

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.28](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.28)

УДК 539.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ВЯЗКОУРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

На базе пошаговой по времени процедуры построена численно-аналитическая модель неизоотермического вязкоупругопластического поведения перекрестно-армированного материала. Компоненты композиции изотропны; их вязкоупругое деформирование описывается моделью тела Максвелла–Больцмана, а мгновенное неупругое поведение – соотношениями теории упругопластического деформирования с изотропным упрочнением. При этом функция нагружения и материальные константы зависят от температуры. Определены условия вязкоупругого деформирования, начала разгрузки, нейтрального и активного вязкоупругопластического нагружения термочувствительных материалов композиции. Учитывается связанность механического и теплофизического поведения композитного материала. Приведены структурные соотношения теплофизической составляющей. Разработанная математическая модель ориентирована на использование явных схем численного интегрирования вязкоупругопластической и теплофизической задач. Сформулирована начально-краевая задача неизоотермического вязкоупругопластического изгибного деформирования волокнистых пластин. Плохое сопротивление таких тонкостенных конструкций поперечному сдвигу описывается в рамках теории Амбарцумяна. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. В поперечном направлении температура аппроксимируется полиномом второго порядка. Для приведения трехмерной задачи теплопроводности к двумерным соотношениям применен метод дополнительных граничных условий. Исследован динамический изгиб плоско-перекрестно армированной стеклопластиковой пластины под действием воздушной взрывной волны. Показано, что при отсутствии внешнего теплового воздействия в процессе осцилляций такая конструкция нагревается всего на 2–3°C. В таких случаях можно обоснованно пренебрегать температурным влиянием. При наличии же интенсивного теплового нагружения конструкции термочувствительность материалов композиции необходимо учитывать. Продемонстрировано, что при неоднородном по толщине температурном поле форма и величина остаточного прогиба пластины существенно зависят от того, к какой из ее лицевых поверхностей прикладывается внешняя динамическая нагрузка.

Ключевые слова: гибкие пластины, перекрестное армирование, неизоотермическое деформирование, вязкоупругопластичность, динамическое нагружение, модель тела Максвелла–Больцмана, теория Амбарцумяна, явная численная схема

MODELING OF NON-ISOTHERMIC VISCOELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF FLEXIBLE REINFORCED PLATES

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Based on a step-by-step procedure over time, a numerical-analytical model of the nonisothermal viscoelastic-plastic behavior of crisscrossed-reinforced material is constructed. The components of the composition are isotropic; their viscoelastic deformation is described by the Maxwell – Boltzmann model of the body, and instantaneous inelastic behavior is described by the relations of the theory of elastoplastic deformation with isotropic hardening. In this case, the temperature dependence of the loading function and material constants is taken into account. The conditions of the viscoelastic deformation, the beginning of unloading, neutral and active viscoelastic-plastic loading of the thermosensitive materials of the composition are formulated. Relationship between the mechanical and thermophysical characteristics of the composite material is taken into account. The structural relationships of the thermophysical component of the problem are presented. The developed mathematical model is focused on the use of explicit schemes for the numerical integration of viscoelastic-plastic and thermophysical problems. The initial-boundary problem of nonisothermal viscoelastic-plastic bending deformation of fibrous plates is formulated. The poor resistance of such thin-walled constructions to transverse shear is described in the framework of Ambartsumyan's theory. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. In the transverse direction, the temperature is approximated by a second-order polynomial. To reduce the three-dimensional heat conduction problem to two-dimensional relations, the method of additional boundary conditions is used. The dynamic bending of a flat-crisscrossed-reinforced fiberglass plate under the influence of an air blast wave is investigated. It is shown that in the absence of external thermal heating in the process of oscillations, this structure heats by only 2–3°C. In such cases, the calculation can reasonably be carried out without taking into account the temperature effect. In the presence of intense thermal loading of the structure, the heat sensitivity of the materials of the composition must be taken into account. It has been demonstrated that in the presence of a temperature field inhomogeneous over the thickness of the plate, the shape and magnitude of the residual deflection significantly depend on which face surface an external dynamic load is applied to.

Key words: flexible plates, crisscrossed reinforcement, non-isothermal deformation, viscoelastic plasticity, dynamic loading, Maxwell-Boltzmann body model, Ambartsumyan theory, explicit numerical scheme

1. Введение

Элементы конструкций из композиционных материалов (КМ) находят широкое применение в современных изделиях [1–9], часто подвергающихся интенсивному силовому и тепловому воздействиям [6, 7, 9–11], которые вызывают неупругое и неизоотермическое деформирование компонентов композиции. Следовательно, проблема моделирования термопластического поведения тонкостенных армированных конструкций актуальна и, более того, в данное время находится на стадии становления [4, 12].

Упругопластическое деформирование дисперсно-упрочненных материалов моделировалось в [13, 14]; такое же поведение волокнистых КМ изучалось в [15, 16], а вязкоупругопластическое деформирование — в [17]. Известно, что при значительном изменении температуры компоненты композиции могут существенно изменять свои физико-механические характеристики [9, 18–20]. Это может отразиться на пластическом деформировании армированных тонкостенных конструкций при действии на них высокоинтенсивных механических нагрузок. Некоторые варианты теории неизоэтермического упругопластического деформирования однородных материалов предложены в [21], однако вязкоупругие свойства материалов здесь не рассматривались. Поэтому модели неупругого поведения материалов, разработанные в [21], могут применяться только при расчетах квазистатического кратковременного деформирования конструкций. Вязкоупругие свойства материала при его пластическом деформировании включались в расчет в [22], но он базировался на соотношениях наследственной теории, и тепловое воздействие не принималось во внимание. В работе [23] показано, что при исследовании динамического поведения тонкостенных конструкций вязкоупругие свойства материала целесообразно описывать не интегральными, как в [22], а дифференциальными зависимостями.

В силу указанных обстоятельств актуальна и проблема моделирования неизоэтермического вязкоупругопластического деформирования армированных тонкостенных конструкций. При этом следует учитывать связанность температурной и механической составляющих такой задачи.

Возможное слабое сопротивление волокнистых пластин и оболочек поперечному сдвигу традиционно моделируют в рамках теорий Рейсснера [6, 7, 16, 24–27] или Амбарцумяна–Редди [16, 17, 28–31]. Реже прибегают к теориям более высоких порядков [6, 32], основанным, например, на гипотезе ломаной линии.

Для интегрирования нелинейных динамических задач, как правило, используют явные численные схемы [16, 17, 26, 33] или неявные методы Ньюмарка [11, 34, 35].

Данная работа посвящена моделированию в рамках теории Амбарцумяна–Редди неизоэтермического вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин со слабым сопротивлением поперечным сдвигам. Численное интегрирование возникающих при этом нелинейных начально-краевых задач предполагается осуществлять на основе явных схем.

2. Моделирование неизоэтермического вязкоупругопластического деформирования КМ методом шагов по времени

Как и в работах [16, 17, 21], положим, что деформации ϵ_{ij} изотропного компонента композиции малы. Это позволяет представить их в виде суммы вязкоупругих — e_{ij} , пластических — p_{ij} (несжимаемых), и температурных — $\delta_{ij}\epsilon_\Theta$, составляющих. Поэтому для скоростей этих деформаций имеет место разложение:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \dot{p}_{ij} + \delta_{ij}\dot{\epsilon}_\Theta \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad p_{ii} = 0, \quad \dot{\epsilon}_\Theta = \alpha\dot{\Theta}, \quad (1)$$

где Θ — температура материала, α — коэффициент линейного температурного расширения, δ_{ij} — символ Кронекера, точка над символом обозначает производную по времени t .

Вязкоупругое деформирование компонента композиции опишем моделью тела Максвелла–Больцмана [17, 36]:

$$\dot{\bar{e}}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta}, \quad \dot{e}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} + \frac{\sigma_0}{3\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}e_0, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{ii}}{3}, \quad e_0 = \frac{e_{ii}}{3} = \epsilon_0 - \epsilon_\Theta, \quad \epsilon_0 = \frac{\epsilon_{ii}}{3}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (3)$$

Здесь: σ_{ij} — тензор напряжений; s_{ij} , \bar{e}_{ij} — девиаторы напряжений и вязкоупругих деформаций; σ_0 , ϵ_0 — средние напряжение и деформация; E , ν — мгновенные модуль Юнга и коэффициент Пуассона; G — мгновенный модуль сдвига; K — мгновенный объемный модуль упругости; η — коэффициент линейной вязкости при сдвиге; μ — коэффициент объемной вязкости. В случае термочувствительного материала величины α , G , K , E , ν , η и μ являются функциями температуры материала Θ .

Пластическое поведение материала опишем в рамках теории течения с изотропным упрочнением; при этом поверхность нагружения $f = 0$ соответствует условию текучести Мизеса [21, 33]:

$$f(T, \chi, \Theta) \equiv T^2 - \tau_s^2(\chi, \Theta) = 0, \quad (4)$$

$$T = \sqrt{(s_{ij}s_{ij})/2}, \quad \chi = \int_{t_0}^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}} dt, \quad (5)$$

где τ_s — предел текучести при чистом сдвиге; χ — параметр Оджвиста; t_0 — начальный момент времени. Исходная поверхность нагружения $T = \tau_s(\Theta) \equiv \tau_s(0, \Theta)$ — это обычный предел текучести, который зависит от температуры Θ [18–20].

Согласно ассоциированному закону пластического течения в случае активного нагружения с учетом (4) и (5) получим [17, 21, 33]:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s^2(\chi, \Theta)} s_{ml} \dot{p}_{ml} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

В теории изотермического упругопластического деформирования с изотропным упрочнением мощность пластических деформаций $W_p = s_{ml} \dot{p}_{ml}$ выражается через мощность деформаций формоизменения: $W = s_{ml} \dot{\bar{\epsilon}}_{ml}$, то есть имеет место связь [33]:

$$W_p = \kappa W \quad (s_{ml} \dot{p}_{ml} = \kappa s_{ml} \dot{\bar{\epsilon}}_{ml} = \kappa s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml}), \quad (7)$$

$$\bar{\epsilon}_{ml} = \epsilon_{ml} - \delta_{ml} \epsilon_0 \quad (m, l = 1, 2, 3), \quad (8)$$

где $\kappa = \kappa(\chi)$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметра упрочнения χ и выражающийся через модуль сдвига G и касательный модуль материала \bar{G} на диаграмме чистого сдвига. Равенство (7) предполагается выполняющимся при любых видах напряженно-деформированного состояния (НДС) материала, пластические свойства которого не чувствительны к изменению температуры. Так, при чистом сдвиге энергетическое уравнение (7) при учете (3) и (8) принимает вид:

$$\tau \dot{\gamma}_p = \kappa(\chi) \tau \dot{\gamma} \quad (\dot{\gamma}_p = \kappa(\chi) \dot{\gamma}). \quad (9)$$

Здесь:

$$\chi = \int_{t_0}^t \dot{\gamma}_p dt = \int_0^{\gamma_p} d\gamma_p = \gamma_p; \quad (10)$$

τ — касательное напряжение; γ — полная угловая деформация при чистом сдвиге; γ_p — пластическая составляющая деформации γ . Равенство (9) справедливо при выполнении (4), где $T = \tau$ и $\partial \tau_s / \partial \Theta \equiv 0$.

