

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.4.30](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.4.30)

УДК 539.42

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ $T$ -НАПРЯЖЕНИЙ И КОЭФФИЦИЕНТА БИАКСИАЛЬНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ОБРАЗЦА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

А.А. Тырымов

*Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Российская Федерация*

Представлены результаты численного расчета  $T$ -напряжений и коэффициента биаксиальности в растягиваемой пластине с центральной трещиной, полученные графовым методом. Этот метод анализа состояния деформируемого твердого тела основан на принципах теории графов, применяемых в механике для построения дискретных моделей, позволяющих численно оценивать в объекте исследования поля таких его параметров, как перемещения, деформации и напряжения. При изучении напряженно-деформированного состояния вблизи вершины трещины используется предложенный автором сингулярный элемент графовой модели упругой среды. Расчет  $T$ -напряжений осуществляется методами напряжений и перемещений. Вычисления ведутся на грубой сетке, тем не менее она дает возможность достичь достаточно точных результатов. Это объясняется тем, что графовые законы Кирхгофа (вершинный и контурный) обеспечивают условия равновесия и совместности деформаций для элемента в целом. Кроме того, специальная процедура вычисления коэффициентов аппроксимирующих полиномов приводит к выполнению уравнений равновесия по объему элемента. Состояние образца с трещиной предлагается описывать двумя безразмерными комплексами, и тем самым показывается роль биаксиальности образца. Один из комплексов зависит от длины трещины, приложенной нагрузки, модуля упругости материала и перемещения между вершинами трещины при ее раскрытии. Этот комплекс легко находится из натурального эксперимента. Другой комплекс связан с расчетом несингулярного члена из разложения Вильямса. Установленная в результате вычислительного эксперимента взаимозависимость комплексов сделала допустимым приближенное определение  $T$ -напряжений и коэффициента биаксиальности на основе нескольких натуральных замеров.

Ключевые слова: математическое моделирование, упругость, деформация, сингулярный элемент,  $T$ -напряжения, коэффициент биаксиальности напряжений

## NUMERICAL SIMULATION OF $T$ -STRESSES AND STRESS BIAXIILITY FACTOR FOR A CENTRALLY CRACKED SPECIMEN UNDER MIXED BOUNDARY CONDITIONS

А.А. Тырымов

*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*

The results of the numerical calculation of  $T$ -stresses and the stress biaxiality factor in a centrally cracked tensile plate obtained by the graph method are presented. The method of analysis of a deformable solid is based on the principles of graph theory used in mechanics for constructing discrete models that allow numerical modeling of the fields of displacements, deformations, and stresses of a solid. When analyzing the stress-strain state near the crack tip, the author uses the singular element of the graph model of an elastic medium. When calculating  $T$ -stresses, stress and displacement methods are used. Calculations are performed on a coarse grid, however, it allows one to get fairly accurate results. This is because the graph laws (Kirchhoff's vertex and cyclic laws) provide conditions for equilibrium and compatibility of deformations for the element as a whole. In addition, a special procedure for determining the coefficients of approximating polynomials leads to the implementation of equilibrium equations for the volume of the element. The state of a sample with a crack is described by two dimensionless complexes, which makes it possible to evaluate the biaxiality of the sample. One of these complexes depends on the crack length, applied load, elastic modulus of the material and crack tip opening displacement. Another complex is related to the calculation of a non-singular term in the Williams decomposition. The computational experiment allowed establishing a relationship between these dimensionless complexes. It is important to note that these parameters can be easily determined from a full-scale experiment. As a result, using several full-scale measurements, an approximate estimate for  $T$ -stresses and the stress biaxiality factor was obtained.

*Key words:* mathematical simulation, elasticity, strain, singular element,  $T$ -stress, stress biaxiality factor

### 1. Введение

Анализ напряженно-деформированного состояния в окрестности трещин является важной составляющей в современном подходе при оценке прочности, трещиностойкости и ресурса высоконапряженных элементов конструкций. Информация о напряженном состоянии вблизи трещины позволяет обоснованно изучить закономерности ее развития, определить предельные нагрузки, произвести расчет статической и усталостной прочности и на основании этого обеспечить безопасную и безаварийную работу инженерных конструкций.

Достаточно продолжительное время в линейной механике разрушения упругого тела учитывалась лишь сингулярная составляющая поля напряжений у вершины трещины, при этом мерой сингулярности служил обычно коэффициент интенсивности напряжений (КИН), однако многочисленные теоретические и экспериментальные исследования показали необходимость введения дополнительного параметра в целях уточнения однопараметрического подхода. Вследствие этого в последние годы интенсивно развивается

так называемая двухпараметрическая модель механики разрушения. Оказалось, что многие противоречия будут устранены, если в разложении Вильямса [1] сохранить второй — несингулярный — член. Этот член называют  $T$ -напряжением. Наряду с ним при двухпараметрическом подходе для оценки параметров жесткости напряженного состояния у вершины трещины широко используется безразмерный коэффициент биаксиальности [2]:

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K} = \frac{T}{F\sigma}.$$

Здесь:  $a$  — длина трещины;  $\sigma$  — напряжение, приложенное к образцу при одноосном растяжении;  $K$  и  $F$  — размерный КИН и КИН, нормированный на величину  $\sigma\sqrt{\pi a}$ . Параметр  $B$  можно рассматривать как меру стеснения деформаций в зоне предразрушения у вершины трещины. Заметим, что для представляющих интерес в исследованиях вязкого разрушения образцов параметр биаксиальности табулирован и представлен в виде графиков при разной геометрии и различных схемах нагружения [2, 3]. Вероятно, первой работой, в которой большое внимание уделено включению второго (или первого несингулярного) члена, была работа Ларссона и Карлссона [4]. После публикаций [5, 6] двухпараметрическое представление стало распространенным в расчетах механики разрушений. Для оценки  $T$ -напряжений применяются разные методы, чаще всего метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов.

В обзорной статье [7] достаточно подробно обосновывается необходимость учета влияния  $T$ -напряжений при определении траектории развития трещины, при оценке усталостной долговечности конструкций, а также при выявлении формы и размеров пластических зон и параметров локального стеснения деформаций в окрестности вершины трещины. Различные аспекты значимости  $T$ -напряжений в двухпараметрической механике разрушения рассматриваются в работах Ю.Г. Матвиенко и его коллег [8–10]. В рамках такого подхода, в частности, показано, как важно принимать во внимание несингулярные компоненты поля напряжений в критериальных задачах механики разрушения [8, 9], в расчетах размера и формы зон пластической деформации в окрестности вершины трещины [10]. В работе [11] дается оценка точности расчетов  $T$ -напряжений в зависимости от погрешностей, возникающих при экспериментальном или численном моделировании. Установлено, что метод разложения по собственным функциям Вильямса позволяет обеспечить достаточную для практических целей точность вычисления несингулярных напряжений, даже если исходные данные содержат значительные погрешности. В [12] предложен метод, который можно назвать экспериментально-аналитическим: коэффициенты в разложении Вильямса рассчитываются по экспериментально найденным значениям перемещений заданных в образце точек. Задача решается на основе минимизации невязки между теоретическими и экспериментальными величинами перемещений.

Заметим, что интерес к различным аспектам влияния  $T$ -напряжений из полного решения Вильямса не ослабевает [13–20]. Так, в недавно опубликованных работах [13, 18] проведено экспериментальное и теоретическое прогнозирование распространения и роста усталостной трещины в различных образцах, а статьи [19, 20] посвящены разработке критериев для прогнозирования разрушения материалов с трещинами, в том числе обладающих свойствами ортотропии. Таким образом, исследования по расчету и применению  $T$ -напряжений продолжают интенсивно развиваться, что подчеркивает актуальность данного направления. Предлагаемый в данной статье подход основан на сочетании как аналитических результатов, состоящих в асимптотическом представлении компонент напряжений и перемещений, так и численных расчетов при оценке искомых коэффициентов в этих разложениях.

Цель настоящей работы заключается в применении графового метода при математическом моделировании напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины и введении на основе вычислительного эксперимента параметров для оценки  $T$ -напряжения и коэффициента биаксиальности в пластине с центральной трещиной.

## 2. Метод численного расчета

В данной работе поля деформаций и напряжений находятся нестандартным численным методом, в котором сплошное тело с помощью ориентированных графов представляется в виде дискретной модели [21–26]. Для расчета напряженно-деформированного состояния в окрестности особых точек разреза, вблизи остроконечных включений и других сингулярных точек и линий в [27] автором предложен специальный сингулярный элемент. В предположении сингулярного характера распределения напряжений и деформаций у вершины трещины неизвестные деформации в пределах элемента аппроксимируются выражениями, содержащими как линейные полиномы относительно переменных  $x$  и  $y$ , так и сингулярный член с особенностью типа  $r^{-0.5}$ , которая присуща чисто упругим решениям [3]. Именно такой сингулярный элемент используется в расчетах, результаты которых обсуждаются в данной статье.

### 3. Оценка $T$ -напряжений и коэффициента биаксиальности

Компоненты напряжений и перемещений вблизи вершины трещины с учетом второго члена в разложении Вильямса для задачи о трещине нормального отрыва имеют вид [1, 5]:

$$\sigma_{xx} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + T + O(\sqrt{r}), \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + O(\sqrt{r}), \quad (2)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + O(\sqrt{r}),$$

$$U_x = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{2} (\kappa - 1) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{T(\kappa + 1)}{8G} (r \cos \theta + a) + O(r\sqrt{r}), \quad (3)$$

$$U_y = \frac{K}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{1}{2} (\kappa + 1) - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{T(\kappa - 3)}{8G} r \sin \theta + O(r\sqrt{r}).$$

Здесь:  $K$  — КИН в условиях нормального отрыва;  $(x, y)$  и  $(r, \theta)$  — декартовы и полярные координаты с началом (полусом) в вершине трещины соответственно;  $\kappa$  — параметр, характеризующий тип напряженного состояния ( $\kappa = 3 - 4\nu$  — для плоского деформированного состояния,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  — для плоского напряженного состояния);  $G$  и  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

