

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.4.34](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.34)

УДК:517.95, 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ И ПРИМЕНИМОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФФУЗИИ–КОНВЕКЦИИ ПРИ БОЛЬШИХ СЕТОЧНЫХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ

А.И. Сухинов¹, И.Ю. Кузнецова², А.Е. Чистяков¹, Е.А. Проценко³, Ю.В. Белова¹¹ *Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*² *Южный федеральный университет, Таганрог, Российская Федерация*³ *Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, Таганрог, Российская Федерация*

Работа посвящена исследованию точности разностной схемы, используемой при решении задачи диффузии–конвекции в случае больших сеточных чисел Пекле. Численное решение задачи транспорта взвешенных частиц предлагается проводить на основе усовершенствованной схемы «кабаре». Ее разностный оператор представляет собой линейную комбинацию операторов разностных схем «крест» и «кабаре», при этом модифицированная схема получается из схем с оптимальными весовыми коэффициентами. При определенных значениях весовых коэффициентов объединение приводит к взаимной компенсации ошибок аппроксимации, а результирующая схема приобретает лучшие, чем исходные схемы, свойства. Кроме того, она включает функцию заполненности ячеек, что позволяет естественным образом моделировать задачи в областях со сложной геометрией. Вычислительные эксперименты осуществлены на решении задачи транспорта взвеси, возникающей, например, при распространении шлейфов взвеси в водной среде и изменении рельефа дна в связи с выпадением взвешенных частиц грунта в осадок при выгрузке грунта в водоем (дампинге). Приведены результаты моделирования транспорта взвешенных частиц при различных значениях сеточного числа Пекле. Реализация алгоритма осуществлялась при помощи программно-аппаратной архитектуры параллельных вычислений: на центральном процессоре (Central Processing Unit — CPU) и на графическом ускорителе (Graphics Processing Unit — GPU). Решение прикладной задачи показало свою эффективность на CPU при расчетных сетках небольшого размера, а при необходимости измельчения шагов по пространству предпочтительным оказалось решение на GPU. Выяснено, что при использовании модифицированной схемы «кабаре» увеличение скорости движения водного потока не приводит к потере точности решения за счет диссипативных источников и сопровождается незначительным ростом вычислительных трудозатрат.

Ключевые слова: математическая модель, транспорт взвеси, задача диффузии–конвекции, численное моделирование, разностная схема «кабаре», сеточное число Пекле, параллельные вычисления

STUDY OF THE ACCURACY AND APPLICABILITY OF THE DIFFERENCE SCHEME FOR SOLVING THE DIFFUSION–CONVECTION PROBLEM AT LARGE GRID PÉCLET NUMBERS

A.I. Sukhinov¹, I.Y. Kuznetsova², A.E. Chistyakov¹, E.A. Protsenko³ and Y.V. Belova¹¹ *Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia*² *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*³ *Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) Rostov State University of Economics, Taganrog, Russian Federation*

The work is devoted to the study of a difference scheme for solving the diffusion–convection problem at large grid Péclet numbers. The suspension transport problem numerical solving is carried out using the improved Upwind Leapfrog difference scheme. Its difference operator is a linear combination of the operators of Upwind and Standard Leapfrog difference schemes, while the modified scheme is obtained from schemes with optimal weighting coefficients. At certain values of the weighting coefficients, this combination leads to mutual compensation of approximation errors, and the resulting scheme gets better properties than the original schemes. In addition, it includes a cell filling function that allows simulating problems in areas with complex geometry. Computational experiments were carried out to solve the suspension transport problem, which arises, for example, during the propagation of suspended matter plumes in an aquatic environment and changes in the bottom topography due to the deposition of suspended soil particles into the sediment during soil unloading into a reservoir (dumping). The results of modeling the suspension transport problem at various values of the grid Péclet number are presented. The algorithm implementation was carried out using the software and hardware architecture of parallel computing: on a central processing unit (Central Processing Unit – CPU) and on a graphics accelerator (Graphics Processing Unit – GPU). The solution to the applied problem has shown its efficiency on the CPU with small computational grids and, if it is necessary to decrease the space steps, then the GPU solution is preferable. It was found that, when using the modified Upwind Leapfrog scheme, an increase in the speed of the water flow does not lead to a loss of solution accuracy due to dissipative sources and is accompanied by an insignificant increase in computational labor costs.

Key words: mathematical model, suspension transport, diffusion–convection problem, numerical simulation, Upwind Leapfrog difference scheme, grid Péclet number, parallel computing

1. Введение

Поля концентрации взвешенных частиц и формирование донной поверхности мелководных водоемов определяются многими факторами, в том числе процессами диффузии–конвекции. При численном решении возникающих, например, при выемке/сбросе грунта задач транспорта взвесей на основе центрально-разностных схем обнаруживается проблема, связанная со снижением точности вычислений при больших

значениях сеточного числа Пекле [1]. Одним из выходов из складывающейся ситуации является измельчение пространственного шага сетки. Но это влечет за собой увеличение трудоемкости счета. Например, при решении трехмерной задачи диффузии–конвекции для уменьшения числа Пекле в два раза необходимо уменьшить шаги по пространству тоже в два раза, а шаги по времени — в четыре раза [2].

Иным подходом к решению данного класса задач является применение специальных разностных схем, например, схемы «кабаре». Данная схема впервые описана в работе [3], а ее применение и попытки модифицировать под решения прикладных задач широко представлены в литературе, например, в [4–11]. Так, в [4] линейная схема «кабаре» используется для улучшения порядка аппроксимации по пространству за счет привлечения информации с дополнительного временного слоя при численном решении уравнений газовой динамики. Явный численный алгоритм для разрешения звуковых точек в рамках схемы «кабаре» описан в работе [5]. В [6] подробно рассмотрены вопросы монотонности схем, в том числе и схемы «кабаре» для задачи переноса взвешенных частиц. Рассмотрению различных модификаций схемы «кабаре» посвящен ряд работ, среди них можно назвать исследование [7], в котором выполнено обобщение схемы «кабаре» на случай течения несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности. В работе [8] предложено использовать линейную комбинацию схем «кабаре» и «крест» (модифицированную схему «кабаре») в задачах переноса и взаимодействия различных вихревых структур (покоящегося и движущегося одиночного вихря, вихрей типа Тейлора–Грина, вихрей, образовавшихся в результате неустойчивости слойных течений в сплошной среде). В [9] рассчитаны оптимальные коэффициенты для данной схемы исходя из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации.

