

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.27](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.27)

УДК 51-72, 532.5.032, 532.51

## ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ УСТАНОВИВШИХСЯ КОНВЕКТИВНЫХ КОНЦЕНТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ ТИПА КУЭТТА

Н.В. Бурмашева, Е.Ю. Просвирыков

*Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация*

В статье приведено точное решение задачи установившегося диффузионного слоистого течения типа Куэтта вязкой несжимаемой жидкой бинарной смеси, индуцированное параболическим ветром, заданным на одной из границ области течения. Течение моделируется уравнениями концентрационной конвекции, состоящими из уравнений Навье–Стокса (в приближении Буссинеска), уравнения несжимаемости и уравнения изменения концентрации легкой фазы бинарной смеси. Решение данной нелинейной переопределенной системы уравнений ищется в рамках класса Линя–Сидорова–Аристов. Показана разрешимость редуцированной системы уравнений относительно компонент поля скорости, поля концентрации и давления. В качестве области течения выбран плоский горизонтальный бесконечный слой постоянной толщины. Отличительной особенностью построенного точного решения является учет свойства непроницаемости твердой гидрофильной поверхности, ограничивающей снизу область течения. В ходе анализа полученных формул для распределения поля скорости установлено, что иногда течение может быть сведено к однонаправленному. В общем же случае каждая из ненулевых компонент вектора скорости способна иметь не более одной нулевой точки внутри слоя, причем они будут совпадать друг с другом только при условии, что течение реализуется как однонаправленное. Обнаружено, что соответствующее поле касательных напряжений стратифицируется на две зоны, в пределах каждой из которых напряжение имеет постоянный знак и меняет его при переходе из зоны в зону. При исследовании поля концентрации выявлена принципиальная возможность расслоения поля фоновой концентрации на две зоны от референсного значения. При этом поле фонового давления, в отличие от отсчетного, будет состоять уже из трех частей. Таким образом, полученное решение может описывать возвратные течения, локализующиеся (при определенных сочетаниях краевых параметров и физических характеристик жидкости) вблизи границ рассматриваемого слоя жидкости.

*Ключевые слова:* диффузионное слоистое течение, уравнение Навье–Стокса, точное решение, переопределенная система, стратификация, возвратные течения, противотечения

## EXACT SOLUTION FOR STABLE CONVECTIVE CONCENTRATION FLOWS OF A COUETTE TYPE

N.V. Burmasheva and E.Yu. Prosviryakov

*Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*

The paper presents an exact solution describing a steady-state diffusion layered Couette-type flow of a viscous incompressible fluid binary mixture, induced by specifying a parabolic wind at one of the boundaries of the flow region. The flow is modeled using the system of equations of concentration convection, which consists of the Navier–Stokes equations (in the Boussinesq approximation), the incompressibility equation, and the equation for changing the concentration of the light phase of a binary mixture. The solution of this nonlinear overdetermined system of equations is sought within the framework of the Lin–Sidorov–Aristov class. The solvability of the reduced system of equations with respect to the components of the velocity field, concentration and pressure fields is shown. A plane horizontal infinite layer of constant thickness is considered as the flow region. A distinctive feature of the presented exact solution is taking into account the impermeability property of a solid hydrophilic surface, which limits the fluid layer under consideration from below. In the course of analyzing the exact solution describing the distribution of the velocity field, it was shown that in some cases the flow can be reduced to a unidirectional one. In the general case, each of the nonzero components of the velocity vector can have at most one zero point inside the layer under consideration, and they will coincide only if the flow is reducible to a unidirectional one. It is shown that the corresponding shear stress field can be stratified into two zones, in each of which the stress retains its sign and changes it upon passing to another zone. The investigation of the concentration field revealed the fundamental possibility of stratification of the background concentration field into two zones compared to the reference value. At the same time, the background pressure field can be divided into three zones in relation to the reference level. Thus, the solution proposed can describe return flows localized (for certain combinations of edge parameters and physical characteristics of the fluid) near the boundaries of the considered fluid layer.