В вычислительном аспекте важным является способ нахождения  $T$ -напряжений через компоненты или напряжений, или перемещений, определенные в узлах конечно-элементной сетки. Для расчета  $T$ -напряжений существует несколько подходов [7, 17]. Можно воспользоваться компонентой  $\sigma_{xx}$ . Так, если рассматривать берега трещины, когда  $\theta = -\pi$  или  $\theta = \pi$ , то из формулы (1) следует:  $T = \sigma_{xx}$ . Если исходить из значения  $\sigma_{xx}$  на верхней и нижней поверхностях трещины при  $\theta = \pm\pi$ , то  $T$ -напряжения найдутся по формуле:  $T = \frac{1}{2} [(\sigma_{xx})_{\theta=-\pi} + (\sigma_{xx})_{\theta=\pi}]$ .

Применив метод напряжений, из формул (1), (2) определим  $T$ -напряжения через компоненты действующих напряжений на продолжении трещины при  $\theta = 0$ :

$$T = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})_{\theta=0}. \quad (4)$$

Альтернативным подходом является вычисление  $T$ -напряжений на основе перемещений. Выражение для расчета  $T$ -напряжений методом перемещений следует из формулы (3) после несложных преобразований:

$$T = \frac{8G}{\kappa + 1} \frac{U_x(0) - U_x(x)}{r}, \quad (5)$$

где  $U_x(x)$  — перемещения вдоль оси  $Ox$  точек берега трещины, расположенных на расстоянии  $r$  от вершины,  $U_x(0)$  — перемещение вершины трещины вдоль оси  $Ox$ .

В процессе численного анализа  $T$ -напряжения, в отличие от теоретических значений, не остаются постоянными. Они зависят от метода расчета, от степени разреженности конечно-элементной сетки, от расстояния до вершины трещины. В связи с этим в данной работе предлагается брать в расчет средние значения  $T$ -напряжений, определенные в  $n$  точках вдоль берега трещины или на ее продолжении. Так, при расчете с помощью формулы  $T = \sigma_{xx}$  для среднего значения можно ввести выражение:

$$T_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_{xx}(x_i).$$

Точно так же на основании формул (4), (5) получим следующие средние значения для  $T$ -напряжений, записанные через компоненты напряжений и перемещений соответственно:

$$T_{SS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{xx}(x_i) - \sigma_{yy}(x_i)), \quad (6)$$

$$T_D = \frac{1}{n} \frac{8G}{\kappa+1} \sum_{i=1}^n (U_x(0) - U_x(x_i)) / r. \quad (7)$$

Расчет средних значений  $T$ -напряжений проведем на одной из модельных задач теории трещин — задаче о равномерном растяжении квадратной пластины с поперечной центральной трещиной. При нагружении пластины трещина раскрывается, а вершины трещины в процессе деформации перемещаются. Эта информация может быть использована для оценки параметров жесткости напряженного состояния у вершины трещины. Поэтому, наряду со средними  $T$ -напряжениями для описания состояния образца с трещиной предлагается вводить величину  $\beta = \Delta U E / (a \sigma)$ , где  $\Delta U$  — перемещение вершины при раскрытии трещины (оно легко определяется из натурального эксперимента),  $E$  — модуль упругости материала пластины,  $\sigma$  — напряжение, приложенное к краям пластины с координатами  $y = \pm H$ ,  $a$  — полудлина трещины. При натуральных измерениях можно применить, например, методы корреляции цифровых изображений или электронной цифровой спекл-интерферометрии. Они, как отмечается в [12], обеспечивают возможность получения практически неограниченных объемов экспериментальной информации в виде полей перемещений в зонах трещин. Кроме параметра  $\beta$ , будем рассматривать также безразмерные параметры

$$\beta_{SS} = \frac{T_{SS}}{\sigma}, \quad \beta_{DD} = \frac{T_D}{\sigma}, \quad (8)$$

которые в приведенном ниже вычислительном эксперименте сравним как между собой, так и с параметром  $\beta$ .