В данной работе рассмотрено приложение модифицированной разностной схемы «кабаре» к решению задачи транспорта взвешенных частиц. Разностный оператор усовершенствованной схемы представляет собой линейную комбинацию разностных операторов схем «крест» и «кабаре». При определенных значениях весовых коэффициентов это приводит к взаимной компенсации ошибок аппроксимации, полученная в результате схема обладает лучшими свойствами, чем исходные схемы. Целью работы является исследование точности предлагаемой разностной схемы и ее применение к решению задачи диффузии–конвекции при больших сеточных числах Пекле при выгрузке грунта (дампинге) в мелководный водоем. Использована разностная схема, скомбинированная из схем «кабаре» и «крест» с оптимальными весовыми коэффициентами и учитывающая функцию заполненности ячеек [10]. Учет заполненности ячеек позволил естественным образом моделировать области со сложной расчетной геометрией. Исследование применимости предложенной разностной схемы выполнено на примере решения задачи диффузии–конвекции, которая может возникнуть, например, при распространении шлейфов взвеси в водной среде и изменении рельефа дна в связи с выпадением взвешенных частиц грунта в осадок [11]. Проведено сравнение численного решения задачи транспорта веществ на основе разработанной схемы на центральном процессоре (Central Processing Unit — CPU) и на графическом ускорителе (Graphics Processing Unit — GPU), при различных значениях сеточного числа Пекле.

2. Модель транспорта взвешенных частиц

Для описания транспорта взвешенных частиц воспользуемся уравнением диффузии–конвекции, которое может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} + \frac{\partial(vC)}{\partial y} + \frac{\partial((w-w_s)C)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_h \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_v \frac{\partial C}{\partial z} \right) + F. \quad (1)$$

Здесь: C — массовая концентрация взвеси, [кг /м³]; $V = \{u, v, w\}$ — составляющие скорости, [м/с]; w_s — гидравлическая крупность или скорость осаждения взвеси в вертикальном направлении, [м/с]; H — глубина, [м]; D_h, D_v — горизонтальный и вертикальный коэффициенты турбулентной диффузии, [м²/с]; x, y — координаты в горизонтальном направлении; z — вертикальная координата; t — время, [с]; F — функция, описывающая интенсивность распределения источников загрязняющих веществ, [кг /м³·с].

Полагаем, что на свободной поверхности поток в вертикальном направлении равен нулю $\frac{\partial C}{\partial z} = 0$, а вблизи поверхности дна $D_v \frac{\partial C}{\partial z} = w_s C$. На боковой поверхности поток отсутствует $\left(\frac{\partial C}{\partial n} = 0 \right)$, если $(V, n) \geq 0$. Взвесь выходит за границу расчетной области $D_h \frac{\partial C}{\partial n} = V_n C$, если $(V, n) < 0$, где V_n — нормальная составляющая скорости, n — нормаль, направленная внутрь расчетной области.

3. Разностные схемы «кабаре» и «крест» для уравнения переноса

Рассмотрим для некоторой скалярной величины q одномерное уравнение переноса [6]:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Здесь: $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $q(0, x) = q^0(x)$, $q(t, 0) = 0$, $u = \text{const}$.

Введем равномерную расчетную сетку $\omega = \omega_\tau \times \bar{\omega}_h$, где $\omega_\tau = \{t^n \mid n = 0, 1, \dots\}$, $\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}$ — шаг по времени, $\bar{\omega}_h = \{x_i \mid x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; Nh = L\}$, h — шаг по пространству, N — число шагов по пространству.

Для численного решения поставленной задачи можно использовать конечно-разностные схемы: — «кабаре» [12]

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} &= 0, \quad u \geq 0, \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} &= 0, \quad u \leq 0; \end{aligned} \quad (3)$$

— «крест» («чехарда»)

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = 0. \quad (4)$$

В данной работе предлагается применить линейную комбинацию схем «кабаре» (3) и «крест» (4), а весовые коэффициенты, в соответствии с работой [13], взять равными 2/3 и 1/3:

$$\begin{aligned} \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u \geq 0, \\ \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} &= 0, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

4. Исследование точности разностной схемы

Рассмотрим использование модифицированной схемы (5) при решении одномерной начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с младшей производной:

$$q'_t + uq'_x = \mu q''_{xx}, \quad (6)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $u = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, а штрих и нижний индекс показывают, по какой переменной производится дифференцирование. Требуется найти решение

$$q(x, t) \in C^2(0 < x < L) \cap C(0 \leq x \leq L) \cap C^1(0 < t < +\infty) \cap C(0 \leq t < +\infty)$$

при следующих условиях:

— в начальный момент времени $t = 0$

$$q(0, x) = q^0(x); \quad (7)$$

— на границах

$$q(t, 0) = q(t, L) = 0. \quad (8)$$

Запишем функцию $q(x, t)$ в виде конечного тригонометрического ряда Фурье в комплексной форме:

$$q(x, t) = \sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x), \quad (9)$$

где $\omega = \frac{\pi}{L}$, m — номер гармоники, $C_m(t) = \frac{2}{L} \int_0^L q(x, t) \exp(j\omega m x) dx$ — комплексная амплитуда m -й гармоники, $j = \sqrt{-1}$. После подстановки (9) в (6) получим:

$$\left(\sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) \right)'_t + u \left(\sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) \right)'_x = \mu \left(\sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) \right)''_{xx}.$$

Изменим последовательность операций дифференцирования и суммирования в частичной сумме ряда, вычислим производную по пространству:

$$\sum_{m=-N}^N (C_m(t))'_t \exp(j\omega m x) + j\omega m \sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x) = -\mu \omega^2 m^2 \sum_{m=-N}^N C_m(t) \exp(j\omega m x).$$

Учитывая, что функции $\exp(j\omega m x)$ линейно независимы для различных значений m , найдем:

$$(C_m(t))'_t = -(j\omega m + \mu \omega^2 m^2) C_m(t). \quad (10)$$

Решение уравнения (10) имеет вид: $C_m(t) = C_m(0) \exp(-(\mu \omega^2 m^2 + j\omega m)t)$. Подставим его в (10) и учтем начальное и граничные условия (7), (8). Тогда уравнение (6) будет иметь следующее решение:

$$q(x, t) = \sum_{m=-N}^N C_m(0) \exp(-(\mu \omega^2 m^2 + j\omega m)t) \exp(j\omega m x).$$