Поскольку диаграмма мгновенного пластического деформирования при чистом сдвиге зависит от температуры Θ , то в силу (4)

$$\tau = \tau_s(\chi, \Theta) = \tau_s(\gamma_p, \Theta), \quad (11)$$

где χ выражается формулой (10). Используя равенство (11), выведем энергетическое уравнение, аналогичное (9). С этой целью продифференцируем (11) по времени t , тогда в случае активного нагружения получим:

$$\dot{\tau} = \tau_\chi \dot{\chi} + \tau_\Theta \dot{\Theta} = \tau_\chi \dot{\gamma}_p + \tau_\Theta \dot{\Theta}, \quad (12)$$

$$\tau_\chi \equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial \chi} = \frac{\partial \tau_s}{\partial \gamma_p} \equiv \bar{G}, \quad \tau_\Theta \equiv \frac{\partial \tau_s}{\partial \Theta}. \quad (13)$$

При этом $\tau_\chi = \tau_\chi(\gamma_p, \Theta)$, $\tau_\Theta = \tau_\Theta(\gamma_p, \Theta)$ — известные экспериментальные зависимости, $\tau_\chi \equiv \bar{G}$ — касательный модуль на диаграмме деформирования $\tau - \gamma_p$ при фиксированной температуре Θ .

Приращение касательного напряжения τ при чистом сдвиге, согласно (2), сопровождается изменением вязкоупругой угловой деформации $\gamma_e = \gamma - \gamma_p$:

$$\frac{\dot{\gamma}_e}{2} = \frac{\dot{\tau}}{2G} + \frac{\tau}{2\eta} \Rightarrow \dot{\tau} = G \dot{\gamma}_e - \frac{G}{\eta} \tau. \quad (14)$$

Подставим последнее выражение из (14) в левую часть (12), тогда будем иметь:

$$G(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_p) - \frac{G}{\eta} \tau = \tau_\chi \dot{\gamma}_p + \tau_\Theta \dot{\Theta} \Rightarrow \dot{\gamma}_p = \frac{\dot{\gamma}}{1+g} - \frac{\tau_\Theta \dot{\Theta}}{G(1+g)} - \frac{\tau}{\eta(1+g)}, \quad (15)$$

где

$$g \equiv \frac{\bar{G}}{G} = \frac{\tau_\chi}{G}. \quad (16)$$

Умножив второе соотношение из (15) на τ , получим энергетическое равенство:

$$\tau \dot{\gamma}_p = \frac{\tau \dot{\gamma}}{1+g} - \frac{\tau_\Theta \tau \dot{\Theta}}{G(1+g)} - \frac{\tau^2}{\eta(1+g)} \Rightarrow W_p = \frac{W}{1+g} - \frac{\tau_\Theta \tau \dot{\Theta}}{G(1+g)} - \frac{\tau^2}{\eta(1+g)}. \quad (17)$$

Если при пластическом деформировании материал не чувствителен к изменению температуры ($\tau_\Theta \equiv 0$) и вязкие свойства при упругом деформировании не учитываются ($\eta \rightarrow \infty$), то соотношение (17) редуцируется в уравнение (9) при $\kappa(\chi) \equiv (1+g(\chi))^{-1}$.

Как и при изотермическом упругопластическом деформировании материала [33], предположим, что энергетическое равенство, аналогичное (17), должно выполняться при любых видах НДС, а не только при чистом сдвиге, тогда (см. (3)–(5) и (8)) придем к соотношению

$$s_{ml} \dot{p}_{ml} = (1+g)^{-1} (s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - G^{-1} \tau_\Theta T \dot{\Theta} - \eta^{-1} T^2) = (1+g)^{-1} (s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - G^{-1} \tau_s \tau_\Theta \dot{\Theta} - \eta^{-1} \tau_s^2), \quad (18)$$

которое обобщает равенство (7) на неизоэтермический случай вязкоупругопластического деформирования материала. Подставим выражение (18) в правую часть (6), а в левой части уравнения (6) пластические деформации выразим через вязкоупругие (см. (1) и первое соотношение из (2) при учете (3) и (8)). В результате получим:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\tau_s^2(1+g)} \left(s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_s \tau_\Theta}{G} \dot{\Theta} - \frac{\tau_s^2}{\eta} \right) = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta} + \frac{s_{ij} s_{ml}}{2\tau_s^2(1+g)} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{\tau_\Theta s_{ij}}{2G\tau_s(1+g)} \dot{\Theta} - \frac{s_{ij}}{2\eta(1+g)} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

откуда следует:

$$\dot{s}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{c}{1+g} \right) s_{ij} - \frac{cG s_{ij} s_{ml}}{\tau_s^2(1+g)} \dot{\epsilon}_{ml} + \frac{c\tau_\Theta s_{ij}}{\tau_s(1+g)} \dot{\Theta} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (19)$$

где c — параметр переключения ($c=0$ при термовязкоупругом деформировании, разгрузке и нейтральном нагружении, $c=1$ при неизоэтермическом вязкоупругопластическом деформировании материала).

Определим условия, при которых параметр c равен 0 или 1. Согласно (4) вязкоупругое деформирование реализуется при выполнении неравенства $f(T, \chi, \Theta) < 0$, то есть

$$T < \tau_s(\chi, \Theta). \quad (20)$$

Начало разгрузки от поверхности нагружения характеризуется соотношениями:

$$f(T, \chi, \Theta) = 0, \quad \dot{f} < 0. \quad (21)$$

Исходя из этого и используя (4) при учете (5) и (13), вычислим производную функции нагружения по времени t :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} + \frac{\partial f}{\partial \Theta} \dot{\Theta} = s_{ij} \dot{s}_{ij} - 2\tau_s (\bar{G} \dot{\chi} + \tau_\Theta \dot{\Theta}). \quad (22)$$

Из второго равенства в (5) имеем $\dot{\chi} = \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}} \geq 0$. Так как при разгрузке от поверхности нагружения ($f=0$) приращение пластических деформаций равно нулю ($\dot{\chi}=0$), то при $\dot{f} < 0$ (см. (21)) из (22) вытекает условие начала разгрузки:

$$T = \tau_s(\chi, \Theta), \quad s_{ij}\dot{s}_{ij} - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} < 0. \quad (23)$$

При нейтральном нагружении $f = 0$ и $\dot{f} = 0$, причем приращения пластических деформаций по-прежнему отсутствуют ($\dot{\chi} = 0$), поэтому из (22) получаются условия нейтрального нагружения, аналогичные (23), если во втором соотношении из (23) знак «меньше» заменить знаком «равно». В условиях активного вязкоупругопластического деформирования также имеют место равенства $f = 0$ и $\dot{f} = 0$, но в этом случае $\dot{\chi} > 0$. Из экспериментов известно [18], что $\tau_s > 0$ и $\bar{G} > 0$, следовательно, из (4) и (22) найдем условия активного нагружения:

$$T = \tau_s(\chi, \Theta), \quad s_{ij}\dot{s}_{ij} - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0. \quad (24)$$

Второе соотношение в (24) при учете (5) можно записать так:

$$(T^2) - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2T\dot{T} - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0,$$

или, принимая во внимание, что $T = \tau_s > 0$ (см. (4)), переписать в виде:

$$T = \tau_s(\chi, \Theta), \quad \dot{T} - \tau_\Theta\dot{\Theta} > 0. \quad (25)$$

Согласно известным экспериментальным данным [18], как правило, $\tau_\Theta < 0$ (см. (13)), исключение составляют разве что стали в диапазоне температур 100–120°C, поэтому из соотношений (25) вытекает:

1) в изотермическом случае ($\dot{\Theta} \equiv 0$) увеличение пластических деформаций возможно только при возрастании интенсивности касательных напряжений ($\dot{T} > 0$);

2) при фиксированном T ($\dot{T} \equiv 0$) прирост пластических деформаций возможен только при увеличении температуры ($\dot{\Theta} > 0$). Этот результат качественно полностью согласуется с данными экспериментов [18, 19].

Условия (23), (24) можно записать по-другому, с использованием мощности деформаций формоизменения W (см. (7)). С этой целью подставим выражения (19) в (23), тогда при вязкоупругом деформировании, начале разгрузки и нейтральном (в силу $c = 0$) нагружении будем иметь:

$$2Gs_{ij}\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - \eta^{-1}Gs_{ij}s_{ij} - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad s_{ij}\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - \eta^{-1}\tau_s^2 - G^{-1}\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} \leq 0. \quad (26)$$

Согласно (1) и (8) при активном вязкоупругопластическом нагружении $\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} = \dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - p_{ij}$. Подстановка этого соотношения в (2) приводит к равенству:

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - \eta^{-1}Gs_{ij} - 2G\dot{p}_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (27)$$

Второе условие из (24) при учете выражения (27) дает:

$$2Gs_{ij}\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - \eta^{-1}Gs_{ij}s_{ij} - 2Gs_{ij}\dot{p}_{ij} - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2Gs_{ij}\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - 2\eta^{-1}G\tau_s^2 - 2Gs_{ij}\dot{p}_{ij} - 2\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0.$$

В силу постулата Друккера $s_{ij}\dot{p}_{ij} > 0$, поэтому из последнего неравенства при $G > 0$ окончательно получим другую форму условия активного нагружения:

$$T = \tau_s(\chi, \Theta), \quad s_{ij}\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - \eta^{-1}\tau_s^2 - G^{-1}\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0. \quad (28)$$

При учете соотношений (1)–(3) и (8) уравнения (19) можно записать так:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} + \delta_{ij}\lambda\dot{\epsilon}_{ll} - \frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{c}{1+g} \right) \sigma_{ij} + \frac{\delta_{ij}}{3} \left[\frac{G}{\eta} \left(1 - \frac{c}{1+g} \right) - \frac{K}{\mu} \right] \sigma_{ll} - \frac{cGs_{ij}s_{ml}}{\tau_s^2(1+g)} \dot{\epsilon}_{ml} + \left(\frac{c\tau_\Theta s_{ij}}{\tau_s(1+g)} - 3\delta_{ij}\alpha K \right) \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (29)$$

где $\lambda = K - 2G/3$ — мгновенный параметр Ламе, а входящий в (29) параметр переключения c на основании (4), (20), (26) и (28) имеет значения:

$$c = \begin{cases} 0 & \text{при } T < \tau_s(\chi, \Theta) \text{ или } T = \tau_s(\chi, \Theta) \text{ и } s_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \eta^{-1}\tau_s^2 - G^{-1}\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} \leq 0, \\ 1 & \text{при } T = \tau_s(\chi, \Theta) \text{ и } s_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \eta^{-1}\tau_s^2 - G^{-1}\tau_s\tau_\Theta\dot{\Theta} > 0. \end{cases} \quad (30)$$

В случае изотермического процесса деформирования ($\dot{\Theta} \equiv 0$) определяющие соотношения (29) и (30) редуцируются в соответствующие уравнения вязкоупругопластичности (см. в [17]).