*Key words:* diffusion layered flow, Navier–Stokes equation, exact solution, overdetermined system, stratification, return flows, countercurrents

### 1. Введение

Одной из основных причин, индуцирующих в поле силы тяжести конвекцию в вязкой жидкости, является неравномерное распространение теплоты, приводящее к неоднородному распределению плотности. Однако эта причина не единственная. Известно, что реальные жидкости неоднородны по плотности, поскольку являются смесями. Примером примесей служат солевые кристаллы в морской воде или соли металлов, обнаруживаемые в водопроводной воде. И чем больше концентрация примеси, тем существеннее различаются свойства жидкости в различных ее областях. Движение растворенных частиц в жидкости вызывает конвекцию концентрационной природы (диффузию).

Известны экспериментальные работы [1–3], в которых показано, что перепад солености между водами Черного и Средиземного морей эквивалентен изменению температуры на  $100^{\circ}\text{C}$ . При солеобмене через проливы и опреснении жидкости из-за материкового стока в морях вблизи берегов формируются так называемые узкоструйные циклонические кольца (например, во внутренних водоемах Черного моря [4, 5]). Роль концентрационной конвекции в других технических и природных процессах отражена в работах [6–16].

Для описания диффузионных процессов в вязкой жидкости, как правило, используется система уравнений концентрационной конвекции в приближении Буссинеска. В эту математическую модель входят уравнение движения жидкости (уравнение Навье–Стокса), закон сохранения массы и уравнение изменения концентрации. Несмотря на то, что уравнение изменения концентрации формально совпадает (с точностью до обозначений) с уравнением теплопроводности, используемом в модели тепловой конвекции, исследование концентрационной конвекции представляет собой отдельный интерес. Дело в том, что при внешней схожести уравнений этих двух математических моделей концентрационная и тепловая конвекция возникают, с точки зрения физики, в результате воздействия разных по своей природе факторов. Особенности возникновения концентрационной конвекции соотносят с изменениями граничных условий и с возможными изменениями плотности жидкости.

Вообще говоря, система уравнений Обербека–Буссинеска для теоретического исследования концентрационной конвекции является замкнутой (число уравнений совпадает с числом неизвестных). При моделировании крупномасштабных течений в приближении тонкого слоя можно пренебречь влиянием одной компоненты скоростей на структуру течения [17–22]. В этом случае система определяющих уравнений становится переопределенной. Можно констатировать, что упрощение задачи, основанное на физических принципах, приводит к математическим сложностям, связанным с получением условий совместности редуцированной системы Обербека–Буссинеска и нахождением нетривиальных (отличных от нулевого) точных решений. В качестве одного из вариантов получения решения таких переопределенных моделей рассматривается подход, согласно которому заранее определяется структура будущего точного решения. Причем структура решения выбирается таким образом, чтобы тождественно удовлетворить части уравнений модели и тем самым восстановить баланс между числом уравнений и числом неизвестных.

В качестве первых примеров нетривиального точного решения переопределенной редуцированной системы уравнений Навье–Стокса можно указать формулы, задающие изотермические течения Куэтта [23], Пуазейля [24], Экмана [25], решения двух задач Стокса [26, 27]. Библиографические обзоры по слоистым и сдвиговым течениям вязких несжимаемых жидкостей в точной постановке содержат работы [28–30].

Известно, что первое точное решение для задач конвекции в вертикальных плоских каналах предложил Бирих в статье [31]. Это решение значительно позже, но независимо от Бириха, также получено авторами [32, 33]. В монографии Остроумова [34] опубликовано точное решение для течений теплопроводящей жидкости в цилиндрических областях. К настоящему времени семейство решений Остроумова–Бириха задач тепловой конвекции многократно обобщалось и модифицировалось в работах [35–53], использовалось применительно к задачам концентрационной конвекции Марангони [54–59].