Покроем область определения равномерной расчетной сеткой $\omega = \omega_\tau \times \bar{\omega}_x$, где $\bar{\omega}_x = \{x_i | x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N_x; N_x h = L\}$, $\omega_\tau = \{t^n | t^n = n\tau; n = 0, 1, \dots, N_t; N_t \tau = T\}$, τ — шаг по времени, h — шаг по пространству, N_t — число шагов по времени, N_x — число шагов по пространству. Исходя из этого аппроксимация уравнения (6) примет вид:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left(\frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 2\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}$$

или

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + 2 \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{3\tau} + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n + 4q_i^n - 5q_{i-1}^n}{3h} - 2\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2} = 0. \quad (11)$$

Учитывая (9) и то, что $x_i = ih$, запишем (11) как

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^{n+1} \exp(j\omega m h i) - C_m^n \exp(j\omega m h i)}{\tau} + \\ & + 2 \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n \exp(j\omega m h (i-1)) - C_m^{n-1} \exp(j\omega m h (i-1))}{3\tau} + \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n \exp(j\omega m h i) - C_m^{n-1} \exp(j\omega m h i)}{3\tau} + \\ & + u \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n \exp(j\omega m h (i+1)) + 4C_m^n \exp(j\omega m h i) - 5C_m^n \exp(j\omega m h (i-1))}{3h} - \\ & - 2\mu \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n \exp(j\omega m h (i+1)) - 2C_m^n \exp(j\omega m h i) + C_m^n \exp(j\omega m h (i-1))}{h^2} = 0. \end{aligned}$$

Произведя несложные арифметические действия, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} \exp(j\omega m h i) + 2 \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n - C_m^{n-1}}{3\tau} \exp(-j\omega m h) \exp(j\omega m h i) + \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n - C_m^{n-1}}{3\tau} \exp(j\omega m h i) + \\ & + u \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n \exp(j\omega m h) + 4C_m^n - 5C_m^n \exp(-j\omega m h)}{3h} \exp(j\omega m h i) - \\ & - 2\mu \sum_{m=-N}^N \frac{C_m^n \exp(j\omega m h) - 2C_m^n + C_m^n \exp(-j\omega m h)}{h^2} \exp(j\omega m h i) = 0. \end{aligned}$$

В силу линейной независимости $\exp(j\omega i)$, последнее выражение перепишем в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} + 2 \frac{C_m^n - C_m^{n-1}}{3\tau} \exp(-j\omega m h) + \frac{C_m^n - C_m^{n-1}}{3\tau} + u C_m^n \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{3h} - \\ & - 2\mu C_m^n \frac{\exp(j\omega m h) - 2 + \exp(-j\omega m h)}{h^2} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При $\tau \rightarrow 0$ из (12) следует:

$$(C_m(t))'_t \left(\frac{4}{3} + 2 \frac{\exp(-j\omega m h)}{3} \right) + u C_m^n \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{3h} - 2\mu C_m^n \frac{\exp(j\omega m h) - 2 + \exp(-j\omega m h)}{h^2} = 0$$

или

$$(C_m(t))'_t = \left(-u \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{2h(2 + \exp(-j\omega m h))} + \mu \frac{3(-\exp(j\omega m h) + 2 - \exp(-j\omega m h))}{h^2(2 + \exp(-j\omega m h))} \right) C_m^n.$$

Лемма 1. При аппроксимации задачи (6)–(8) разностной схемой (11) для каждой гармоники решения q скорости конвективного обмена u и диффузионного обмена μ меньше реальных значений и отличаются, соответственно, на величины:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{2j\omega m h(2 + \exp(-j\omega m h))}, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{3(-\exp(j\omega m h) + 2 - \exp(-j\omega m h))}{\omega^2 m^2 h^2(2 + \exp(-j\omega m h))}.$$

Доказательство: Из (12) при $\tau \rightarrow 0$ следует:

$$(C_m(t))'_t = \left(-ju\omega m \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{2j\omega m h(2 + \exp(-j\omega m h))} + \mu \omega^2 m^2 \frac{3(\exp(j\omega m h) - 2 + \exp(-j\omega m h))}{\omega^2 m^2 h^2(2 + \exp(-j\omega m h))} \right) C_m^n.$$

В силу (10) решение, полученное на основе схемы (11), соответствует решению уравнения $q'_t = -u^* q'_x + \mu^* q''_{xx}$, где $u^* = u(1 - \alpha_1)$, $\mu^* = \mu(1 - \alpha_2)$, $\alpha_1 = 1 - \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{2j\omega m h(2 + \exp(-j\omega m h))}$,

$$\alpha_2 = 1 - \frac{3(-\exp(j\omega m h) + 2 - \exp(-j\omega m h))}{\omega^2 m^2 h^2(2 + \exp(-j\omega m h))}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Разностная схема (5) для задачи (2) имеет погрешность аппроксимации равную $O(\tau^2 + h^3)$.

Доказательство: Из (12) при $\mu = 0$ и $h \rightarrow 0$ следует:

$$\begin{aligned} & \frac{C_m^{n+1} - C_m^n}{\tau} + 2 \frac{C_m^n - C_m^{n-1}}{3\tau} \exp(-j\omega m h) + \frac{C_m^n - C_m^{n-1}}{3\tau} + u C_m^n \frac{\exp(j\omega m h) + 4 - 5 \exp(-j\omega m h)}{3h} = \\ & = \frac{C_m^{n+1} - C_m^{n-1}}{\tau} + 2ju\omega m C_m^n = 2(C_m)_t' + O(\tau^2). \end{aligned}$$

Исследуем порядок погрешности аппроксимации конвективного члена по пространству. Произведем замену $j\omega m h = s$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 - \frac{e^s + 4 - 5e^{-s}}{2s(2 + e^{-s})} = 1 - \frac{1 + s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24} + \frac{s^5}{120} + O(s^6) + 4 - 5 + 5s - \frac{5s^2}{2} + \frac{5s^3}{6} - \frac{5s^4}{24} + \frac{s^5}{24} + O(s^6)}{2s \left(2 + 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24} + O(s^5) \right)} = \\ &= \frac{-\frac{s^4}{6} + \frac{s^5}{30} + O(s^6)}{6s - 2s^2 + s^3 - \frac{s^4}{3} + \frac{s^5}{12} + O(s^6)} = -\frac{s^3}{36} + O(s^4) \quad \text{или} \quad \alpha_1 = j \frac{(\omega mh)^3}{36} + O((\omega mh)^4). \end{aligned}$$

Из полученного выражения видно, что схема (5) аппроксимирует конвективный член с третьим порядком точности по пространству.