Как и в работах [16, 17], для удобства последующего изложения определяющие соотношения для k -го компонента композиции запишем в матричной форме (см. (16), (29) и (30)):

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\varepsilon}_k + \mathbf{V}_k \sigma_k + \beta_k \dot{\Theta}, \quad \mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (31)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^T; \\ \varepsilon_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^T; \end{aligned} \quad (32)$$

$\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$ — симметричные 6×6 -матрицы, $\beta_k = \{\beta_i^{(k)}\}$ 6-компонентный вектор-столбец, ненулевые элементы которых вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij}G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \quad \bar{z}_{ll}^{(k)} = G^{(k)}, \quad v_{ij}^{(k)} = \frac{1}{3} \left[\frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} \left(1 - \frac{c^{(k)}}{1+g^{(k)}} \right) - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}} \right] - \delta_{ij} \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} \left(1 - \frac{c^{(k)}}{1+g^{(k)}} \right), \\ v_{ll}^{(k)} &= -\frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} \left(1 - \frac{c^{(k)}}{1+g^{(k)}} \right), \quad \beta_i^{(k)} = \frac{c^{(k)}\tau_\Theta s_i^{(k)}}{\tau_s^{(k)}(1+g^{(k)})} - 3\alpha^{(k)}K^{(k)}, \quad \beta_l^{(k)} = \frac{c^{(k)}\tau_\Theta s_l^{(k)}}{\tau_s^{(k)}(1+g^{(k)})} \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}), \\ \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= \frac{c^{(k)}G^{(k)}s_i^{(k)}s_j^{(k)}}{\tau_s^{(k)2}(1+g^{(k)})} \quad (i, j = \overline{1, 6}), \quad G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1+v^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1-2\nu^{(k)})}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)}E^{(k)}}{(1+v^{(k)})(1-2\nu^{(k)})}, \\ g^{(k)} &= \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad c^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } T^{(k)} < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}, \Theta) \quad \text{или } T^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}, \Theta), \quad W^{(k)} \leq 0, \\ 1 & \text{при } T^{(k)} = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}, \Theta), \quad W^{(k)} > 0, \end{cases} \\ W^{(k)} &\equiv \mathbf{s}_k^T \dot{\varepsilon}_k - \frac{\tau_s^{(k)2}(\chi^{(k)}, \Theta)}{\eta^{(k)}} - \frac{\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}, \Theta)\tau_\Theta(\chi^{(k)}, \Theta)}{G^{(k)}} \dot{\Theta}, \quad T^{(k)2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2; \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^T, \quad 0 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (33)$$

N — количество семейств арматуры; T — индекс операции транспонирования; k — номер компонента композиции ($k=0$ — связующий материал, $k=1, 2, \dots, N$ — волокна k -го семейства). Остальные величины в соотношениях (32)–(34) при отбрасывании индекса k имеют прежний смысл. В выражениях (33) суммирование по повторяющемуся индексу l не производится. Равенства (32) и (34) задают соответствия между шестью компонентами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектора \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq N$).

Как отмечалось в разделе 1, решение исследуемой задачи строится на основе явных численных схем [16, 17, 26, 33], поэтому неизвестные функции будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n=0, 1, 2, \dots$), где Δ — шаг по времени. Согласно этому, предположим, что при $t = t_{n-1}, t_n$ уже вычислены следующие величины:

$$\sigma_k^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\sigma}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \Theta^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \Theta^m(\mathbf{r}) \equiv \Theta(t_m, \mathbf{r}), \quad m = n-1, n, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad (35)$$

где \mathbf{r} — вектор места.

Для обеспечения устойчивости разрабатываемой далее численной схемы, как и в [17], преобразуем второе и третье слагаемые в правой части (31), используя формулу трапеций [37]:

$$\sigma_k^n - \sigma_k^{n-1} = \frac{\Delta}{2} (\dot{\sigma}_k^n + \dot{\sigma}_k^{n-1}), \quad \Theta^n - \Theta^{n-1} = \frac{\Delta}{2} (\dot{\Theta}^n + \dot{\Theta}^{n-1}), \quad 0 \leq k \leq N,$$

откуда

$$\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}}_k = \frac{\Delta}{2} \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k + \overset{n-1/2}{\boldsymbol{\sigma}}_k, \quad \overset{n}{\Theta} = \frac{2}{\Delta} \left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (36)$$

где

$$\overset{n-1/2}{\boldsymbol{\sigma}}_k = \overset{n-1}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k, \quad \overset{n-1/2}{\Theta} \equiv \overset{n-1}{\Theta} + \frac{\Delta}{2} \overset{n-1}{\dot{\Theta}}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (37)$$

Из равенств (37) при найденных из (35) величинах следует, что $\overset{n-1/2}{\boldsymbol{\sigma}}_k$, $\overset{n-1/2}{\Theta}$ и $\overset{n}{\Theta}$ в правых частях равенств (36) в рассматриваемый момент времени t_n уже известны. После подстановки выражений (36) в правую часть соотношения (31) и использования обозначений, аналогичных (35), при $t = t_n$ будем иметь:

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k = \mathbf{Z}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k + \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k + \mathbf{V}_k \overset{n-1/2}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right) \boldsymbol{\beta}_k, \quad 0 \leq k \leq N.$$

Отсюда

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}_k = \mathbf{B}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k + \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (38)$$

где

$$\mathbf{B}_k \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \mathbf{Z}_k, \quad \mathbf{p}_k \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{-1} \left[\mathbf{V}_k \overset{n-1/2}{\boldsymbol{\sigma}}_k + \frac{2}{\Delta} \left(\overset{n}{\Theta} - \overset{n-1/2}{\Theta} \right) \boldsymbol{\beta}_k \right], \quad \bar{\mathbf{V}}_k \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k, \quad (39)$$

при этом \mathbf{I} — единичная 6×6 -матрица; $\bar{\mathbf{V}}_k^{-1}$ — матрица, обратная 6×6 -матрице $\bar{\mathbf{V}}_k$.

Соотношение (38) — искомое определяющее уравнение для k -го компонента композиции, деформируемого вязкоупругопластически в неизотермическом случае. Так как элементы матриц \mathbf{Z}_k , \mathbf{V}_k и вектор-столбца $\boldsymbol{\beta}_k$, согласно (31) и (33), зависят от решения задачи, то уравнение (38) при учете (39) является нелинейным. Для его линеаризации, как и в [16, 17], применим итерационный процесс, аналогичный методу переменных параметров упругости [38]. Следовательно, в текущий момент времени t_n на данной итерации этого метода 6×6 -матрица $\mathbf{B}_k = (b_{ij}^{(k)})$ и 6-компонентный вектор-столбец $\mathbf{p}_k = \{p_i^{(k)}\}$ ($i, j = \overline{1, 6}$), согласно соотношениям (35), (37) и (39), в уравнении (38) будут известны.

Линеаризованное матричное равенство (38) формально совпадает с соотношениями Дюамеля–Неймана для анизотропной упругой среды [39, 40]. Используя для волокнистого КМ исходные допущения, подобные принятым в [16, 17, 39, 40], и повторяя приведенные в этих работах рассуждения с учетом линеаризации (38), при $t = t_n$ на данной итерации получим следующее линеаризованное матричное определяющее уравнение, характеризующее вязкоупругопластическое состояние КМ в неизотермическом случае:

$$\overset{n}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \overset{n}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (40)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv (\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \omega_0 \equiv 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (41)$$

$\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ — 6-компонентные вектор-столбцы осредненных напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} в КМ, аналогичные по структуре (32); \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k — 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} — матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , $\boldsymbol{\zeta}_k$ — 6-компонентные вектор-столбцы; ω_k — плотности армирования волокнами k -го семейства. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и вектор-столбцов $\boldsymbol{\zeta}_k = \{\zeta_i^{(k)}\}$ вычисляются так:

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}) \\ (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}), \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (42)$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad (43)$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k, \quad l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad (44)$$

$$l_{23}^{(k)} = 0, \quad l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

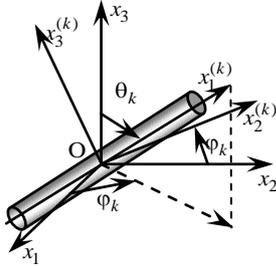


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с арматурой k -го семейства

Не записанные в соотношениях (43) элементы 6×6 -матриц $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$ и $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ приведены в [39, Табл. (21.40) и (21.44)]. Матрицы \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k задают преобразование вектор-столбцов $\boldsymbol{\sigma}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ (см. (32)) при переходе от глобальной прямоугольной декартовой системы координат x_j к локальной прямоугольной системе $x_i^{(k)}$, связанной с арматурой k -го семейства. При этом ось $Ox_1^{(k)}$ предполагается совпадающей с направлением армирования и определяется двумя углами (θ_k и φ_k) сферической системы координат (Рис. 1). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $Ox_i^{(k)}$ и Ox_j ($i, j = 1, 2, 3$) вычисляются по формулам (44). В равенствах (41) и (42) верхний индекс n опущен.

Как и в работе [40], при выводе равенств (40) и (41) попутно получают линеаризованные матричные соотношения:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^n = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}^n, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^n + \mathbf{r}_k^n, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (45)$$

В текущий момент времени t_n на данной итерации равенства (45) выражают: первое соотношение — скорости деформаций связующего $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ через скорости осредненных деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, второе же соотношение — скорости деформаций волокон k -го семейства $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$ через скорости деформаций связующего материала $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$.