#### 4. Результаты численного эксперимента

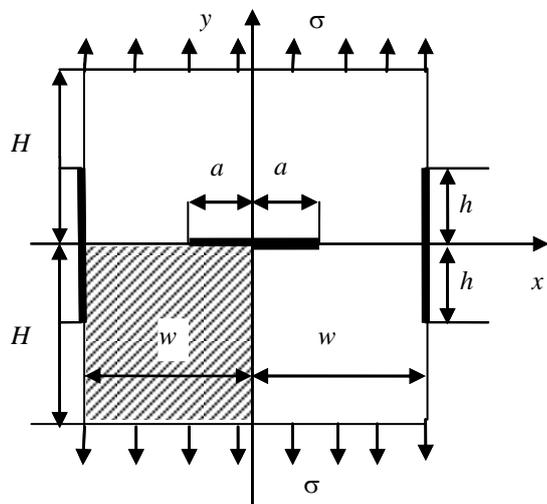


Рис. К заданию граничных условий при моделировании растяжения

В представленных ниже численных расчетах при оценке  $T$ -напряжений и коэффициента биаксиальности применяется комбинированный подход, основанный на использовании формул (6) и (7). рассматривается квадратная пластина с центральной трещиной, перпендикулярной оси  $Oy$ , при одноосном равномерном растяжении (Рис.). Ее характеристики: модуль упругости  $E = 10000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , ширина  $2w = 240$  мм, высота  $2H = 240$  мм, длина  $2a$ . Граничные условия формулируются следующим образом: полагается  $U_x = 0$  при  $x = 0$ ;  $U_y = 0$  при  $y = 0$  вне разреза; берега трещины свободны от напряжений. На сторонах пластины, параллельных трещине, действуют постоянные растягивающие напряжения интенсивностью  $\sigma = 100$  МПа. На части боковых сторон пластины, параллельных оси  $Oy$ , приняты условия жесткого защемления:  $U_x = 0$ ,  $U_y = 0$  (на рисунке места защемления выделены жирными

линиями), оставшиеся части боковых границ свободны от напряжений. Такие граничные условия могут иметь место в задаче об усилении пластины с трещиной с помощью тонкого упругого покрытия или стрингера. Конечно, здесь изучается не реальная конструкция, а ее идеализированная модель, однако граничные условия на боковой грани при  $E_1/E \gg 1$  будут выполнены приближенно, а условия защемления реализуются при  $E_1 \rightarrow \infty$ , где  $E_1$  — модуль упругости подкрепляющего элемента.

Изучается плоское напряженное состояние пластины. Ввиду симметрии рассматривается четверть расчетной области (на рисунке она заштрихована). Исследуемая область разбивается на 480 прямоугольных элементов. В окрестности вершины трещины в качестве конечных используются 2 сингулярных (графовых) элемента размером  $0,4 \times 0,2$  мм. Во всех других элементах применяется линейная аппроксимация деформаций. При определении средних значений  $T$ -напряжения вычисляются в  $n$  точках

вдоль берега трещины (или на ее продолжении) на участке длиной  $d = 0,2a$ , отсчитываемом от вершины трещины. Шаг разбиения во всех расчетах равняется 0,2 мм.

**Пример 1.** С целью верификации подхода рассмотрим сначала одноосно растягиваемую квадратную пластину с трещиной при отсутствии закрепления на боковых сторонах ( $h=0$ ). Расчеты проведем в зависимости от отношения длины трещины  $2a$  к ширине пластины  $2w$  (см. Рис.). В таблице 1 приведены значения параметра  $\beta$ , безразмерных параметров, вычисленных по формулам (6)–(8), а также даются в сравнении расчетные данные. Представленные результаты показывают, что при  $h=0$  параметр  $\beta$  близок по величине к значениям параметров  $\beta_{SS} = T_{SS}/\sigma$ ,  $\beta_{DD} = T_D/\sigma$ . Максимальная погрешность в методе напряжений составляет примерно 1%, а в методе перемещений она не превосходит 4%. Значимость параметра  $\beta$  в том, что эта характеристика легко может быть найдена из натурального эксперимента на основании только одного замера.

Таблица 1. Сравнение безразмерных  $T$ -напряжений ( $\beta_{SS}$ ,  $\beta_{DD}$ ) с параметром  $\beta$

Параметр \ $a/w$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\beta$	-1,052	-1,151	-1,288	-1,444	-1,669	-1,975	-2,381
$\beta_{SS}$	-1,039	-1,137	-1,275	-1,451	-1,672	-1,960	-2,357
$\frac{\beta_{SS}}{\beta}$	0,988	0,988	0,989	1,005	1,002	0,992	0,989
$\beta_{DD}$	-1,031	-1,130	-1,258	-1,403	-1,604	-1,891	-2,345
$\frac{\beta_{DD}}{\beta}$	0,980	0,982	0,977	0,972	0,961	0,957	0,985
$\frac{\beta_{SS}}{\beta_{DD}}$	1,008	1,006	1,014	1,034	1,042	1,036	1,005

Оценим безразмерный параметр  $B_{ex} = \beta/F$ . Значения безразмерного КИН —  $F$ , при различных отношениях  $a/w$  взяты из работы [27]. Они вычислены с помощью энергетического инвариантного интеграла Черепанова–Райса и хорошо согласуются с результатами, полученными Исидой с помощью рядов Лорана [27, 30]. В таблице 2 представлены в сравнении экспериментальный —  $B_{ex}$ , и теоретический —  $B_t$ , параметры биаксиальности для случая одноосно растягиваемой пластины при  $H = w$ . Участвующие в расчетах значения  $\beta$  взяты из таблицы 1. В качестве параметра биаксиальности, который будем считать теоретическим, для квадратной пластины примем величину, найденную по формуле:  $B_t = -(1 + 0,085\lambda)$  [21]. Здесь  $\lambda = a/w$ .