Лемма доказана.

Исследуем порядок погрешности аппроксимации диффузионного члена по пространству:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 1 - \frac{3e^s - 6 + 3e^{-s}}{s^2(2 + e^{-s})} = 1 - \frac{3 + 3s + \frac{3s^2}{2} + \frac{s^3}{2} + \frac{s^4}{8} + O(s^5) - 6 + 3 - 3s + \frac{3s^2}{2} - \frac{s^3}{2} + \frac{s^4}{8} + O(s^5)}{s^2 \left(2 + 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24} + O(s^5) \right)} = \\ &= 1 - \frac{3s^2 + \frac{s^4}{4} + O(s^6)}{3s^2 - s^3 + \frac{s^4}{2} + O(s^5)} = \frac{-s^3 + \frac{s^4}{4} + O(s^6)}{3s^2 - s^3 + \frac{s^4}{2} + O(s^5)} = -\frac{s}{3} + O(s^2). \end{aligned}$$

Отметим, что параметр $r = \pi/\omega mh$ описывает количество узлов, приходящихся на половину периода волны, при этом имеет место оценка $\pi > \omega mh$. Отсюда следует, что точность решения зависит от количества узлов, приходящихся на половину периода волны.

На рисунках 1 и 2 приведены графики функций

$$\alpha_1(r) = 1 - \frac{\exp(j\pi/r) + 4 - 5\exp(-j\pi/r)}{2j\pi/r(2 + \exp(-j\pi/r))}, \quad \alpha_2(r) = 1 - \frac{3(-\exp(j\pi/r) + 2 - \exp(-j\pi/r))}{\pi^2/r^2(2 + \exp(-j\pi/r))},$$

описывающих зависимость погрешности аппроксимации конвективного и диффузионного членов соответственно разностной схемой (11) от числа узлов, используемых для решения задачи (2) в сравнении с центральной разностной схемой [9].

Анализируя графики, можно сделать вывод, что схема (5), представляющая собой линейную комбинацию разностных схем «кабаре» и «крест», применима для задач, в которых конвективный перенос преобладает над диффузионным.

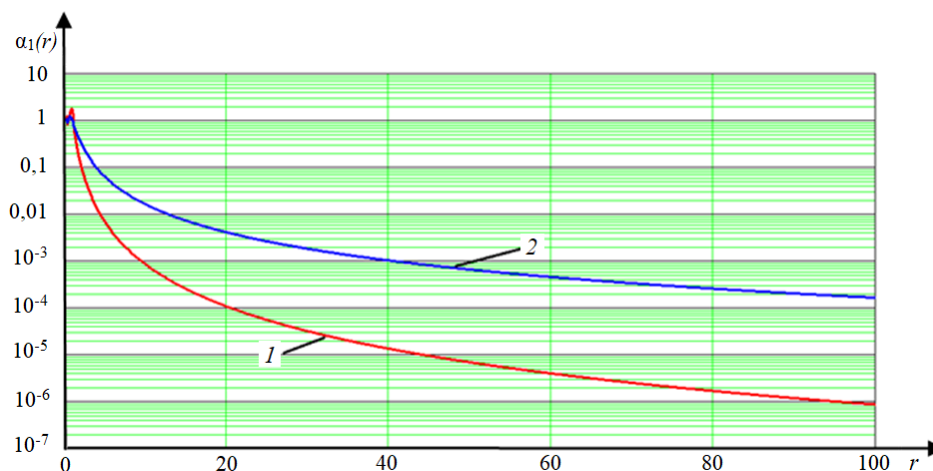


Рис. 1. График зависимости погрешности аппроксимации конвективного члена от числа узлов: 1 – для схемы (11); 2 – для центральной разностной схемы

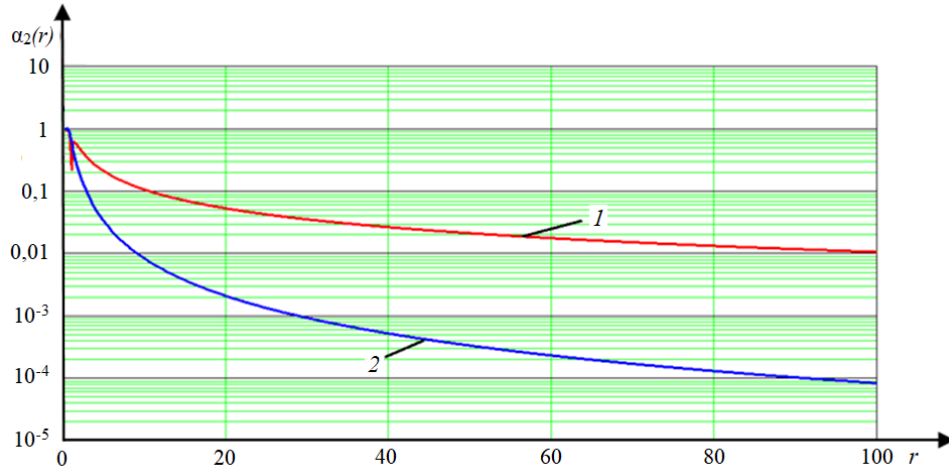


Рис. 2. График зависимости погрешности аппроксимации диффузионного члена от числа узлов: 1 – для схемы (11); 2 – для центральной разностной схемы

5. Аппроксимация задачи транспорта взвешенных частиц на основе линейной комбинации схем «кабаре» и «крест»

Рассмотрим аппроксимацию двумерного уравнения диффузии–конвекции

$$c'_t + uc'_x + vc'_y = (\mu c'_x)'_x + (\mu c'_y)'_y \tag{13}$$

с граничными условиями

$$c'_n(x, y, t) = \alpha_n c + \beta_n, \tag{14}$$

где u, v — компоненты скорости, μ — коэффициент турбулентного обмена.