На основании формул (33) и (41)–(44) заключаем, что при $t = t_n$ на данной итерации матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k и вектор-столбцы \mathbf{p} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k в соотношениях (40) и (45) известны. Если рассматривается изотермическая задача ($\dot{\Theta} \equiv 0$), то определяющее уравнение (40) редуцируется в соотношение для КМ, полученное ранее в [17], где предполагается, что армирование является плоско-перекрестным, то есть как на рисунке 1, где $\theta_k = \pi/2$, $1 \leq k \leq N$, а механическое поведение материалов композиции — вязкоупругопластическим. Следовательно, равенство (40) обобщает структурные соотношения, выведенные в [17].

Предположим, что в рассматриваемый момент времени t_n итерационный процесс сошелся с заданной точностью, то есть в уравнении (40) определены скорости деформаций композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n = \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij}^n \right\}$. Тогда, используя (45), последовательно вычислим скорости деформаций материалов композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \left\{ \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)n} \right\}$, а из равенств (38) — скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n = \left\{ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)n} \right\}$ в этих же компонентах. После этого по формулам (2) при учете (3) можно рассчитать и скорости вязкоупругих деформаций $\dot{e}_{ij}^{(k)n}$. При аппроксимации по времени на основе центральных конечных разностей на 3-точечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ будем иметь:

$$\frac{1}{2\Delta} \left(\varepsilon_{ij}^{(k)n+1} - \varepsilon_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)n}, \quad \frac{1}{2\Delta} \left(e_{ij}^{(k)n+1} - e_{ij}^{(k)n-1} \right) = \dot{e}_{ij}^{(k)n} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad 0 \leq k \leq N, \quad (46)$$

где правые части уже установлены, а в левых частях деформации $\varepsilon_{ij}^{(k)n-1}$ и $e_{ij}^{(k)n-1}$ известны из решения исследуемой задачи в предыдущий момент времени t_{n-1} . Поэтому из равенств (46) можно вычислить $\varepsilon_{ij}^{(k)n+1}$ и $e_{ij}^{(k)n+1}$ при $t = t_{n+1}$.

Допустим, что в начальный момент времени $t = t_0$ все компоненты композиции находятся в естественном состоянии при температуре $\Theta = \Theta^0 = \text{const}$; тогда из уравнений (1) получим:

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij}^{(k)} + p_{ij}^{(k)} + \delta_{ij} \varepsilon_{\Theta}^{(k)}, \quad \text{где } \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \equiv \int_{t_0}^t \alpha^{(k)} \dot{\Theta} dt, \quad \text{откуда при } t = t_{n+1} \text{ найдем:}$$

$$p_{ij}^{(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - e_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \bar{\alpha}^{(k)} (\Theta - \Theta^0) - \delta_{ij} \varepsilon_{\Theta}^{(k)}, \quad \bar{\alpha}^{(k)} \equiv (\alpha^{(k)} + \alpha^{(k)})/2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (47)$$

где правые части уже известны из соотношений (46) и предположения о том, что температура Θ заранее определена из уравнения теплопроводности для КМ по явной численной схеме (см. ниже), а тепловая деформация $\varepsilon_{\Theta}^{(k)}$ вычислена по решению, осуществленному в предыдущий момент времени t_{n-1} :

$$\varepsilon_{\Theta}^{(k)} \equiv \int_{t_0}^{t_n} \alpha^{(k)} \dot{\Theta} dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha^{(k)} \dot{\Theta} dt + \varepsilon_{\Theta}^{(k)} \approx \varepsilon_{\Theta}^{(k)} + \bar{\alpha}^{(k)} (\Theta - \Theta^0), \quad 0 \leq k \leq N.$$

Используя второе равенство из (5), вычислим параметр Одквиста для k -го компонента композиции $\chi^{(k)}$ при $t = t_{n+1}$:

$$\chi^{(k)} = \int_{t_0}^{t_{n+1}} \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \bar{p}_{ij}^{(k)}} dt = \chi^{(k)} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sqrt{2 dp_{ij}^{(k)} \bar{p}_{ij}^{(k)}} \approx \chi^{(k)} + \sqrt{2 \Delta p_{ij}^{(k)} \Delta \bar{p}_{ij}^{(k)}}, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (48)$$

где

$$\Delta p_{ij}^{(k)} \equiv p_{ij}^{(k)} - p_{ij}^{(k)} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (49)$$

В правой части равенства (49) значения пластических деформаций уже установлены (см. (47)), а следовательно, в выражении (48) известно последнее слагаемое. Таким образом, по соотношению (48) с учетом (46), (47) и (49) можно рассчитать величину параметра упрочнения $\chi^{(k)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Этот способ вычисления величины $\chi^{(k)}$ удобен тем, что при $t = t_{n+1}$ он не требует уточнения параметра Одквиста в процессе выполнения итерационной процедуры.

При моделировании динамического неизотермического вязкоупругопластического деформирования КМ нужно иметь в виду, что теплофизическая и механическая составляющие задачи являются связанными. Следовательно, помимо механических определяющих уравнений (40) необходимо знать эффективные соотношения закона Фурье для композиции. Запишем их в матричной форме [41]:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{\Lambda} \mathbf{g}, \quad (50)$$

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}^T, \quad \mathbf{g} = \{g_1, g_2, g_3\}^T = \text{grad} \Theta, \quad \mathbf{\Lambda} = (\omega_0 \mathbf{\Lambda}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{L}_k^T \mathbf{\Lambda}_k \bar{\mathbf{E}}_k) \bar{\mathbf{H}}, \quad (51)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = (\omega_0 \bar{\mathbf{I}} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{L}_k^T \bar{\mathbf{E}}_k)^{-1}, \quad \bar{\mathbf{E}}_k = \bar{\mathbf{B}}_k^{-1} \bar{\mathbf{C}}_k, \quad 1 \leq k \leq N,$$

где q_i, g_i — компоненты векторов плотности теплового потока и градиента температуры Θ ; $\mathbf{\Lambda} = (\lambda_{ij})$ — симметричная 3×3 -матрица эффективных коэффициентов теплопроводности КМ; $\mathbf{\Lambda}_k = (\lambda_{ij}^{(k)})$ — то же для k -го материала композиции (в случае изотропности этого компонента $\lambda_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} \lambda_k$ ($i, j = 1, 2, 3$), $0 \leq k \leq N$); $\bar{\mathbf{I}}$ — единичная 3×3 -матрица; $\mathbf{L}_k = (l_{ij}^{(k)})$ — ортогональная 3×3 -матрица, составленная из направляющих косинусов (44); $\bar{\mathbf{B}}_k^{-1}$ — матрица, обратная 3×3 -матрице $\bar{\mathbf{B}}_k$; $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{E}}_k, \bar{\mathbf{C}}_k$ — 3×3 -матрицы. Элементы $\bar{b}_{ij}^{(k)}$ и $\bar{c}_{ij}^{(k)}$ матриц $\bar{\mathbf{B}}_k$ и $\bar{\mathbf{C}}_k$ имеют значения:

$$\bar{b}_{11}^{(k)} = 1, \quad \bar{b}_{ii}^{(k)} = 0, \quad \bar{b}_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)}, \quad \bar{c}_{1j}^{(k)} = l_{1j}^{(k)}, \quad \bar{c}_{ij}^{(k)} = l_{im}^{(k)} \lambda_{mj}^{(0)} \quad (i = 2, 3, \quad j = 1, 2, 3), \quad 1 \leq k \leq N. \quad (52)$$

При учете термочувствительности материалов композиции $\lambda_{ij}^{(k)} = \lambda_{ij}^{(k)}(\Theta)$ ($0 \leq k \leq N$). Следовательно, согласно формулам (51) и (52), эффективные коэффициенты теплопроводности КМ в равенстве (50) зависят от температуры: $\Lambda = \Lambda(\Theta)$, $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(\Theta)$ ($i, j = 1, 2, 3$).

3. Моделирование неизоэтермического вязкоупругопластического поведения гибкой КМ-пластины

Рассмотрим изгибное деформирование пластины толщиной $2h$ (Рис. 2), с которой связана глобальная система координат x_i так, что Ox_1x_2 — срединная плоскость, Ox_3 — поперечная ось ($|x_3| \leq h$). Конструкция усилена N семействами волокон с плотностями армирования ω_k в произвольных перекрестных направлениях, параллельных плоскости Ox_1x_2 , то есть $\theta_k = \pi/2$, $1 \leq k \leq N$ (см. Рис. 1). Структура армирования в поперечном направлении Ox_3 квазиоднородна. Для моделирования плохого сопротивления такой КМ-пластины поперечному сдвигу используем теорию Амбарцумяна [16, 17, 28–31], а геометрическую нелинейность задачи учтем в приближении Кармана.

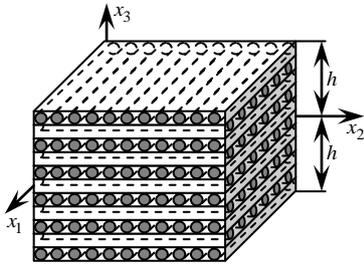


Рис. 2. Элемент армированной пластины

Исследуем частный, но важный для практики случай такого нагружения конструкции, когда на лицевых плоскостях ($x_3 = \pm h$)

внешние касательные силы отсутствуют. При этом перемещения точек пластины U_i и осредненные деформации композиции ε_{ij} аппроксимируем так:

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w(t, \mathbf{x}) + \frac{2x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\} \quad (i=1, 2), \quad (53)$$

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2} (3h^2 - x_3^2) (\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}), \quad (54)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (i, j = 1, 2).$$

Здесь: w — прогиб; u_i — перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; ε_{i3}^0 — деформации поперечных сдвигов в точках той же плоскости; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); Ω — область, занимаемая пластиной в плане. Неизвестными в выражениях (53) и (54) являются функции w , u_i и ε_{i3}^0 , зависящие от времени и только от двух координат — x_1, x_2 .

В настоящем исследовании поведение КМ-конструкции моделируется как поведение гибкой тонкостенной механической системы. Следовательно, по переменной x_3 напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать линейно [25]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (55)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Определяющее матричное соотношение (40) является системой шести линейных алгебраических уравнений. Согласно условиям соответствия, аналогичным (32) и (34), из третьего равенства системы (40) в текущий момент времени t_n можем найти скорость поперечной деформации композиции:

$$\dot{\varepsilon}_{33} \equiv \dot{\varepsilon}_3 = \left(b_{33} \right)^{-1} \left(\dot{\sigma}_3 - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i} \dot{\varepsilon}_i - p_3 \right), \quad (56)$$

где b_{3i} ($i = \overline{1, 6}$), p_3 — элементы матрицы \mathbf{B} и вектор-столбца \mathbf{p} в соотношении (40). Скорость изменения поперечного напряжения $\dot{\sigma}_3$ известна из выражения (55) после его дифференцирования по времени. Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части (56) получим после дифференцирования по t соотношений (54), то есть в конечном итоге они выразятся через функции w, \dot{w}, u_i и $\dot{\varepsilon}_{i3}^0$ ($i = 1, 2$).