Таблица 2. Сравнение безразмерных параметров биаксиальности при одноосном растяжении квадратной пластины

Параметр \ $a/w$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$B_{ex}$	-0,997	-1,025	-1,040	-1,064	-1,101	-1,146
$B_t$	-1,017	-1,025	-1,034	-1,043	-1,051	-1,060
$\frac{B_{ex}}{B_t}$	0,980	1,000	1,006	1,020	1,048	1,081

Как видно из таблицы 2, параметр  $B_{ex} = \beta/F$  достаточно близок к теоретическому значению коэффициента биаксиальности  $B_t$ , исключение составляют очень длинные трещины. Поэтому величину  $\beta/F$  назовем экспериментальным коэффициентом биаксиальности  $B_{ex}$ . Расхождение между  $B_{ex}$  и  $B_t$  при больших значениях отношения  $a/w$ , возможно, объясняется, во-первых, применением грубой сетки, а во-вторых, сохранением только двух слагаемых в разложении Вильямса.

**Пример 2.** Рассмотрим теперь пластину с закреплением участков на боковых сторонах. Размер зон закрепления определим величиной  $h/H$  (см. Рис.).

Применим комбинированный метод напряжений и перемещений и наряду с  $\beta_{SS}$  и  $\beta_{DD}$  введем коэффициенты биаксиальности вида:  $B_S = T_{SS}/(F\sigma)$  и  $B_D = T_D/(F_D\sigma)$ , а также их полусумму:  $B_m = 0,5(B_S + B_D)$ . Эти величины сравним с расчетным параметром  $B_{ex}$ . Для определения КИН  $F_D$

воспользуемся процедурой экстраполяции значений вертикальных перемещений точек на противоположных берегах трещины при приближении к ее вершине [28, 29]. Эти значения отличаются от соответствующих значений КИН, полученных в [32] методом граничных коллокаций, не более чем на 3%.

В таблице 3 представлены результаты расчетов параметра  $\beta$ , КИН, вычисленного с помощью энергетического  $J$ -интеграла [27], экспериментального коэффициента биаксиальности  $B_{ex}$  и усредненного коэффициента биаксиальности  $B_m$  в зависимости от размера зон закрепления, а также оценивается погрешность коэффициента биаксиальности, найденного на основании предлагаемых подходов. Видно, что она не превышает 5%.

Таблица 3. Сравнение безразмерных параметров биаксиальности для квадратной пластины при отсутствии смещений на боковой грани в зависимости от размера зон закрепления  $h/H$

$h/H = 0,25$							
Параметры \ $a/w$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\beta$	-0,686	-0,728	-0,776	-0,809	-0,831	-0,825	-0,787
$F$	0,963	1,0147	1,107	1,146	1,235	1,311	1,332
$B_{ex}$	-0,712	-0,718	-0,701	-0,706	-0,673	-0,629	-0,591
$B_m$	-0,718	-0,716	-0,701	-0,688	-0,654	-0,607	-0,567
$\frac{B_{ex}}{B_m}$	0,992	1,003	1,000	1,026	1,029	1,036	1,042
$h/H = 0,5$							
$\beta$	-0,726	-0,783	-0,810	-0,843	-0,850	-0,812	-0,705
$F$	0,961	0,997	1,050	1,099	1,133	1,119	1,022
$B_{ex}$	-0,755	-0,785	-0,771	-0,767	-0,750	-0,726	-0,689
$B_m$	-0,754	-0,784	-0,779	-0,756	-0,741	-0,712	-0,671
$\frac{B_{ex}}{B_m}$	1,001	1,001	1,990	1,014	1,012	1,019	1,027
$h/H = 0,75$							
$\beta$	-0,783	-0,817	-0,845	-0,855	-0,837	-0,766	-0,629
$F$	0,981	0,995	1,031	1,049	1,029	0,967	0,832
$B_{ex}$	-0,798	-0,821	-0,819	-0,815	-0,813	-0,792	-0,756
$B_m$	-0,800	-0,810	-0,811	-0,799	-0,792	-0,767	-0,728
$\frac{B_{ex}}{B_m}$	0,998	1,013	1,010	1,019	1,027	1,032	1,038
$h/H = 1$							
$\beta$	-0,779	-0,792	-0,798	-0,777	-0,728	-0,638	-0,497
$F$	0,915	0,929	0,924	0,908	0,858	0,779	0,631
$B_{ex}$	-0,851	-0,852	-0,864	-0,856	-0,848	-0,816	-0,788
$B_m$	-0,838	-0,837	-0,845	-0,830	-0,819	-0,784	-0,752
$\frac{B_{ex}}{B_m}$	1,016	1,018	1,022	1,031	1,036	1,041	1,048

Заметим, что безразмерные параметры, представленные в таблице, могут быть получены на основе лишь экспериментальных данных, причем при нахождении  $B_{ex}$  требуется измерение на всей длине трещины, а при нахождении  $B_m$  — в ряде точек по ее длине. Таким образом, если определить КИН методом экстраполяции вертикальных перемещений, то после одного натурного замера, достаточного для установления параметра  $\beta$ , с помощью только экспериментальных величин можно представить полную характеристику параметров жесткости напряженного состояния у вершины трещины, в частности, по параметру  $\beta$  (при известном значении КИН) оценить значения  $T$ -напряжений.