Расчетная область вписана в прямоугольник. Для численной реализации дискретной математической модели поставленной задачи введем равномерную сетку:

$$w_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih_x, y_j = jh_y \ (n = 0, \dots, N_t, i = 0, \dots, N_x, j = 0, \dots, N_y); N_t\tau = T, N_x h_x = l_x, N_y h_y = l_y\},$$

где τ — шаг по времени, h_x, h_y — шаги по пространству, N_t — верхняя граница по времени, N_x, N_y — границы по пространству.

Для аппроксимации однородного уравнения (13) при больших сеточных числах Пекле применим схемы расщепления по пространству:

$$\frac{c^{n+1/2} - c^n}{\tau} + u(c^n)'_x = \left(\mu(c^n)'_x \right)'_x, \tag{15}$$

$$\frac{c^{n+1} - c^{n+1/2}}{\tau} + v(c^{n+1/2})'_y = \left(\mu(c^{n+1/2})'_y \right)'_y. \tag{16}$$

Введем коэффициенты q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 , описывающие заполненность областей, находящихся в окрестности ячейки. Значение q_0 характеризует заполненность области $D_0: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$, q_1 — $D_1: x \in (x_i, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$, q_2 — $D_2: x \in (x_{i-1/2}, x_i), y \in (y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$, q_3 — $D_3: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_j, y_{j+1/2})$, q_4 — $D_4: x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), y \in (y_{j-1/2}, y_j)$. Заполненные части областей D_m назовем Ω_m , где $m = 0, \dots, 4$. В соответствии с этим коэффициенты q_m можно вычислить по формулам:

$$(q_m)_{i,j} = \frac{S_{\Omega_m}}{S_{D_m}}, \quad (q_0)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{4},$$

$$(q_1)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j} + o_{i+1,j+1}}{2}, \quad (q_2)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_3)_{i,j} = \frac{o_{i+1,j+1} + o_{i,j+1}}{2}, \quad (q_4)_{i,j} = \frac{o_{i,j} + o_{i+1,j}}{2}.$$

Тогда дискретные аналоги операторов конвективного — uc'_x , и диффузионного — $(\mu c'_x)'_x$, переноса в случае частичной заполненности ячеек будут следующими:

$$(q_0)_{i,j} uc'_x \sim (q_1)_{i,j} u_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{2h_x} + (q_2)_{i,j} u_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{2h_x},$$

$$(q_0)_{i,j} (\mu c'_x)'_x \sim (q_1)_{i,j} \mu_{i+1/2,j} \frac{c_{i+1,j} - c_{i,j}}{h_x^2} - (q_2)_{i,j} \mu_{i-1/2,j} \frac{c_{i,j} - c_{i-1,j}}{h_x^2} - |(q_1)_{i,j} - (q_2)_{i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}.$$

При расщеплении по пространству (15), (16) используем схему (5), полученную как результат линейной комбинации схем «кабаре» и «крест», при этом учтем функцию заполненности ячеек. Разностная схема (15) для описания переноса вдоль координаты x примет вид:

$$\frac{2q_{2,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} + u_{i+1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + \frac{2\Delta_x c_{i-1,j}^n q_{2,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} =$$

$$= 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} - |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} \geq 0;$$

$$\frac{2q_{1,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j}^n}{\tau} + 5u_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{3h_x} + u_{i-1/2,j} \min(q_{1,i,j}, q_{2,i,j}) \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{3h_x} +$$

$$+ \frac{2\Delta_x c_{i+1,j}^n q_{1,i,j} + \Delta_x c_{i,j}^n q_{0,i,j}}{3} = 2\mu_{i+1/2,j} q_{1,i,j} \frac{c_{i+1,j}^n - c_{i,j}^n}{h_x^2} - 2\mu_{i-1/2,j} q_{2,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i-1,j}^n}{h_x^2} -$$

$$- |q_{1,i,j} - q_{2,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_x c_{i,j} + \beta_x}{h_x}, \quad u_{i,j} < 0, \quad \text{где } \Delta_x c_{i,j}^n = \frac{c_{i,j}^{n-1/2} - c_{i,j}^{n-1}}{\tau};$$

а разностная схема (16) для представления переноса вдоль y станет следующей:

$$\frac{2q_{4,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + 5v_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y} + v_{i,j+1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y} + \frac{2\Delta_y c_{i,j-1}^{n+1/2} q_{4,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} q_{0,i,j}}{3} =$$

$$= 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^n - c_{i,j}^n}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j-1}^n}{h_y^2} - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} \geq 0;$$

$$\frac{2q_{3,i,j} + q_{0,i,j}}{3} \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} + 5v_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{3h_y} + v_{i,j-1/2} \min(q_{3,i,j}, q_{4,i,j}) \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{3h_y} + \frac{2\Delta_y c_{i,j+1}^{n+1/2} q_{3,i,j} + \Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} q_{0,i,j}}{3} =$$

$$= 2\mu_{i,j+1/2} q_{3,i,j} \frac{c_{i,j+1}^{n+1/2} - c_{i,j}^{n+1/2}}{h_y^2} - 2\mu_{i,j-1/2} q_{4,i,j} \frac{c_{i,j}^{n+1/2} - c_{i,j-1}^{n+1/2}}{h_y^2} - |q_{3,i,j} - q_{4,i,j}| \mu_{i,j} \frac{\alpha_y c_{i,j}^{n+1/2} + \beta_y}{h_y}, \quad v_{i,j} < 0,$$

где $\Delta_y c_{i,j}^{n+1/2} = \frac{c_{i,j}^n - c_{i,j}^{n-1/2}}{\tau}$.

6. Программная реализация параллельного счета

В рамках данной работы построен параллельный алгоритм, реализующий поставленную задачу переноса вещества (13), (14) на графическом ускорителе (GPU) под управлением системы Compute Unified Device Architecture — CUDA [14]. Проведено сравнение результатов работы алгоритма с классической реализацией на центральном процессоре (CPU). Данные о расчетных сетках и времени работы программных компонент представлены в таблицах 1 и 2.

