 2008, vol. 51, pp. 1027-1045. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200810d.1065>
21. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M. *Convective Stability of Incompressible Fluids*. Jerusalem, Keter Publishing House, 1976. 330 p.
22. Radko T. *Double-diffusive convection*. Cambridge University Press, 2013. 344 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139034173>
23. Gershuni G.Z., Zhukhovitskiy E.M. On the convective instability of a two-component mixture in a gravity field. *J. Appl. Math. Mech.*, 1963, vol. 27, pp. 441-452. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(63\)90012-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(63)90012-1)
24. Nield D.A. Onset of thermohaline convection in a porous medium. *Water Resour. Res.*, 1968, vol. 4, pp. 553-560. <https://doi.org/10.1029/WR004i003p00553>
25. Huppert H.E., Manins P.C. Limiting conditions for salt-fingering at an interface. *Deep Sea Res. Oceanogr. Abstr.*, 1973, vol. 20, pp. 315-323. [https://doi.org/10.1016/0011-7471\(73\)90056-9](https://doi.org/10.1016/0011-7471(73)90056-9)
26. Aitova E.V., Bratsun D.A., Kostarev K.G., Mizev A.I., Mosheva E.A. Convective instability in a two-layer system of reacting fluids with concentration-dependent diffusion. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, pp. 1226-1238. <https://doi.org/10.1134/S0021894416070026>
27. Tarunin E.L. *Vychislitel'nyj eksperiment v zadachah svobodnoj konvekcii* [Computational experiment in free convection problems]. Irkutsk, Izd-vo Irkut. un-ta, 1990. 228 p.

Поступила в редакцию 24.09.2020; после доработки 04.12.2020; принята к опубликованию 04.12.2020

#### Сведения об авторах

Брацун Дмитрий Анатольевич, дфмн, зав.каф., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614068, г. Пермь, ул. Профессора Поздеева, 11; e-mail: dmitribratsun@rambler.ru

Вяткин Владимир Александрович, б/с, мнс, ПНИПУ; e-mail: vva063@bk.ru