## 5. Заключение

В результате численного моделирования, проведенного в некотором диапазоне изменения геометрических характеристик квадратной пластины с центральной трещиной, установлена связь между параметрами, оказывающими существенное влияние на процесс распространения трещины. Показана возможность приближенной оценки  $T$ -напряжений на основе замера только величины перемещения между вершинами трещины при ее раскрытии. Указанное обстоятельство позволяет ввести понятие экспериментального коэффициента биаксиальности, значения которого (за исключением достаточно длинных трещин) хорошо согласуются с известными теоретическими значениями коэффициента биаксиальности.

Для определения  $T$ -напряжений и коэффициента биаксиальности наряду с численными методами широко используются экспериментальные методы (метод фотоупругих покрытий, сеток, муара, тензометрии, фазовой интерференции, дифракционных решеток и другие). Они дают возможность получить достаточно большой объем информации о распределении перемещений, деформаций и напряжений в образце с трещиной. Сравнение результатов, найденных путем численного моделирования и натурного эксперимента, обеспечивает более достоверный результат при оценке поля напряжений у вершины трещины. Конечно, здесь следует иметь в виду, что реальная геометрия трещины в натурном эксперименте отличается от модели математического разреза, принятого в теории упругости. В то же время предлагаемый в работе подход, основанный на проведении численного эксперимента, может способствовать организации натурных испытаний, в частности, указать места установки датчиков, сформировать параметры, описывающие влияние трещины, а также поможет проанализировать результаты натурного эксперимента.

## Литература

1. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack // J. Appl. Mech. 1957. Vol. 24. P. 109-114. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140729-122058948>
2. Leevers P.S., Radon J.C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. 1982. Vol. 19. P. 311-325. <https://doi.org/10.1007/BF00012486>
3. Матвиенко Ю.Г. Модели и критерии механики разрушения. М: Физматлит, 2006. 328 с.
4. Larsson S.G., Carlsson A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // J. Mech. Phys. Solid. 1973. Vol. 21. P. 263-277. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0)
5. Eftis J., Subramonian N., Liebowitz H. Biaxial load effects on the crack border elastic strain energy and strain energy rate // Eng. Fract. Mech. 1977. Vol. 9. P. 753-764. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(77\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(77)90001-7)
6. Rice J.R. Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity // J. Mech. Phys. Solid. 1974. Vol. 22. P. 17-26. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(74\)90010-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(74)90010-6)
7. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of  $T$ -stress and its effects in fracture mechanics // Eng. Fract. Mech. 2015. Vol. 134. P. 218-241. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>
8. Матвиенко Ю.Г. Два подхода к учету несингулярных  $T$ -напряжений в критериях механики разрушения тел с вырезами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 5. С. 104-110. (English version <https://doi.org/10.3103/S105261881104011X>)
9. Матвиенко Ю.Г. Несингулярные  $T$ -напряжения в проблемах двухпараметрической механики разрушения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2012. Т. 78, № 2. С. 51-58.
10. Матвиенко Ю.Г., Починков Р.А. Влияние несингулярных компонентов  $T$ -напряжений на зоны пластической деформации у вершины трещины нормального отрыва // Деформация и разрушение материалов. 2012. № 3. С. 6-14. (English version <https://doi.org/10.1134/S0036029513040095>)
11. Литвинов И.А., Матвиенко Ю.Г., Разумовский И.А. О точности определения несингулярных компонент поля напряжений в вершине трещины с применением метода экстраполяции // Машиностроение и инженерное образование. 2014. № 4. С. 43-51.
12. Чернятин А.С., Разумовский И.А., Матвиенко Ю.Г. Оценка размеров зоны неупругого деформирования у вершины трещины на основе анализа полей перемещений // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2016. Т. 82, № 12. С. 45-51.
13. Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Berto F.  $T$ -stress effects on fatigue crack growth – Theory and experiment // Eng. Fract. Mech. 2018. Vol. 187. P. 103-114. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.10.025>
14. Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and  $T$ -stresses // Eng. Fract. Mech. 2017. Vol. 179. P. 348-374. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.029>
15. Буледруа О., Элазизи А., Хадж Мельяни М., Плювинаж Ж., Матвиенко Ю.Г. Оценка  $T$ -напряжений в образце в окрестности надреза V-образной формы с использованием двухпараметрической модели // ПИМТФ. 2017. № 3. С. 198-209. <https://doi.org/10.15372/PMTF20170320>
16. Matvienko Yu.G., Nikishkov G.P. Two-parameter J-A concept in connection with crack-tip constraint // Theor. Appl. Fract. Mech. 2017. Vol. 92. P. 306-317. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.04.007>
17. Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of  $T$ -stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes // Физ. мезомех. 2018. Т. 21, № 1. С. 30-40. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-11005>