Для сравнения работы алгоритмов на CPU и GPU построим графики зависимости времени их работы от размеров сетки (Рис. 3а). Аналогичные графики с использованием логарифмической шкалы являются более наглядными (Рис. 3б). На ось абсцисс нанесены номера вычислительных экспериментов,

Таблица 1. Результаты работы алгоритма на GPU

Номер варианта расчета Параметры сеток	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Число узлов								
N_x	10	20	50	100	200	500	1000	1000	1000
N_y	10	20	50	100	200	500	1000	1000	1000
T	1	2	5	10	50	50	100	500	1000
Время счета, с	0,065	0,072	0,102	0,092	0,412	1,570	10,957	79,292	134,51

Таблица 2. Результаты работы алгоритма на CPU

Номер варианта расчета Параметры сеток	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Число узлов								
N_x	10	20	50	100	200	500	1000	1000	1000
N_y	10	20	50	100	200	500	1000	1000	1000
T	1	2	5	10	50	50	100	500	1000
Время счета, с	0,002	0,004	0,02	0,15	4,22	37,78	273,05	1413,97	2721,85

проведенных на различных расчетных сетках, описанных в таблицах 1 и 2. По оси ординат отмечены значения времени работы программных компонент для CPU и GPU.

Согласно рисунку 3 можно сделать вывод, что такой мощный инструмент как CUDA малоэффективен для малых сеток (размером до 100×100 расчетных узлов). В то же время на сетке 100×100 CPU с его помощью удается достигать пика ускорения, что позволяет использовать GPU там, где центральный процессор дает неудовлетворяющий результат. В случае же больших сеток (например, 1000×1000 расчетных узлов) использование обеспечения CUDA сокращает время вычислений на порядок.

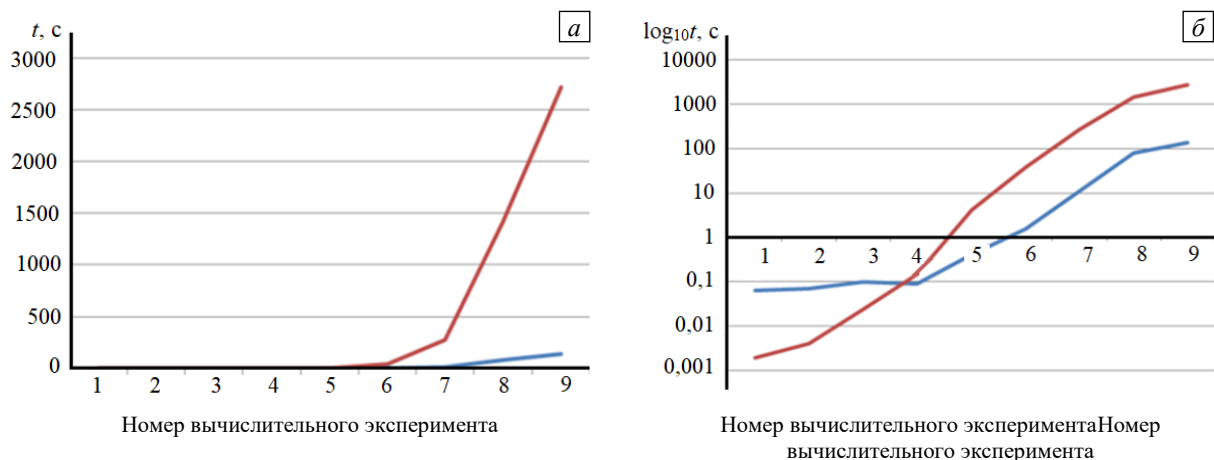


Рис. 3. Время работы программных компонент на CPU (—) и GPU (—) (а); эти же кривые в логарифмических координатах (б)

Анализ результатов проведенных экспериментов с разработанными программными компонентами показал, что максимальное значение отношения времени работы алгоритма, реализующего поставленную задачу переноса вещества в мелководном водоеме на графическом ускорителе (GPU), ко времени работы аналогичного алгоритма на центральном процессоре (CPU), составляет 24,92 и достигается на сетке, содержащей 1000×1000 расчетных узлов.

7. Численные эксперименты

Исходными данными являлись: глубина водоема 10 м; объем выгрузки грунта 741 м^3 ; скорость течения 0,2 м/с; скорость осаждения 2,042 мм/с (по Стоксу); плотность грунта 1600 кг/м^3 ; процентное содержание пылеватых частиц (диаметр меньше 0,05 мм) в песчаном грунте 26,83%. Расчетная область имела параметры: длину 3 км; ширину 1,4 км. Шаг по горизонтальной пространственной координате составлял 20 м; шаг по вертикальной пространственной координате — 1 м; расчетный интервал равнялся 2 часам.

На рисунке 4 показана динамика изменения концентрации взвешенных частиц (мг/л) с течением времени. Приведены значения поля концентрации взвеси в сечении расчетной области плоскостью,

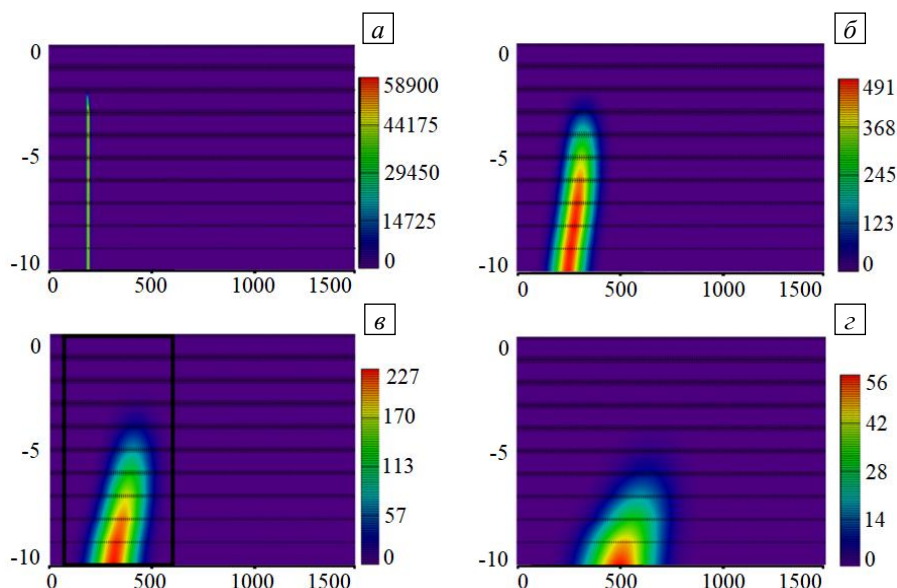


Рис. 4. Вид поля концентрации взвешенных частиц в разные моменты времени t : в начальный момент (а); через 15 (б), 30 (в), 45 (з) минут после момента выгрузки

образованной векторами, направленными вертикально и вдоль течения, и проходящей через точку выгрузки. Жидкость течет слева направо. В расчетном интервале времени рассматривалось состояние исследуемой системы в начальный момент и через 15, 30, 45 мин после выгрузки грунта в водоем.