В данной статье исследуется установившееся слоистое диффузионное течение типа Куэтта в плоском горизонтальном бесконечном слое постоянной толщины. Отличительными особенностями данной краевой задачи являются непроницаемость нижней гидрофильной границы и задание параболического ветра на верхней границе. В статье получено точное решение задачи диффузии и показано, что это решение способно качественно воспроизвести множественную стратификацию физических полей.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся сдвиговое диффузионное течение вязкой несжимаемой жидкости. Воспользуемся системой уравнений концентрационной конвекции, состоящей из уравнений Навье–Стокса (в приближении Буссинеска), уравнения изменения концентрации легкой фазы бинарной смеси и уравнения несжимаемости [17]:

$$\begin{aligned}(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + g\beta C \mathbf{k}, \\ (\mathbf{V} \cdot \nabla) C &= d \Delta C, \\ \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь:  $\mathbf{V} = (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), 0)$  — вектор скоростей течения;  $P(x, y, z)$  — нормированное на плотность жидкости отклонение давления от гидростатического давления;  $C(x, y, z)$  — отклонение концентрации легкой фазы (примеси) бинарной жидкой смеси от некоторого равновесного состояния;  $\nu, d$  — кинематическая (молекулярная) вязкость и коэффициент диффузии соответственно;  $g$  —

ускорение свободного падения;  $\beta$  — коэффициент концентрационного расширения;  $\mathbf{k}$  — единичный орт вертикальной оси  $Oz$ ;  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ ,  $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — трехмерные операторы Гамильтона и Лапласа.

Будем искать решение системы (1) в следующем классе [60–65]:

$$V_x = U(z), \quad V_y = V(z), \quad V_z = 0, \quad (2)$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)x + P_2(z)y, \quad C = C_0(z) + C_1(z)x + C_2(z)y. \quad (3)$$

Представление скоростей в виде (2) обобщает классическое точное решение Куэтта [23] и определяет спиральное течение Экмана [25]. Однородное поле скоростей (2) использовалось для изучения слоистых и сдвиговых потоков жидкости в точной постановке в научных работах [60–62, 64].

Заметим, что в квадратично нелинейную систему уравнений (1) входит пять скалярных уравнений относительно четырех неизвестных функций — скоростей  $V_x, V_y$ , концентрации  $C$  и давления  $P$ . Несоответствие числа уравнений и числа неизвестных означает, что система (1) является переопределенной. Однако баланс числа уравнений и числа неизвестных выполняется для класса (2), поскольку уравнение несжимаемости для него выполняется тождественно.

Подставляя далее выражения (2), (3) в рассматриваемую систему (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях независимых переменных  $x$  и  $y$ , можно свести систему в частных производных (1) к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} C_1'' = 0, \quad C_2'' = 0, \quad P_1' = g\beta C_1, \quad P_2' = g\beta C_2, \\ \nu V'' = P_2, \quad \nu U'' = P_1, \quad dC_0'' = UC_1 + VC_2, \quad P_0' = g\beta C_0. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве независимой переменной в уравнениях системы (4) выступает вертикальная (поперечная) координата  $z$ . Дифференцирование по этой переменной обозначено штрихом. Интегрирование уравнений (4) производится в том порядке, в каком они записаны.

Для адекватного описания решениями системы (4) реальных диффузионных течений вязкой бинарной жидкости необходимо сформулировать соответствующее порядку системы (4) число краевых условий.

Рассмотрим далее течение вязкой бинарной жидкости в бесконечном горизонтальном слое толщиной  $h$ . Полагаем, что твердая граница слоя жидкости ( $z = 0$ ) является непроницаемой, и на ней выполняется условие прилипания [60–64, 66, 67]:

$$V_x|_{z=0} = V_y|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}|_{z=0} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к нижней границе слоя. Положим также, что на верхней границе  $z = h$  заданы скорости, распределения давления и концентрации примеси:

$$V_x|_{z=h} = W \cos \varphi, \quad V_y|_{z=h} = W \sin \varphi, \quad P|_{z=h} = S_0, \quad C|_{z=h} = ax + by. \quad (6)$$