К кинематическим равенствам (53), (54) нужно добавить двумерные уравнения динамического равновесия гибкой КМ-пластины, а также граничные и начальные условия [16, 17, 28]. Поскольку они общеизвестны (см. соотношения (60), (63)–(65) в [17]), то здесь не приводятся.

В случае связанности механической и теплофизической составляющих рассматриваемой неизотермической задачи вязкоупругопластического деформирования армированных конструкций необходимо дополнительно использовать уравнение теплового баланса для композиции [42]:

$$\rho c \dot{\Theta} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \bar{w}(t, \mathbf{r}), \quad (57)$$

где

$$\rho \equiv \sum_{k=0}^N \omega_k \rho_k, \quad c \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N \omega_k c_k \rho_k, \quad \bar{w}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (58)$$

При этом ρ_k , ρ — объемные плотности k -й фазы композиции и КМ; c_k , c — удельные теплоемкости этих же материалов; \bar{w} — плотность мощности механической диссипации композиции. Вектор \mathbf{q} и температура КМ Θ связаны законом Фурье (50) при учете (51).

На лицевых плоскостях конструкции зададим комбинации тепловых граничных условий II и III рода [43]:

$$\begin{aligned} q_3^{(+)}(t, \mathbf{x}) &\equiv q_3(t, \mathbf{x}, h) = \alpha^{(+)} \left(\Theta - \Theta_{\infty}^{(+)} \right) \Big|_{x_3=h} + q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \\ q_3^{(-)}(t, \mathbf{x}) &\equiv q_3(t, \mathbf{x}, -h) = -\alpha^{(-)} \left(\Theta - \Theta_{\infty}^{(-)} \right) \Big|_{x_3=-h} + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (59)$$

где $\alpha^{(\pm)}$ — коэффициенты теплоотдачи со стороны нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностей; $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$ — температуры окружающей среды со стороны тех же плоскостей; $q_{\infty}^{(\pm)}$ — заданные проекции на ось Ox_3 плотностей внешних тепловых потоков через те же поверхности.

На торцевой поверхности пластины Ω_* назовем тепловые граничные условия общего вида:

$$q_1 n_1 + q_2 n_2 = \alpha_* \left(\Theta - \Theta_{\infty}^* \right) + q_{\infty}^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (n_1 = \cos \beta, \quad n_2 = \sin \beta), \quad (60)$$

где α_* , Θ_{∞}^* , q_{∞}^* имеют тот же смысл, что и аналогичные величины в (59), но только на боковой поверхности; Γ — контур, ограничивающий область Ω ; β — угол, определяющий направление внешней нормали к Γ . В соотношениях (59), (60) принято: q_i ($i = \overline{1, 3}$) — компоненты вектора \mathbf{q} (см. (50) и (51)).

Кроме граничных условий (59) и (60), нужно задать начальное (при $t = t_0$) условие для температуры Θ .

Чтобы понизить размерность уравнения (57), воспользуемся простейшим вариантом метода дополнительных граничных условий [44]. В соответствии с ним температуру тонкостенной конструкции Θ по переменной x_3 аппроксимируем так:

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \Theta_0(t, \mathbf{x}) + \Theta_1(t, \mathbf{x})x_3 + \Theta_2(t, \mathbf{x})x_3^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (61)$$

где Θ_i ($i = \overline{0, 2}$) — искомые функции, зависящие от времени t и двух координат x_1 и x_2 ; $\Theta^0 = \text{const}$ — температура, отвечающая естественному состоянию КМ-пластины.

Для рассматриваемых в настоящем исследовании структур армирования (см. Рис. 2) ось Ox_3 совпадает с одной из главных осей теплофизической анизотропии композиции, а значит:

$$\lambda_{3i} = \lambda_{i3} \equiv 0 \quad (i = 1, 2), \quad (62)$$

где λ_{ij} — элементы матрицы \mathbf{A} в соотношениях (50) и (51).

После подстановки выражения (61) в граничные условия (59) при законе Фурье (50) и учете равенств (62) получим

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^2 (-1)^l h^{l-1} \left(l \lambda_{33}^{(-)} + h \alpha^{(-)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) &= \alpha^{(-)} \left(\Theta_{\infty}^{(-)} - \Theta^0 \right) + q_{\infty}^{(-)}(t, \mathbf{x}), \\ \sum_{l=0}^2 h^{l-1} \left(l \lambda_{33}^{(+)} + h \alpha^{(+)} \right) \Theta_l(t, \mathbf{x}) &= \alpha^{(+)} \left(\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0 \right) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (63)$$

где

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33} \Big|_{\Theta=\Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)} \quad (64)$$

($\lambda_{33}^{(\pm)}$ — коэффициенты поперечной теплопроводности композиции на нижней (–) и верхней (+) лицевых плоскостях). Соотношение (64) нужно принимать во внимание у термочувствительных КМ, когда $\lambda_{33} = \lambda_{33}(\mathbf{x}; \Theta)$; в противном случае $\lambda_{33}^{(+)} = \lambda_{33}^{(-)} = \lambda_{33}(\mathbf{x})$, так как структура армирования однородна по толщине конструкции.

Два равенства (63) содержат три неизвестных функции $\Theta_l(t, \mathbf{x})$ ($l = \overline{0, 2}$). Для замыкания системы (63) воспользуемся интегральным уравнением теплового баланса, то есть проинтегрируем (57) по толщине конструкции [44], тогда будем иметь:

$$\rho \dot{\bar{U}} = -\partial_1 Q_1 - \partial_2 Q_2 + W(t, \mathbf{x}) - q_3^{(+)}(t, \mathbf{x}) + q_3^{(-)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (65)$$

где

$$\bar{U}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad Q_i(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad W(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \bar{w}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \frac{\partial U}{\partial \Theta} = c(\Theta) \quad (i = 1, 2); \quad (66)$$

U — удельная внутренняя энергия композиции.

Экспериментальные данные [18, 45] свидетельствуют о том, что в достаточно широком диапазоне температур теплоемкость k -го материала композиции c_k с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать полиномом второго порядка относительно разности температур $\Theta - \Theta^0$ (допустимы и более сложные зависимости, например $c_k(\Theta - \Theta^0)$). При этом, согласно второму соотношению (58), в случае учета термочувствительности компонентов КМ удельная теплоемкость композиции может быть представлена в виде:

$$c(\mathbf{x}; \Theta - \Theta^0) = C_0(\mathbf{x}) + C_1(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0) + C_2(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0)^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (67)$$

где

$$C_i(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^N c_i^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (i = 0, 1, 2); \quad (68)$$

здесь $c_i^{(k)}$ есть коэффициенты разложения удельной теплоемкости k -го материала композиции $c_k(\Theta - \Theta^0)$ по формуле, подобной (67).

Из последнего соотношения (66) с учетом (67) и (68) следует:

$$U(\mathbf{x}; \Theta - \Theta^0) = U_0 + C_0(\mathbf{x})(\Theta - \Theta^0) + \frac{C_1(\mathbf{x})}{2}(\Theta - \Theta^0)^2 + \frac{C_2(\mathbf{x})}{3}(\Theta - \Theta^0)^3, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (69)$$

где U_0 — величина, которая не зависит от температуры. В дальнейшем интерес вызывает не внутренняя энергия U , а температура Θ , поэтому величину U_0 , которая соответствует температуре естественного состояния Θ^0 , можно задать произвольной, например равной нулю.

После подстановки (69) в первое выражение (66) при учете разложения (61) получим:

$$C_0(\mathbf{x}) \sum_{i=0}^2 H(i) \Theta_i + \frac{C_1(\mathbf{x})}{2} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 H(i+j) \Theta_i \Theta_j + \frac{C_2(\mathbf{x})}{3} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{l=0}^2 H(i+j+l) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = \bar{U}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad (70)$$

где

$$H(m) \equiv \frac{h^{m+1}}{m+1} [1 - (-1)^{m+1}]. \quad (71)$$

Если в рассматриваемый момент времени t из каких-либо соображений уже известны значения функции \bar{U} , то система трех нелинейных (в случае термочувствительности) алгебраических уравнений (63) и (70) с учетом (64) и (71) замкнута относительно двумерных функций $\Theta_l(t, \mathbf{x})$ ($l = \overline{0, 2}$).

Чтобы задать граничные условия, соответствующие уравнению теплового баланса (65), также проинтегрируем равенство (60) по толщине конструкции. После этого при подстановке разложения (61) и при обозначениях (66), (71) будем иметь:

$$Q_1 n_1 + Q_2 n_2 - \alpha_* \sum_{i=0}^2 H(i) \Theta_i = -2h\alpha_* (\Theta_\infty^* - \Theta^0) + Q_\infty^*(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad (72)$$

где

$$Q_\infty^*(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_\infty^*(t, \mathbf{r}) dx_3. \quad (73)$$

Для однозначного интегрирования уравнения (65), помимо (72), необходимо использовать начальное условие:

$$\bar{U}(t_0, \mathbf{x}) = \bar{U}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (74)$$

где \bar{U}_0 — заданная двумерная функция, определяемая по первой формуле (66) при учете соотношения (69), в котором необходимо заменить Θ на известную начальную температуру конструкции $\Theta_0^*(\mathbf{r})$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$.

4. Метод расчета

Как отмечалось выше, для численного решения исследуемой задачи используем явные пошаговые методы, при этом неизвестные функции находим в дискретные моменты времени t_n ($n=0, 1, 2, \dots$). Исходя из этого предполагаем, что наряду с (35) при $t = t_m$ уже известны значения функций:

$$\begin{aligned} u_l^m(\mathbf{x}) &\equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), & w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & \gamma_l^m(\mathbf{x}) &\equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \bar{U}^n(\mathbf{x}) &\equiv \bar{U}(t_n, \mathbf{x}), & q_i^n(\mathbf{r}) &\equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), & \Theta_s^n(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_n, \mathbf{x}), & q_\infty^{(\pm)n}(\mathbf{x}) &\equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), & e_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv e_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ \varepsilon_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), & \chi^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}) \quad (l=1, 2), & (i, j=1, 3), \\ s &= 0, 2, & m &= n-1, n, & 0 \leq k \leq N, & \mathbf{x} \in \Omega, & |x_3| &\leq h, \end{aligned} \quad (75)$$

где

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) - \partial_i w(t, \mathbf{x}) \quad (i=1, 2) \quad (76)$$

являются введенными для удобства дальнейшего изложения функциями [17].