18. Chernyatin A.S., Lopez-Crespo P., Moreno B., Matvienko Yu.G. Multi-approach study of crack-tip mechanics on aluminium 2024 alloy // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2018. Vol. 98. P. 38-47. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.09.007>
19. Yang J. A two-parameter criterion for predicting the fracture location along a surface crack // *Eng. Fract. Mech.* 2018. Vol. 188. P. 70-79. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.07.022>
20. Manafi Farid H., Fakoor M. Mixed mode I/II fracture criterion for arbitrary cracks in orthotropic materials considering  $T$ -stress effects // *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2019. Vol. 99. P. 147-160. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.11.015>
21. Кузовков Е.Г. Конфигурация и параметры графовой модели упругого тела // *Проблемы прочности.* 1986. № 4. С. 98-103. (English version <https://doi.org/10.1007/BF01524081>)
22. Кузовков Е.Г. Уравнения состояния графовой модели упругого тела // *Проблемы прочности.* 1986. № 5. С. 112-117. (English version <https://doi.org/10.1007/BF01522789>)
23. Kuzovkov E.G. Axisymmetric graph model of an elastic solid // *Проблемы прочности.* 1996. № 6. С. 83-103. <https://doi.org/10.1007/BF02209319>
24. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругой среды в декартовой системе координат // *Проблемы прочности.* 1993. № 12. С. 60-70. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00774638>)
25. Кузовков Е.Г. Графовая модель упругого тела в смешанных переменных // *Проблемы прочности.* 1986. № 6. С. 88-92. (English version <https://doi.org/10.1007/BF01523964>)
26. Кузовков Е.Г., Тырымов А.А. Графовые модели в плоской и осесимметричной задачах теории упругости. Волгоград: ВолгГТУ, 2010. 128 с.
27. Тырымов А.А. Сингулярный элемент графовой модели упругой среды в декартовой системе координат // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2011. Т. 4, № 4. С. 125-136. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47>
28. Тырымов А.А. Численное моделирование и расчёт податливости образца с центральной трещиной на основе графовой модели упругого тела // *Труды МАИ.* 2014. Вып. 77. <http://www.mai.ru/upload/iblock/e70/e7020711c2e38b9154c74d87fb727ed5.pdf>
29. Морозов Е.М., Муйзменек А.Ю., Шадский А.С. ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. М.: ЛЕНАНД, 2008. 456 с.
30. O'Dowd N.P., Shih C.F. Two-parameter fracture mechanics: Theory and application // *Fracture mechanics* / Ed. J. Landes, D. McCabe, J. Boulet. ASTM STP, 1994. P. 21-47. <https://doi.org/10.1520/STP13698s>
31. Isida M. Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions // *Int. J. Fract. Mech.* 1971. Vol. 7. P. 301-316. <https://doi.org/10.1007/BF00184306>
32. Chen Y.-Z., Chen Y.-H. A mixed boundary problem for a finite internally cracked plate // *Eng. Fract. Mech.* 1981. Vol. 14. P. 741-751. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(81\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(81)90086-2)

## References

1. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.*, 1957, vol. 24, pp. 109-114. <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20140729-122058948>
2. Leevers P.S., Radon J.C. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *Int. J. Fract.*, 1982, vol. 19, pp. 311-325. <https://doi.org/10.1007/BF00012486>
3. Matvienko Yu.G. *Modeli i kriterii mekhaniki razrusheniya* [Models and criteria of fracture mechanics]. Moscow: Fizmatlit, 2006. 328 p.
4. Larsson S.G., Carlsson A.J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1973, vol. 21, pp. 263-277. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(73\)90024-0](https://doi.org/10.1016/0022-5096(73)90024-0)
5. Eftis J., Subramonian N., Liebowitz H. Biaxial load effects on the crack border elastic strain energy and strain energy rate. *Eng. Fract. Mech.*, 1977, vol. 9, pp. 753-764. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(77\)90001-7](https://doi.org/10.1016/0013-7944(77)90001-7)
6. Rice J.R. Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1974, vol. 22, pp. 17-26. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(74\)90010-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(74)90010-6)
7. Gupta M., Alderliesten R.C., Benedictus R. A review of  $T$ -stress and its effects in fracture mechanics. *Eng. Fract. Mech.*, 2015, vol. 134, pp. 218-241. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>
8. Matvienko Yu.G. Two approaches to taking nonsingular  $T$ -stresses into account in the criteria of fracture mechanics for bodies with notches. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2011, vol. 40, pp. 494-498. <https://doi.org/10.3103/S105261881104011X>
9. Matvienko Yu.G. Nonsingular  $T$ -stress in problems of two-parameter fracture mechanics. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Industrial Laboratory. Diagnostics of materials*, 2012, vol. 78, no. 2, pp. 51-58.
10. Matvienko Yu.G., Pochinkov P.A. Effect of nonsingular  $T$ -stress components on the plastic-deformation zones near the tip of a mode I crack. *Russ. Metall.*, 2013, vol. 2013, pp. 262-271. <https://doi.org/10.1134/S0036029513040095>
11. Litvinov I.A., Matvienko Yu.G., Razumovsky I.A. On the accuracy of determination of nonsingular component in stress field at crack tip using extrapolation method. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie*, 2014, no. 4, pp. 43-51.
12. Chernyatin A.S., Razumovsky I.A., Matvienko Yu.G. Evaluation of the size of inelastic strain zone at the top of crack based on analysis of the displacement fields. *Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov – Industrial laboratory. Diagnostics of materials*, 2016, vol. 82, no.12, pp. 45-51.
13. Ayatollahi M.R., Rashidi Moghaddam M., Berto F.  $T$ -stress effects on fatigue crack growth – Theory and experiment. *Eng. Fract. Mech.*, 2018, vol. 187, pp. 103-114. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.10.025>
14. Pisarev V.S., Matvienko Y.G., Eleonsky S.I., Odintsev I.N. Combining the crack compliance method and speckle interferometry data for determination of stress intensity factors and  $T$ -stresses. *Eng. Fract. Mech.*, 2017, vol. 179, pp. 348-374. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.04.029>
15. Bouledroua O., Elazzizi A., Hadj Meliani M., Pluvinage G., Matvienko Yu.G.  $T$ -stress estimation by the two-parameter approach for a specimen with a V-shaped notch. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2017, vol. 58, pp. 546-555. <https://doi.org/10.1134/s0021894417030208>