Граничное условие (6) для концентрации можно интерпретировать иначе. При представлении крупномасштабных движений жидкости (в приближении тонкого слоя) допустимо пренебрегать искривлением границы взаимодействия контактирующих жидкостей или системы газ–жидкость. Постулирование граничных условий (6) позволяет изучить гидродинамические потоки со свободной границей [6, 7, 18, 20–22, 60–64, 67]. Течение жидкости, индуцированное заданными на границах величинами (5) и (6), может быть реализовано между абсолютно твердыми пластинами. В этом случае на границе  $z = h$  будет справедливо граничное условие

$$\frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}}|_{z=h} = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к верхней границе слоя. Для замыкания краевой задачи еще необходимо знать распределение концентрации хотя бы в одной точке потока. Не нарушая общность рассуждений, будем использовать далее соотношения (6) для горизонтальных градиентов концентрации.

### 3. Решение краевой задачи

Для нахождения точного решения краевой задачи (4)–(6) проинтегрируем линейную систему уравнений (4). Неизвестные постоянные интегрирования определим из граничных условий (5), (6):

$$\begin{aligned} C_1 &= a, & C_2 &= b, \\ P_1 &= \xi_1(-1+Z), & P_2 &= \xi_2(-1+Z), \\ U &= Z[W \cos \varphi + \psi(-2+Z)(-1+Z)], \\ V &= Z[W \sin \varphi + \gamma(-2+Z)(-1+Z)], \\ C_0 &= \lambda_1(-1+Z)(8+8Z+8Z^2-12Z^3+3Z^4) + \lambda_2(-1+Z^3), \\ P_0 &= S_0 + \xi_3(-1+Z)^2(11+6Z+Z^2-4Z^3+Z^4) + \xi_4(-1+Z)^2(3+2Z+Z^2). \end{aligned} \quad (7)$$

В точном решении (7), принадлежащем к полиномиальному классу, для упрощения записи введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z}{h}, & \psi &= \frac{ag\beta h^3}{6\nu}, & \gamma &= \frac{bgh^3\beta}{6\nu}, & \lambda_1 &= \frac{(a^2+b^2)gh^5\beta}{360d\nu}, & \lambda_2 &= \frac{h^2W(a \cos \phi + b \sin \phi)}{6d}, \\ \xi_1 &= ag\beta h, & \xi_2 &= bg\beta h, & \xi_3 &= \frac{(a^2+b^2)g^2h^6\beta^2}{720d\nu}, \\ \xi_4 &= \frac{ag\beta h^3W \cos \phi}{24d} + \frac{bg\beta h^3W \sin \phi}{24d} = \frac{\psi}{4}W \cos \phi + \frac{\gamma}{4}W \sin \phi. \end{aligned}$$

### 4. Анализ поля скоростей течения

Заметим, что с точностью до замены коэффициентов  $W \sin \varphi$  на  $W \cos \varphi$  и  $\gamma$  на  $\psi$  скорости  $U$  и  $V$ , согласно точному решению (7), описываются одними и теми же выражениями. Следовательно, если эти коэффициенты таковы, что для некоторого  $k \neq 0$

$$\sin \varphi = k \cos \varphi, \quad \gamma = k\psi,$$

то путем поворота осей  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости на угол  $\operatorname{tg} \varphi = k$  можно свести течение к однонаправленному (слоистому).

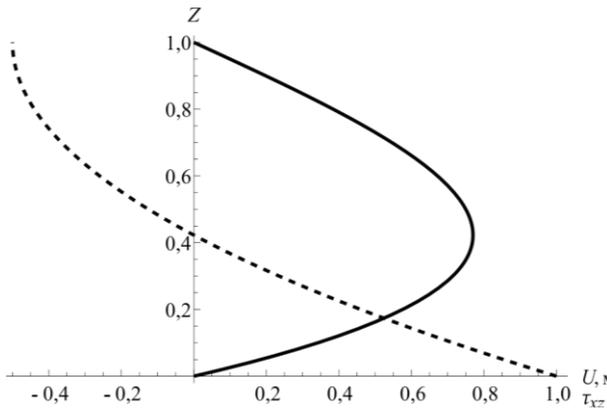
Рассмотрим однонаправленное течение, когда верхняя граница слоя является неподвижной ( $W = 0$ ). Тогда скорость течения будет определяться выражением:

$$U = \sqrt{1+k^2}\psi Z(-2+Z)(-1+Z),$$

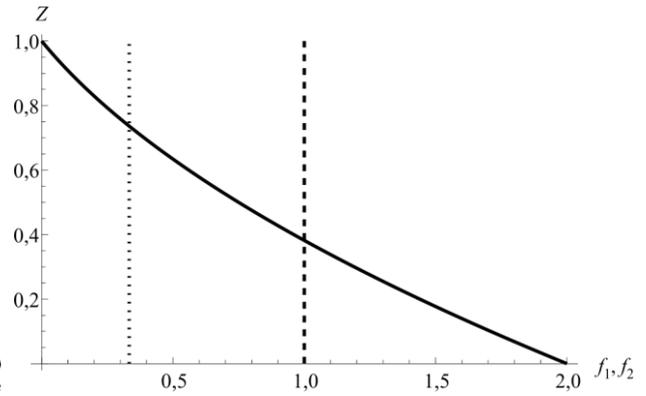
и значения градиентов концентрации на обеих границах слоя, согласно решению (7), совпадают. Таким образом, получаем конвективное концентрационное течение, с точностью до числового множителя совпадающее с конвективным тепловым течением Бириха [31]. Соответствующий профиль скорости представлен на рисунке 1. Очевидно, что противотечений в этом случае не возникает (поток однонаправленный), однако касательное напряжение

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\eta}{h} \frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\sqrt{1+k^2}\psi\eta}{h}(2-6Z+3Z^2)$$

имеет нулевую точку  $Z_0 = 1 - \sqrt{3}/3$  внутри рассматриваемого слоя (Рис. 1). Следовательно, поле касательных напряжений способно расслаиваться на две зоны, в одной из которых действуют сжимающие напряжения, а в другой — растягивающие. Нулевое значение касательного напряжения совпадает с точкой экстремума профиля скорости, и его положение не зависит от значений параметров, характеризующих краевую задачу.



**Рис. 1.** Профиль скорости  $U$  (сплошная линия) и касательного напряжения  $\tau_{xz}$  (штриховая линия) при однонаправленном конвективном течении в горизонтальном слое с неподвижными границами при  $\sqrt{1+k^2}\psi=2$ ,  $\eta/h=0,25$



**Рис. 2.** Графики функций  $f_1 = (-2+Z)(-1+Z)$  (сплошная линия) и  $f_2 = -W \cos \phi / \psi$  (пунктирная и штриховая линии) при различных значениях коэффициента  $W \cos \phi / \psi$

Вернемся к изучению поля скоростей (7), когда  $W \neq 0$ . Согласно точному решению (7), скорость течения  $U$  может иметь нулевую точку внутри слоя, если у полинома  $W \cos \phi + \psi(-2+Z)(-1+Z)$  есть корни внутри слоя. Заметим, что если  $\psi = 0$ , то таких корней нет. Поэтому далее будем полагать, что  $\psi \neq 0$ . Тогда положение искомой нулевой точки определяется положением точки пересечения функций  $f_1 = (-2+Z)(-1+Z)$  и  $f_2 = -W \cos \phi / \psi$ , графики которых приведены на рисунке 2. Ввиду того, что функция  $f_1$  строго монотонна, а функция  $f_2$  принимает постоянное значение, пересечение либо единственно, либо не существует. Искомое пересечение будет происходить внутри слоя лишь при условии

$$0 < -W \cos \phi / \psi < 2.$$

Аналогично получаем, что у скорости  $V$  существует нулевая точка, если

$$0 < -W \sin \phi / \gamma < 2.$$

При этом положения нулевых точек скоростей  $U$  и  $V$  совпадают, когда

$$\cos \phi / \psi = \sin \phi / \gamma$$

(образуется застойная точка потока). Последнее условие выполнимо только в случае, когда течение, задаваемое выражениями (7), можно свести к однонаправленному.