При использовании центрально-разностных схем в случае высокой скорости водного потока для улучшения точности вычислений требуется увеличивать размер сеток. При увеличении размера в N раз количество арифметических операций возрастает в N^5 раз в связи с ростом количества расчетных узлов в N^3 раз и уменьшением шага по времени в N^2 раз. При использовании представленной модификации схемы «кабаре» увеличение скорости движения водного потока не приводит к возрастанию трудозатрат. Расчеты концентраций взвешенных частиц при увеличении скорости водного потока представлены на рисунке 5. Следует отметить, что рисунок 5а соответствует выделенному фрагменту рисунка 4в. Перенос вещества при различных скоростях и временах, показанный на рисунке 5, осуществляется на одинаковое расстояние.

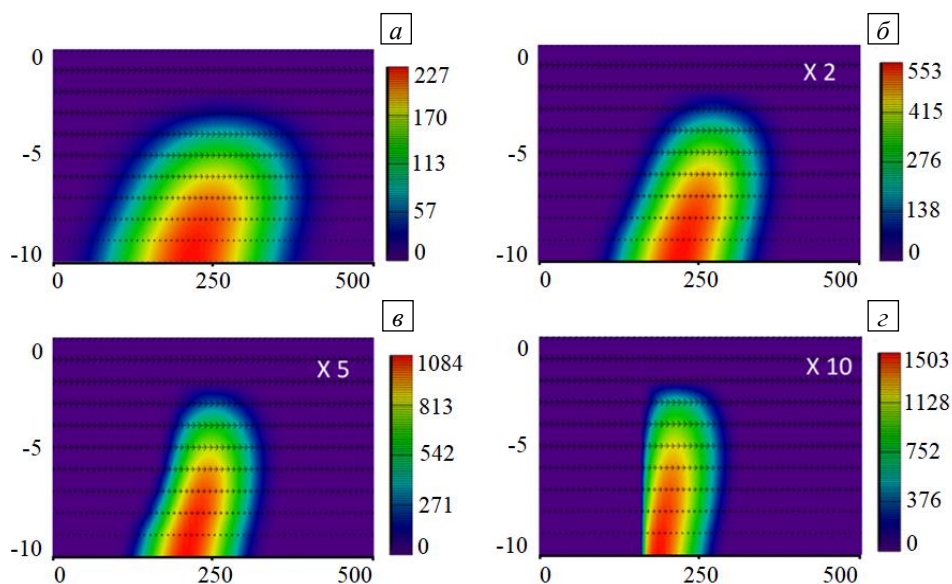


Рис. 5. Вид поля концентрации взвешенных частиц в разные моменты времени t : через 30 мин (а); через 15 мин при скорости, водного потока, увеличенной в 2 раза (б); через 6 мин при скорости, увеличенной в 5 раз (в); через 3 мин, скорость выросла 10 раз (з)

В случае больших сеточных чисел Пекле в горизонтальных направлениях и малых ($Pe \leq 2$) в вертикальном направлении для ускорения скорости счета можно применять экономичные явно-неявные схемы. При этом модифицированный вариант схемы «кабаре» более эффективен при аппроксимации в горизонтальном направлении, в вертикальном же направлении оказывается лучшей центрально-разностная схема с весами. Описание и исследование явно-неявных схем для решения рассмотренной

задачи представлены в работе [15]. Применение модифицированной схемы «кабаре» с весами по вертикальному направлению требует дополнительных исследований.

8. Заключение

В данной работе представлено численное решение задачи транспорта взвешенных частиц с использованием разностной схемы, построенной на основе линейной комбинации разностных операторов схем «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными в результате минимизации порядка погрешности аппроксимации. Проведено исследование точности предлагаемой разностной схемы при решении задачи диффузии–конвекции в случае больших сеточных чисел Пекле. Показано, что схема имеет погрешность аппроксимации, равную $O(\tau^2 + h^3)$. Рассмотренную разностную схему целесообразно использовать для задач, в которых конвективный перенос преобладает над диффузионным.

В статье представлено сравнение времени работы алгоритма на центральном процессоре и графическом ускорителе. Программная реализация алгоритма на GPU показала свою эффективность при увеличении размеров расчетной сетки. Анализ результатов экспериментов с разработанными программными компонентами показал, что максимальное значение отношения времени работы алгоритма, реализующего двумерную задачу переноса вещества в мелководном водоеме на графическом ускорителе (GPU), ко времени работы аналогичного алгоритма на центральном процессоре (CPU) составляет 24,92. Оно достигается при взятых исходных данных на сетке, содержащей 1000×1000 расчетных узлов. В качестве прикладной задачи рассмотрена выгрузка грунта (дампинг) в мелководный водоем. Аппроксимация разрешающих уравнений выполнена на основе предложенного варианта схемы «кабаре». Показано, что при использовании модифицированной схемы «кабаре» увеличение скорости движения водного потока не приводит к потере точности решения за счет диссипативных источников при незначительном увеличении трудозатрат при вычислениях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00421_а).