В механической составляющей рассматриваемой связанной задачи производные по t , как и в (46), аппроксимируем центральными конечными разностями на 3-точечном шаблоне (исключение составляют выражения (36) при учете (37)). Это позволяет построить явную численную схему. После замены в уравнениях движения гибкой КМ-пластины вторых производных по времени от кинематических переменных w , u_i и γ_i их конечно-разностными аналогами и при учете соотношений (53), а также обозначений типа (35) и (75) получим [17]:

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{l=1}^2 \partial_l \left(F_{l3}^n + \sum_{j=1}^2 F_{lj}^n \partial_j w^n \right) + \sigma_{33}^{(+n)} - \sigma_{33}^{(-n)}, & \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left(\gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij}^n - F_{i3}^n, \\ \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(F_{ij}^n - F_{j3}^n \partial_j w^n \right) - \left(\sigma_{33}^{(+n)} - \sigma_{33}^{(-n)} \right) \partial_i w^n \quad (i=1, 2), & \mathbf{x} \in \Omega \quad (n=1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (77)$$

где

$$F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i, j=1, 2) \quad (78)$$

есть внутренние силовые факторы; плотность КМ ρ определена в (58). Объемные нагрузки в (77) не принимаем во внимание.

Используя выражения (78) и значения функций (75), в текущий момент времени t_n можно найти F_{ij} , F_{i3} , M_{ij} и внешние нагрузки $\sigma_{33}^{(\pm)}$, которые входят в правые части уравнений (77). При соответствующих граничных условиях [17] из равенств (77) по явной схеме рассчитаем значения искомых функций w , u_i и γ_i в следующий момент времени — t_{n+1} . Затем по формулам (54) при учете (76) вычислим осредненные деформации КМ ε_{ij}^{n+1} . Согласно соотношениям (54) и (75), при $t = t_{n-1}$ уже известны деформации ε_{ij}^{n-1} , следовательно, по формулам численного дифференцирования, аналогичным (46), при учете выражения (56) можем установить и скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ в каждой точке конструкции в данный момент времени t_n . Далее, на основании (45) при соответствиях (32) отыщем скорости деформаций материалов композиции $\dot{\varepsilon}_k^n$, а из уравнений (38) — скорости напряжений $\dot{\sigma}_k^n$. После этого по формулам (46) при учете (2), (3) и (75) определим полные ($\varepsilon_{ij}^{(k)n+1}$) и вязкоупругие ($e_{ij}^{(k)n+1}$) деформации k -го материала композиции. Затем по формуле (48) с учетом выражений (47) и (49) рассчитаем значения параметра Одквиста $\chi^{(k)n+1}$ в том же компоненте при времени $t = t_{n+1}$.

Для численного интегрирования теплофизической части исследуемой задачи также применим явную схему, только воспользуемся при этом 2-точечным шаблоном по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Дискретизированное по t уравнение теплового баланса (65) с учетом обозначений типа (75) преобразуется к виду [46]:

$$\frac{\rho}{\Delta} \left(\bar{U}^{n+1} - \bar{U}^n \right) = -\partial_1 \bar{Q}_1^n - \partial_2 \bar{Q}_2^n + \bar{W}^n(\mathbf{x}) - q_3^{n+1(+)}(\mathbf{x}) + q_3^{n+1(-)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (79)$$

В данный момент времени t_n по формулам (66) при значениях (75) вычислим правую часть в равенстве (79) и далее, по явной схеме с учетом (72)–(75), — значения функций \bar{U}^{n+1} при $t = t_{n+1}$. Затем из уравнений (63) и (70), где правые части уже известны в момент времени t_{n+1} , с учетом (64) и (71) рассчитаем коэффициенты $\Theta_i^{n+1}(\mathbf{x})$ ($i = \overline{0, 2}$) в разложении температуры (61). При термочувствительных компонентах композиции система уравнений (63), (70) не линейна. Линеаризовать ее можно, используя метод переменных теплофизических параметров, подобный методу переменных параметров упругости [38].

Структура левых частей равенств (77) и (79) свидетельствует о том, что для начала расчетов по разработанной численной схеме следует знать значения функций w , u_i , γ_i ($m = 0, 1$) и \bar{U}^0 . При этом функции w^0 , u_i^0 , γ_i^0 и \bar{U}^0 известны из соответствующих начальных условий (см. выше (74) и в [17] равенства (65)). Если при $t = t_0$ конструкция пребывает в естественном состоянии и отсутствуют нагрузки ($\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} = 0$), то по формуле Тейлора с точностью $O(\Delta^3)$ найдем: $w^1 \approx u_i^1 \approx 0$ и $\gamma_i^1 \approx 0$ ($i = 1, 2$) [17].

После замены в уравнениях (77) и (79) производных по пространственным переменным $\partial_i(\cdot)$ их конечно-разностными аналогами и при учете требуемых граничных условий (см. выше (72), (73) и в [17] соотношения (63), (64)) получим явную численную схему решения связанной неизоэтермической задачи вязкоупругопластического деформирования гибкой армированной пластины в окончательной форме.

5. Обсуждение результатов расчетов

Рассмотрим неизоэтермическое вязкоупругопластическое динамическое изгибное деформирование пластины толщиной $2h = 2$ см, которая в плане занимает прямоугольную область $\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b; b = 50$ см ($h/b = 1/50$). По всем кромкам конструкция жестко закреплена: $w = u_i = 0$ и $\gamma_i = 0, \mathbf{x} \in \Gamma, t \geq t_0$ (см. (53), (76) и (77)). До начального момента времени $t_0 = 0$ КМ-пластина находится в естественном состоянии ($w = u_i = 0$ и $\gamma_i = 0, \mathbf{x} \in \Omega, t \leq t_0, i = 1, 2$) при температуре $\Theta = \Theta^0 = \text{const}$ ($\mathbf{x} \in \Omega, |x_3| \leq h, t \leq t_0$). В момент $t = t_0$ конструкция нагружается снизу или сверху давлением $p(t)$, порожденным пришедшей воздушной взрывной волной [34]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad (80)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}. \quad (81)$$

Смысл параметров нагрузки p_{\max} , t_{\max} , t_{\min} и α в соотношениях (80), (81) вполне очевиден (подробно рассматривается в работах [16, 17]). Из равенств (80) следует, что при $p_{\max} > 0$ конструкция нагружается со стороны нижней, а при $p_{\max} < 0$ — верхней лицевой поверхности. Для проведения расчетов примем $t_{\max} = 0,1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс и $|p_{\max}| = 3$ МПа, что соответствует экспериментальным данным [34].

На лицевых поверхностях ($x_3 = \pm h$) происходит теплообмен с окружающей средой в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м²·К) [47]) при температуре воздуха $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ (см. (59)). На боковой поверхности конструкции задано тепловое граничное условие I рода, причем температура пластины поддерживается равной температуре ее естественного состояния: $\alpha_* \rightarrow \infty$, $\Theta_{\infty}^* = \Theta^0$ (см. (60)).

Конструкция изготовлена из эпоксидной смолы [48] и армирована стекловолокнами [20]. Мгновенное упругопластическое деформирование материалов композиции при постоянной температуре Θ описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E_s^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_s^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ , ε — осевое напряжение и соответствующая деформация, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$ — модуль упрочнения k -го компонента композиции, $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$ — предел текучести того же материала при фиксированной температуре ($\Theta = \text{const}$). Физико-механические свойства компонентов рассматриваемой композиции описаны ниже в таблице; при этом принято, что $\bar{c} = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука, $\bar{a} = 2\lambda/(c\rho)$ — удвоенная температуропроводность. Объемная вязкость материалов не учитывается: $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$, $0 \leq k \leq N$ (см. (2), (29) и (33)). Зависимости всех характеристик от температуры Θ в расчетах аппроксимируются линейно по данным, указанным в таблице.

Для перехода к дискретному аналогу расчетной области по координатам x_1 , x_2 вводится равномерная сетка с шагами $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50$; величина Δ выбирается равной 1 мкс. Согласно этому для рассматриваемой пластины имеют место отношения:

$$\Delta x_1/\Delta = 10 \text{ км/с}, \quad 2h/\Delta = 20 \text{ км/с}, \quad (\Delta x_1)^2/\Delta = 100 \text{ м}^2/\text{с}. \quad (82)$$

Таблица. Физико-механические характеристики материалов композиции [20, 48]

Температура КМ, °C	20	100	20	100
Характеристика	Эпоксидная смола		Стекловолокно	
	ρ , кг/м ³	1210,0	1208,0	2520,0
E , ГПа	2,8	2,6	86,8	86,5
ν	0,330	0,333	0,250	0,254
η , МПа·с	340	300	1250	1200
σ_s , МПа	20	15	4500	4400
E_s , ГПа	1,114	0,763	6,230	6,079
λ , Вт/(м·К)	0,243	0,236	0,89	0,86
$\alpha \cdot 10^6$, К ⁻¹	68,1	73,2	2,5	2,6
c , кДж/(кг·К)	1,54	1,71	0,80	0,84
\bar{c} , м/с	1521	1467	5869	5859
$\bar{a} \cdot 10^7$, м ² /с	2,60	2,28	8,80	8,13

Чтобы явная схема (77) была устойчива, требуется выполнение условий Куранта–Фридрихса–Леви: $\Delta x_1/\Delta \geq \bar{c}$ и $2h/\Delta \geq \bar{c}$ [26, 46]. Необходимое же условие устойчивости явной схемы (79) имеет вид: $(\Delta x_1)^2/\Delta \geq \bar{a}$ [46]. Значения отношений в (82) много больше величин \bar{c} и \bar{a} , приведенных в таблице. А значит, и необходимые условия устойчивости схемы (77) и (79) для КМ выполняются с запасом. Явная схема (79) имеет точность первого порядка по Δ [46]. Однако малый шаг по времени ($\Delta = 1$ мкс), обеспечивающий устойчивость всего численного метода в целом (см. (77) и (79)), позволяет получить вполне приемлемую для инженерных приложений точность расчета.

Конструкция усилена двумя семействами волокон ($K = 2$), уложенных ортогонально по направлениям Ox_1 и Ox_2 с плотностями армирования $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ соответственно.