Касательные напряжения найдем с помощью выражений:

$$\tau_{xz} = \frac{\eta(W \cos \phi + \psi(2 - 6Z + 3Z^2))}{h}, \quad \tau_{yz} = \frac{\eta(W \sin \phi + \gamma(2 - 6Z + 3Z^2))}{h}.$$

Несложно убедиться, что они являются строго монотонными функциями на интервале  $(0, 1)$  и потому могут обращаться в нуль, если будут выполняться неравенства:

$$(W \cos \phi + 2\psi)(W \cos \phi - \psi) < 0 \quad \text{или} \quad (W \sin \phi + 2\gamma)(W \sin \phi - \gamma) < 0.$$

### 5. Анализ концентрационного поля

Концентрационное поле  $C$  определяется суперпозицией нескольких полей: поля фоновой концентрации  $C_0$ , пространственно неоднородных полей концентраций  $C_1x$ ,  $C_2y$ . Поскольку пространственные градиенты концентрации  $C_1$  и  $C_2$  оказались, согласно точному решению (7), постоянными функциями, их добавление к фоновой концентрации не изменит форму профиля поля  $C_0$ ,

а только сдвинет его на величину, зависящую от значений координат  $x$  и  $y$ . Однако такой сдвиг может привести к изменению числа нулевых точек (появлению новых или исчезновению уже существующих) в поле концентрации относительно их числа при фоновой концентрации  $C_0$ .

Рассмотрим подробнее свойства фоновой концентрации. Начнем с частного случая неподвижных границ ( $W = 0$ ). Теперь коэффициент  $\lambda_2$  в точном решении (7) обращается в нуль, и фоновая концентрация определяется полиномом

$$C_0 = \lambda_1(-1+Z)(8+8Z+8Z^2-12Z^3+3Z^4).$$

При этом коэффициент  $\lambda_1$  неотрицателен при любых значениях граничных параметров, а многочлен  $(-1+Z)(8+8Z+8Z^2-12Z^3+3Z^4)$  является строго монотонно возрастающей отрицательной функцией. В результате фоновая концентрация является неположительной строго монотонной функцией вертикальной координаты  $Z$  (Рис. 3). Факт, что фоновая концентрация принимает только отрицательные значения внутри исследуемого слоя, говорит о том, что ее наибольшее значение достигается на верхней границе слоя, принятой за отсчетный уровень.

Пусть теперь  $W \neq 0$ . Тогда точное решение для фоновой концентрации можно представить в эквивалентном виде:

$$C_0 = \lambda_2 \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (-1+Z)(8+8Z+8Z^2-12Z^3+3Z^4) + (-1+Z^3) \right].$$

Зависимость числа и положения нулевых точек фоновой концентрации от параметра  $\lambda_1/\lambda_2$  приведена на рисунке 4. Хорошо видно, что фоновая концентрация расслаивается на две зоны относительно отсчетного значения (см. Рис. 5). Важно, что поле фоновой концентрации  $C_0$  может принимать