16. Matvienko Yu.G., Nikishkov G.P. Two-parameter J-A concept in connection with crack-tip constraint. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2017, vol. 92, pp. 306-317. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.04.007>
17. Acanfora M., Gallo P., Razavi S.M.J., Ayatollahi M.R., Berto F. Numerical evaluation of  $T$ -stress under mixed mode loading through the use of coarse meshes. *Phys. Mesomech.*, 2018, vol. 21, pp. 124-134. <https://doi.org/10.1134/S1029959918020054>
18. Chernyatin A.S., Lopez-Crespo P., Moreno B., Matvienko Yu.G. Multi-approach studi of crack-tip mechanics on aluminium 2024 alloy. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2018, vol. 98, pp. 38-47. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.09.007>
19. Yang J. A two-parameter criterion for predicting the fracture location along a surface crack. *Eng. Fract. Mech.*, 2018, vol. 188, pp. 70-79. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2017.07.022>
20. Manafi Farid H., Fakoор M. Mixed mode I/II fracture criterion for arbitrary cracks in orthotropic materials considering  $T$ -stress effects. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 2019, vol. 99, pp. 147-160. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2018.11.015>
21. Kuzovkov E.G. Configuration and parameters of the graph models of an elastic body. *Strength Mater.*, 1986, vol. 18, pp. 528-534. <https://doi.org/10.1007/BF01524081>
22. Kuzovkov E.G. Eguations of state the graph model of an elastic solid. *Strength Mater.*, 1986, vol. 18, pp. 698-704. <https://doi.org/10.1007/BF01522789>
23. Kuzovkov E.G. Axisymmetric graph model of an elastic solid. *Strength Mater.*, 1996, vol. 28, pp. 470-485. <https://doi.org/10.1007/BF02209319>
24. Kuzovkov E.G. Graph model of elastic medium in the cartesian system of coordinates. *Strength Mater.*, 1993, vol. 25, pp. 906-914. <https://doi.org/10.1007/BF00774638>
25. Kuzovkov E.G. Graph model of an elastic body in mixed variables. *Strength Mater.*, 1986, vol. 18, pp. 807-813. <https://doi.org/10.1007/BF01523964>
26. Kuzovkov E.G., Tyrymov A.A. *Grafovyye modeli v ploskoy i osesimmetrichnoy zadachakh teorii uprugosti* [Graph model in plane and axisymmetric problems of the theory of elasticity]. Volgograd, VolgGTU, 2010. 128 p.
27. Tyrymov A.A. A singular element of graph model of an elastic medium in a cartesian coordinate system. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 4, pp. 125-136. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.4.47>
28. Tyrymov A.A. Chislennoye modelirovaniye i raschët podatlivosti obraztsa s tsentral'noy treshchinoy na osnove grafovoy modeli uprugogo tela [Numerical simulation and calculation of the sensitivity of a sample with a central crack based on the graph model of an elastic body]. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. <http://www.mai.ru/upload/iblock/e70/e7020711c2e38b9154c74d87fb727ed5.pdf>
29. Morozov E.M., Muyzemnek A.Yu., Shadskiy A.S. *ANSYS v rukakh inzhenera: Mekhanika razrusheniya* [ANSYS in the hands of the engineer: Fracture mechanics]. Moscow, LENAND, 2008. 456 p.
30. O'Dowd N.P., Shih C.F. Two-parameter facture mechanics: Theory and application. *Fracture mechanics*, ed. J. Landes, D. McCabe, J. Boulet. ASTM STP, 1994. P. 21-47. <https://doi.org/10.1520/STP13698s>
31. Isida M. Effect of width and length on stress intensity factors of internally cracked plates under various boundary conditions. *Int. J. Fract. Mech.*, 1971, vol. 7, pp. 301-316. <https://doi.org/10.1007/BF00184306>
32. Chen Y.-Z., Chen Y.-H. A mixed boundary problem for a finite internally cracked plate. *Eng. Fract. Mech.*, 1981, vol. 14, pp. 741-751. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(81\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(81)90086-2)

Поступила в редакцию 17.09.2020; после доработки 20.10.2020; принята к опубликованию 22.10.2020