На рисунке 3 изображены осцилляции наибольших значений температуры $\Theta_m(t) = \max_r \Theta(t, \mathbf{r})$. Кривая 1 рассчитана при указанных выше условиях теплообмена и $p_{\max} = 3$ МПа (см. (80)). При $p_{\max} = -3$ МПа зависимость $\Theta_m(t)$ не отличается от кривой 1. Характер этой кривой показывает, что к моменту времени $t \approx 200$ мс функция $\Theta_m(t)$ практически перестает осциллировать. При этом ее максимальное значение равно: $\Theta_{\max} = \max_{t \geq 0} \Theta_m(t) \approx 23,2^\circ\text{C}$, то есть всего на $3,2^\circ\text{C}$ выше Θ^0 — температуры естественного состояния конструкции. Такой же порядок нагрева однородных материалов при их динамическом (ударном) нагружении наблюдается и в экспериментах [19]. В силу малой разности величин Θ_{\max} и Θ^0 расчеты, выполненные с учетом и без учета (по данным таблицы для $\Theta = 20^\circ\text{C}$) термочувствительности материалов композиции, а также вообще без теплового воздействия (при $\alpha^{(k)} = 0$, $0 \leq k \leq N$) приводят практически к одним и тем же результатам. Следовательно, при отсутствии внешнего интенсивного теплового нагружения динамическое неупругое поведение КМ-пластин можно рассчитывать без учета теплового влияния, как это традиционно и делается (см., например, [26]).

В связи с этим далее рассмотрим случай, когда через верхнюю лицевую поверхность ($x_3 = h$) в пластину дополнительно поступает стационарный тепловой поток плотностью $q_\infty^{(+)} = -3$ кВт/м² (см. (59)), под действием которого при $t < t_0$ пластина квазистатически деформируется, а при $t = t_0 = 0$ принимает состояние покоя. Это начальное деформированное состояние можно определить методом установления. При таком тепловом нагружении в момент $t = t_0$ за пределами пограничных слоев (проникающих в конструкцию на глубину порядка ее толщины) температура меняется по поперечной координате x_3 практически линейно. При этом максимальное значение стационарной температуры достигается на верхней лицевой поверхности и равно $\Theta^{(+)} \approx 93,3^\circ\text{C}$, а на нижней лицевой поверхности температура имеет значение, близкое к $\Theta^{(-)} \approx 46,7^\circ\text{C}$.

На рисунке 3 кривая 2 соответствует динамическому расчету, выполненному при $p_{\max} = 3$ МПа и указанном выше тепловом воздействии. В случае $p_{\max} = -3$ МПа зависимость $\Theta_m(t)$ при выбранном на рисунке 3 по оси ординат масштабе визуально практически не отличается от кривой 2, поэтому не изображена. Поведение кривой 2 свидетельствует о том, что значения Θ_m при таком термосиловом нагружении отличаются от $\Theta^{(+)}$ не более чем на $2,3^\circ\text{C}$.

На рисунке 4 изображены эпюры остаточных прогибов $w(x_2)$, рассчитанные в центральном сечении конструкции ($x_1 = 0$) при $t = 500$ мс, когда поперечные колебания КМ-пластины практически полностью прекращаются. Кривые 1 и 2 получены при тех же условиях, что и на рисунке 3. Кривая 2' на рисунке 4 определена при том же тепловом воздействии, что и кривая 2, но в случае $p_{\max} = -3$ МПа (механическое нагружение конструкции сверху). Кривая 2'' приведена для удобства сравнения и является зеркальным отражением кривой 2' относительно горизонтальной оси $w = 0$.

Сравнение кривых 1 и 2 на рисунке 4 показывает, что наличие дополнительного теплового воздействия (теплового потока $q_\infty^{(+)} \neq 0$) вызывает существенное изменение величины остаточного прогиба пластины. Так, максимальные значения ординат точек на кривой 2 на 19,7% больше аналогичных величин на кривой 1. Кроме того, согласно поведению этих кривых, в остаточном деформированном состоянии КМ-конструкции в присутствии $q_\infty^{(+)} \neq 0$ на кривой 2 более четко просматривается «вмятина» в ее центральной части, которая не наблюдается на кривой 1, отвечающей нагружению без внешнего теплового воздействия.

Сопоставление же кривых 2 и 2'' (Рис. 4) свидетельствует о том, что при неравномерном по толщине пластины нагреве форма и величина остаточного прогиба существенно зависят от того, к которой из ее лицевых поверхностей прикладывается внешняя динамическая нагрузка. Чем больше перепад температуры

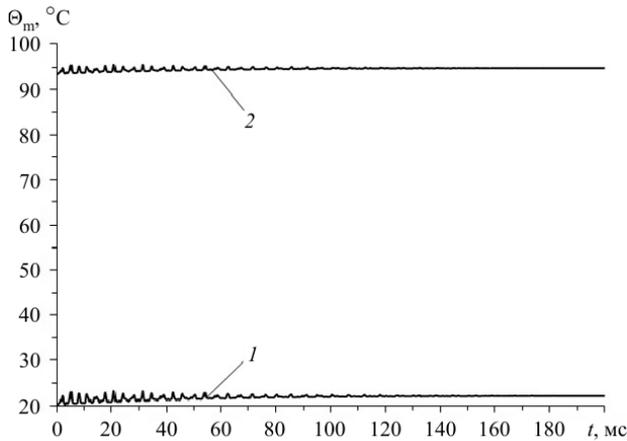


Рис. 3. Осцилляции максимального значения температуры в армированной пластине

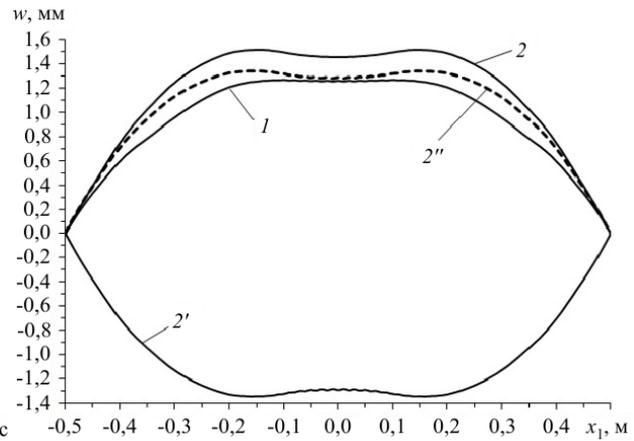


Рис. 4. Остаточный прогиб в центральном сечении стеклопластиковой пластины

между лицевыми поверхностями, тем заметнее это различие. Так, максимальные значения ординат точек на кривой 2 на 12,6% больше, чем на кривой 2''.

На рисунке 5 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующего $\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$) в окрестности начального момента времени и при $t \approx 500$ мс. Кривые рассчитаны при тех же условиях, что и кривые с теми же номерами на рисунке 4 (кривая 2' на рисунке 5 показана пунктиром). Из поведения кривых на рисунке 5а видно, что во всех трех рассматриваемых случаях наибольшие значения $\varepsilon_{\max}^{(0)} = \max_{t \geq 0} \varepsilon_m^{(0)}(t)$ практически совпадают и достигаются при $t \approx 2,2$ мс, то есть к моменту окончания действия внешней динамической нагрузки (см. t_{\min} в (81)). Следовательно, наличие внешнего стационарного теплового воздействия не оказывает существенного влияния на величину $\varepsilon_{\max}^{(0)}$, значение которой определяется в основном уровнем механической нагрузки.

Напротив, сравнение кривых на рисунке 5б показывает, что к моменту времени $t = 500$ мс, когда осцилляции практически прекращаются, кривые 2 и 2' существенно отличаются от кривой 1. Так, при $t = 500$ мс ордината точки на кривой 2 превосходит аналогичную величину на кривой 1 на 8,2%. Таким образом, внешнее тепловое воздействие (см. кривую 2) существенно сказывается на величине интенсивности остаточных деформаций связующего материала по сравнению со случаем его отсутствия (см. кривую 1). Чем больше внешнее тепловое воздействие, тем значительнее его влияние. Сопоставление кривых 2 и 2' на рисунке 5б свидетельствует о том, что наибольшие величины интенсивности остаточных деформаций связующей матрицы при наличии неравномерного по толщине конструкции температурного поля практически не зависят от того, к какой лицевой поверхности прикладывается внешняя механическая нагрузка.

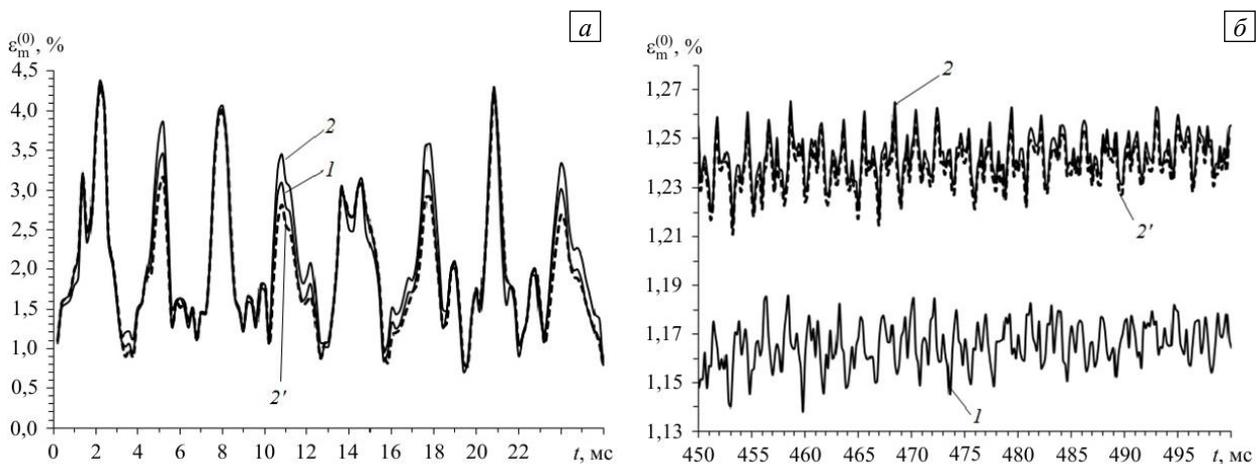


Рис. 5. Зависимость от времени наибольшего значения интенсивности деформаций связующего материала в окрестности начального момента времени (а) и при $t \approx 500$ мс (б)

6. Заключение

Разработана численно-аналитическая модель неізотермического вязкоупругопластического поведения изгибаемых армированных пластин, учитывающая связанность механической и теплофизической составляющих задачи, а также плохое сопротивление композитных конструкций поперечным сдвигам. Построена явная схема численного интегрирования поставленной начально-краевой задачи. Установлено, что для обеспечения устойчивости этой схемы шаг по времени должен выбираться не из критерия устойчивости явной пошаговой схемы для уравнения теплопроводности, а из условия Куранта–Фридрихса–Леви для волнового уравнения.