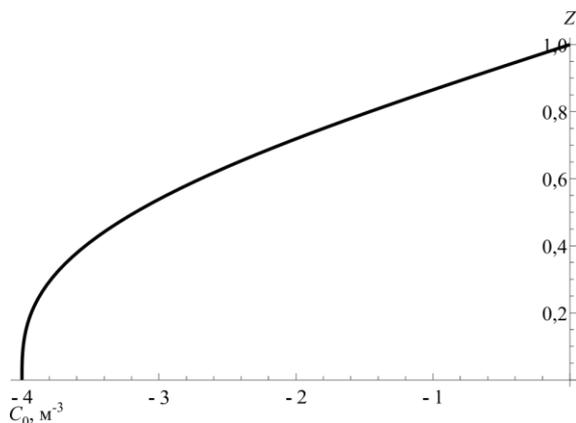


Рис. 3. Профиль фоновой концентрации  $C_0$  при  $W = 0$  и  $\lambda_1 = 0,5$

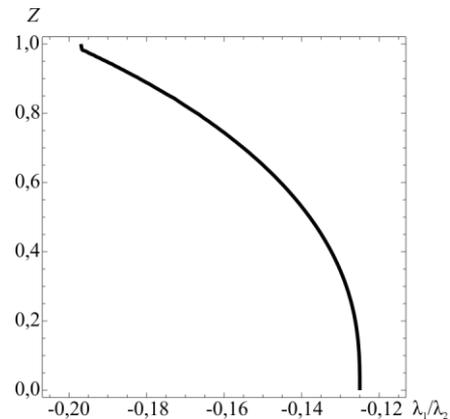


Рис. 4. Кривая нулевых точек фоновой концентрации  $C_0$

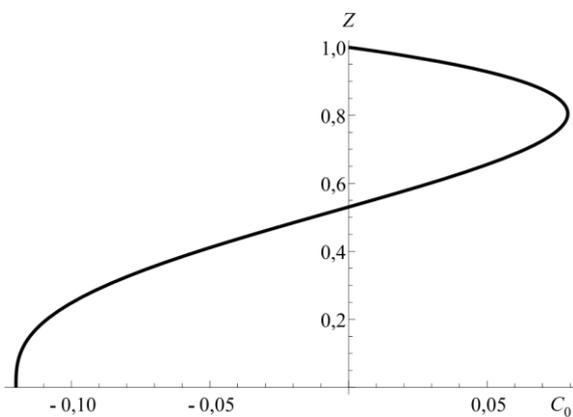


Рис. 5. Профиль фоновой концентрации при  $\lambda_1 = 0,14$ ,  $\lambda_2 = -1$

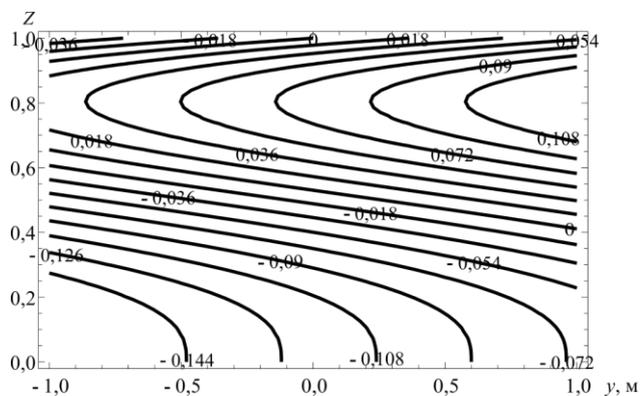


Рис. 6. Изолинии концентрационного поля  $C$  в сечении  $x = 0$  при  $\lambda_1 = 0,14$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $b = 0,05$

и отрицательные значения, поскольку фактически рассматривается не концентрация как таковая, а ее отклонение от некоторого равновесного значения. Это отклонение может происходить как в сторону больших значений (и тогда функция  $C_0$  строго положительна), так и в сторону меньших значений (при отрицательных значениях функции  $C_0$ ).

Опираясь на структуру точного решения для фоновой концентрации  $C_0$ , можно рассчитать положение того подслоя, где функция  $C_0$  принимает максимальное (по модулю) значение. Применительно к рассматриваемому течению максимальное значение достигается либо на границах слоя, либо в точке экстремума профиля фоновой концентрации. Значение на верхней границе всегда нулевое, а на нижней определяется суммой  $-(8\lambda_1 + \lambda_2)$ . Положение точки экстремума профиля находится из следующего уравнения:

$$C'_0 = 3Z^2(5\lambda_1 Z^2 - 20\lambda_1 Z + 20\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в скобках, равен  $-20\lambda_1\lambda_2$ . Коэффициент  $\lambda_1$  всегда принимает только неотрицательные значения, следовательно, экстремумы имеют место лишь при  $\lambda_2 < 0$ . Несложно убедиться, что единственный корень приведенного выше уравнения, который при определенном сочетании краевых параметров может принадлежать интервалу  $(0, 1)$ , это  $Z_1 = 2 - \sqrt{-\lambda_2/(5\lambda_1)}$ . Значение фоновой концентрации в этой точке экстремума определяется простой подстановкой:

$$C_0(Z_1) = \frac{1000\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \left( -75 + 2\sqrt{-\frac{5\lambda_2}{\lambda_1}} \right) - 25\lambda_1\lambda_2 \left( -35 + 8\sqrt{-\frac{5\lambda_2}{\lambda_1}} \right)}{125\lambda_1}.$$

Если значение  $C_0(Z_1)$  окажется больше по абсолютной величине суммы  $-(8\lambda_1 + \lambda_2)$ , то максимального (по модулю) значения фоновая концентрация достигнет внутри рассматриваемого слоя, если меньше, то на нижней границе этого слоя.