Литература

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Разностная схема «Кабаре» с улучшенными дисперсионными свойствами // Матем. моделирование. 2019. Т. 31, № 3. С. 83-96. <https://doi.org/10.1134/S0234087919030067>
2. Четверушкин Б.Н. Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред // Матем. моделирование. 2012. Т. 24, № 11. С. 33-52.
3. Iserles A. Generalized leapfrog methods // IMA J. Numer. Anal. 1986. Vol. 6. P. 381-392. <https://doi.org/10.1093/imanum/6.4.381>
4. Головизнин В.М., Самарский А.А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Матем. моделирование. 1998. Т. 10, № 1. С. 86-100.
5. Данилин А.В., Соловьев А.В. Модификация схемы Кабаре для разрешения звуковых точек в газовых течениях // Выч. мет. программирование. 2019. Т. 20, № 4. С. 481-488. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r442>
6. Зюзина Н.А., Остапенко В.В. О распаде неустойчивых сильных разрывов при аппроксимации схемой КАБАРЕ скалярного закона сохранения с выпуклым потоком // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 6. С. 988-1012. <https://doi.org/10.7868/S004446691806011X>
7. Гуцин В.А., Кондаков В.Г. Обобщение метода КАБАРЕ на случай течений несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности // Матем. моделирование. 2018. Т. 30, № 11. С. 75-90. (English version <https://doi.org/10.1134/S2070048219040082>)
8. Глотов В.Ю., Головизнин В.М. Схема «кабаре» для двумерной несжимаемой жидкости в переменных «скорость–давление» // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 6. С. 898-913. (English version <https://doi.org/10.1134/S0965542513060080>)
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. О разностных схемах «кабаре» и «крест» // Выч. мет. программирование. 2019. Т. 20, № 2. С. 170-181. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r216>
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Разностная схема для решения задач гидродинамики при больших сеточных числах Пекле // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 5. С. 833-848. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-5-833-848>
11. Ковтун И.И., Проценко Е.А., Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Расчет воздействия на водные биоресурсы доуглубительных работ в Белом море // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 2. С. 27-38.
12. Гуцин В.А. Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 2. С. 6-18. (English version <https://doi.org/10.1134/S2070048216050094>)
13. Самарский А.А. Классы устойчивых схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7, № 5. С. 1096-1133. (English version <https://doi.org/10.1016%2F0041-5553%2867%2990100-0>)
14. Четверушкин Б.Н., Якововский М.В. Вычислительные алгоритмы и архитектура систем высокой производительности: Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2018. 12 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-52>
15. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко Е.А. Экономичные явно-неявные схемы решения многомерных задач диффузии-конвекции // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 4. С. 435-445. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37>

References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Cabaret difference scheme with improved dispersion properties. *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, pp. 867-876. <https://doi.org/10.1134/S207004821906019X>
2. Chetverushkin B.N. Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations. *Math. Models Comput. Simul.*, 2013, vol. 5, no. 3, pp. 266-279.
3. Iserles A. Generalized leapfrog methods // *IMA J. Numer. Anal.* 1986. Vol. 6. P. 381-392. <https://doi.org/10.1093/imanum/6.4.381>
4. Goloviznin V.M., Samarskiy A.A. Raznostnaya аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной [Difference approximation of convective transport with spatial splitting of time derivative]. *Matem. modelirovaniye – Math. Models and Comput. Simul.*, 1998, vol. 10, no. 1, pp. 86-100.
5. Danilin A.V., Solov'ev A.V. A modification of the CABARET scheme for resolving the sound points in gas flows. *Vych. met. programmirovaniye – Numerical methods and programming*, 2019, vol. 20, no. 4, pp. 481-488. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r442>
6. Zyuzina N.A., Ostapenko V.V. Decay of unstable strong discontinuities in the case of a convex-flux scalar conservation law approximated by the CABARET scheme. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2018, vol. 58, pp. 950-966. <https://doi.org/10.1134/S0965542518060155>
7. Gushchin V.A., Kondakov V.G. On the Cabaret Scheme for incompressible fluid flow problems with a free surface. *Math. Models Comput. Simul.*, 2019, vol. 11, pp. 499-508. <https://doi.org/10.1134/S2070048219040082>
8. Glotov V.Yu., Goloviznin V.M. CABARET scheme in velocity-pressure formulation for two-dimensional incompressible fluids. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2013, vol. 53, pp. 721-735. <https://doi.org/10.1134/S0965542513060080>
9. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Upwind and standard leapfrog difference schemes. *Vych. met. programmirovaniye – Numerical methods and programming*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 170-181. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v20r216>
10. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Difference scheme for solving problems of hydrodynamics for large grid Peclet numbers. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovaniye – Computer Research and Modeling*, 2019, vol. 11, no. 5, pp. 833-848. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-5-833-848>
11. Kovtun I.I., Protsenko E.A., Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Calculating the impact on aquatic resources dredging in the White Sea. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika – Fundamental and Applied Hydrophysics*, 2016, vol. 9, no. 2, pp. 27-38.
12. Gushchin V.A. Family of quasi-monotonic finite-difference schemes of the second-order of approximation. *Math. Models Comput. Simul.*, 2016, vol. 8, pp. 487-496. <https://doi.org/10.1134/S2070048216050094>
13. Samarskiy A.A. Classes of stable schemes. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1967, vol. 7, no. 5, pp. 171-223. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(67\)90100-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(67)90100-0)
14. Chetverushkin B.N., Yakobovskiy M.V. *Vychislitel'nyye algoritmy i arkhitektura sistem vysokoy proizvoditel'nosti* [Numerical algorithms and architecture of HPC systems]. Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics. Moscow, 2018. 12 p. <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-52>
15. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Sidoryakina V.V., Protsenko E.A. Economic explicit-implicit schemes for solving multidimensional diffusion-convection problems. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 4, pp. 435-445. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.37>

Поступила в редакцию 31.10.2020; после доработки 01.12.2020; принята к опубликованию 01.12.2020

Сведения об авторах

Сухинов Александр Иванович, чл.-корр. РАН, дфмн, проф., Донской государственный технический университет (ДГТУ), 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; e-mail: sukhinov@gmail.com

Кузнецова Инна Юрьевна, б/с, ст. преп., Инженерно-технологическая академия, Южный федеральный университет (ИТА ЮФУ), 346900, Ростовская область, г. Таганрог, ул. Чехова, д. 2; email: ikuznecova@sfnedu.ru

Чистяков Александр Евгеньевич, дфмн, проф., ДГТУ; e-mail: cheese_05@mail.ru

Проценко Елена Анатольевна, кфмн, Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РГЭУ РИНХ), 347936, г. Таганрог, ул. Инициативная, д. 48; e-mail: earpos@rambler.ru

Белова Юлия Валериевна, б/с, асс., ДГТУ; e-mail: yvbelova@yandex.ru