Анализ выполненных расчетов показал, что при отсутствии внешнего теплового воздействия и при поперечном динамическом нагружении стеклопластиковая пластина нагревается всего на 2–3°C, поэтому соответствующие расчеты можно проводить вообще без учета теплового воздействия, как это традиционно и делается. Наличие же теплового воздействия оказывает существенное влияние на неупругое поведение армированной конструкции, особенно при ее неравномерном нагреве по толщине: чем больше разность температур на лицевых плоскостях армированной КМ-пластины, тем заметнее различие в величине модуля остаточного прогиба. К тому же остаточный прогиб зависит от того, к какой из ее лицевых поверхностей прикладывается внешняя поперечная нагрузка.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

Литература

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.* 2001. Vol. 53. P. 21-42. [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6)
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Compos. Appl. Sci. Manuf.* 2001. Vol. 32. P. 901-910. [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2)
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // *Progr. Aero. Sci.* 2005. Vol. 41. P. 143-151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>
4. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Compos. Struct.* 2010. Vol. 93. P. 14-31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
5. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.* 2013. Vol. 8. P. 187-200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>
6. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements.* Elsevier, 2013. 832 p.
7. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрушин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек.* М.: Физматлит, 2014. 408 с.
8. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics.* Taylor & Francis Group, LLC, 2016. 700 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>
9. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах.* М.: Физматлит, 2018. 448 с.
10. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
11. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non Lin. Mech.* 2011. Vol. 46. P. 807-817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>
12. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // *Int. J. Impact Eng.* 2014. Vol. 67. P. 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
13. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites // *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. P. 483-508. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>
14. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle // *Int. J. Plast.* 2012. Vol. 36. P. 86-112. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>
15. Ахундов В.М. Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях // *Механика композитных материалов.* 2015. Т. 34, № 5. С. 419-432. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9509-4>)
16. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 3. С. 279-297. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.24>
17. Янковский А.П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2019. Т. 12, № 1. С. 80-97. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8>
18. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур /* Под ред. И.И. Гольденבלата. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
19. Белл Дж. *Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. Часть II. Конечные деформации.* М.: Мир, 1984. 432 с.
20. *Композиционные материалы. Справочник /* Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
21. Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теории.* М.: Физматлит, 2004. 144 с.

22. *Нагди П.М., Мерч С.А.* О механическом поведении вязко-упруго-пластических тел // Прикл. механика: Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е. 1963. Т. 30, № 3. С. 3-12. (English version <https://doi.org/10.1115/1.3636556>)
23. *Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Егоров А.Г., Каюмов Р.А.* Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 3. Идентификация характеристик внутреннего демпфирования // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50, № 5. С. 883-902. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9451-x>)
24. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. Vol. 12. P. A69-A77.
25. *Богданович А.Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
26. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
27. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры. Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 336 с.
28. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
29. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis. CRC Press, 2004. 831 p.
30. *Андреев А.* Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
31. *Белькаид К., Тати А., Бумараф Р.* Простой конечный элемент с пятью степенями свободы в узле, основанный на теории сдвигового деформирования третьего порядка // Механика композитных материалов. 2016. Т. 52, № 2. С. 367-384. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9578-z>)
32. *Whitney J.M., Sun C.T.* A higher order theory for extensional motion of laminated composites // J. Sound Vib. 1973. Vol. 30. P. 85-97. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5)
33. *Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д.* Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. ун-в. изд-во, 2002. 352 с.
34. *Houlston R., DesRochers C.G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Comput. Struct. 1987. Vol. 26. No. 1-2. P. 1-15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X)
35. *Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method. Butterworth-Heinemann, 2000. Vol. 1. The basis. 707 p.
36. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
37. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
38. *Хажинский Г.М.* Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
39. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопrotивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
40. *Янковский А.П.* Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // Механика композитных материалов. 2010. Т. 46, № 5. С. 663-678. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x>)
41. *Янковский А.П.* Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 32-38.
42. *Грешнов В.М.* Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов. М.: Физматлит, 2018. 232 с.
43. *Кудинов А.А.* Теплообмен. М.: ИНФРА-М, 2012. 375 с.
44. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности / Под ред. Э.М. Карташова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 280 с.
45. *Новицкий Л.А., Кожевников И.Г.* Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. М.: Машиностроение, 1975. 216 с.
46. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М: Мир, 1972. 418 с.
47. *Теплотехника* / Под ред. В.Н. Луканина. 4-е изд., испр. М.: Высш. шк., 2003. 671 с.
48. *Справочник по композитным материалам* / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 1. 448 с.

References

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, pp. 21-42. [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6)
2. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Compos. Appl. Sci. Manuf.*, 2001, vol. 32, pp. 901-910. [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2)
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction. *Progr. Aero. Sci.*, 2005, vol. 41, pp. 143-151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>
4. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, pp. 14-31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
5. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites. *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, pp. 187-200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>
6. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Elsevier, 2013. 832 p.
7. Solomonov Yu.S., Georgiyevskiy V.P., Nedbai A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnyye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014. 408 p.

8. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics*. Taylor & Francis Group, LLC, 2016. 700 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>
9. Dimitriyenko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksiy pri vysokikh temperaturakh* [Mechanics of composite structures at high temperatures]. Moscow, Fizmatlit, 2018. 448 p.
10. Tarnopol'skiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnyye materialy: Spravochnik* [Spatially reinforced composite materials: Reference Book]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1987, 224 p.
11. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807-817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>
12. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review. *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
13. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites. *Int. J. Plast.*, 2008, vol. 24, pp. 483-508. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>
14. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *Int. J. Plast.*, 2012, vol. 36, pp. 86-112. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>
15. Akhundov V.M. Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations. *Mech. Compos. Mater.*, 2015, vol. 51, pp. 539-558. <https://doi.org/10.1007/s11029-015-9509-4>
16. Yankovskii A.P. Applying the explicit time central difference method for numerical simulation of the dynamic behavior of elastoplastic flexible reinforced plates. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2017, vol. 58, pp. 1223-1241. <https://doi.org/10.1134/S0021894417070112>
17. Yankovskii A.P. Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 80-97. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8>
18. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblatt I.I., Nikolayenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustoychivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur* [Calculations for strength, stability and fluctuations in high temperature conditions], ed. by I.I. Gol'denblatt. Moscow, Mashinostroyeniye, 1965. 567 p.
19. Flüge S. (ed.) *Encyclopedia of Physics. Vol. VIa/1. Mechanics of Solids I*. Springer-Verlag, 1973. 813 p.
20. Karpinos D.M. (ed.) *Kompozitsionnyye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p.
21. Bondar' V.S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Variants of the theory]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 144 p.
22. Naghdi P.M., Murch S.A. On the mechanical behavior of viscoelastic/plastic solids. *J. Appl. Mech.*, 1963, vol. 30, no. 3, pp. 321-328. <https://doi.org/10.1115/1.3636556>
23. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G., Kayumov R.A. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 3. Identification of the characteristics of internal damping. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, pp. 633-646. <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9451-x>
24. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, pp. A69-A77.
25. Bogdanovich A.E. *Nelineynyye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne, 1987. 295 p.
26. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod State University, 2002. 400 p.
27. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A. *Nelineynoye deformirovaniye i ustoychivost' uprugikh obolochek neodnorodnoy struktury. Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi* [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure. Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]. M.: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012. 336 p.
28. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. Moscow, Nauka, 1987. 360 p.
29. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. CRC Press, 2004. 831 p.
30. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotoryye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis.]. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
31. Belkaid K., Tati A., Boumaraf R. A simple finite element with five degrees of freedom based on Reddy's third-order shear deformation theory. *Mech. Compos. Mater.*, 2016, vol. 52, no. 2, pp. 257-270. <https://doi.org/10.1007/s11029-016-9578-z>
32. Whitney J.M., Sun C.T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, pp. 85-97. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5)
33. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogul'skiy I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoye resheniye dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [Numerical solution of dynamic problems of elastoplastic deformation of solids]. Novosibirsk: Siberian university, 2002. 352 p.
34. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1-2, pp. 1-15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X)
35. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, 2000. Vol. 1. The basis. 707 p.
36. Freudental A.M., Geiringer H. *The mathematical theories of the inelastic continuum* / Flüge S. (ed.) *Handbuch der Physik. Band VI: Elastizität und Plastizität* [Handbook of Physics. Vol. 6: Elasticity and Plasticity]. Springer, 1958. 642 p. Pp. 229-433. https://doi.org/10.1007/978-3-642-45887-3_3
37. Dekker K., Verwer J.G. *Stability of Runge–Kutta methods for stiff nonlinear differential equation*. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland, 1984. 307 p.
38. Khazhinskiy G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov* [Model of deformation and fracture of metals]. Moscow, Nauchnyy mir, 2011. 231 p.

39. Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivleniye zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of rigid polymeric materials]. Riga, Zinatne, 1972. 498 p.
40. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451-460. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x>
41. Yankovskii A.P. Modelling of processes of thermal conductivity in spatially reinforced composites with any orientation of fibres]. *Prikladnaya fizika – Applied Physics*, 2011, no. 3, pp. 32-38.
42. Greshnov V.M. *Greshnov V.M. Fiziko-matematicheskaya teoriya bol'shikh neobratimyykh deformatsiy metallov* [Physical and mathematical theory of large irreversible deformations of metals]. Moscow, Fizmatlit, 2018. 232 p.
43. Kudinov A.A. *Teplomassoobmen* [Heat and mass transfer]. Moscow, INFRA-M, 2012. 375 p.
44. Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Metody resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravneniy teploprovodnosti* [Methods for solving parabolic and hyperbolic heat equations], ed. by E.M. Kartashov. Moscow, Book House "LIBROCOM", 2012. 280 p.
45. Novitsky L.A., Kozhevnikov I.G. *Teplofizicheskiye svoystva materialov pri nizkikh temperaturakh. Spravochnik* [Thermophysical properties of materials at low temperatures. Handbook]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. 216 p.
46. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference methods for initial-value problems*. John Wiley & Sons, 1967. 405 p.
47. Lukanin V.N. (ed.) *Teplotekhnika* [Heat engineering]. 4th ed. Moscow, Vysshaya shkola, 2003. 671 p.
48. Lubin G. (ed.) *Handbook of composites*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.

Поступила в редакцию 28.07.2020; после доработки 22.09.2020; принята к опубликованию 28.09.2020