Линии уровня результирующего концентрационного поля в сечении  $x = 0$  при наличии нулевой точки у фоновой концентрации приведены на рисунке 6. Аналогичная картина наблюдается и в сечении  $y = 0$ . Рисунок иллюстрирует тот факт, что имеет место возвратный характер распределения изолиний поля концентрации, то есть в выбранном (по  $y$ ) сечении определенный уровень концентрации примеси может наблюдаться в разных подслоях исследуемого горизонтального слоя.

### 6. Анализ поля давления

Поле давления, как и поле концентрации, формируется в результате наложения нескольких полей, основным из которых является фоновое давление  $P_0$ . Однако, в отличие от горизонтальных градиентов концентрации  $C_1, C_2$ , горизонтальные градиенты давления  $P_1, P_2$  не являются постоянными. Компоненты  $P_1, P_2$ , согласно точному решению (7), есть линейные функции, принимающие значения только одного знака во всем слое. Знаки градиентов  $P_1, P_2$  определяются знаками параметров  $a$  и  $b$ , задаваемых на верхней границе слоя. В результате поля давления  $P_1x, P_2y$  нелинейным образом зависят от введенных координат, а значит, их добавление к фоновому давлению  $P_0$  может сильно исказить картину распределения его изолиний.

Изучим свойства фонового давления. Пусть для начала  $W = 0$ . Тогда фоновое давление можно представить в виде:

$$P_0 = \xi_3 \left[ \frac{S_0}{\xi_3} + (-1 + Z)^2 (11 + 6Z + Z^2 - 4Z^3 + Z^4) \right].$$

Отметим, что исследование  $P_0$  при  $\xi_3 = 0$  здесь не обсуждается вследствие его тривиальности.

Профили фонового давления  $P_0$  в рассматриваемом частном случае  $W = 0$  при различных значениях отношения  $S_0/\xi_3$  приведены на рисунке 7. Причем изменение отношения  $S_0/\xi_3$  определяет сдвиг

профиля фонового давления  $P_0$ . Очевидно, что фоновое давление при  $W = 0$  может иметь не более одной нулевой точки внутри слоя.

Пусть теперь  $W \neq 0$ . Это означает, что на формирование фонового давления оказывает влияние дополнительный поток, вызванный движением верхней границы, который характеризуется монотонной функцией вертикальной безразмерной координаты  $Z$ . Учет этого потока приводит к появлению дополнительной нулевой точки (точки стратификации) фонового давления (см. Рис. 8). При этом положениями нулевых точек можно управлять, варьируя характеристики жидкости и значения параметров, задаваемых на границах области течения.

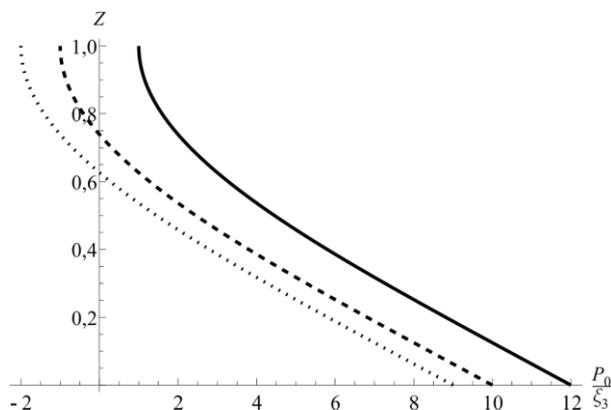


Рис. 7. Профили фонового давления  $P_0/\xi_3$  при  $W = 0$  и различных значениях  $S_0/\xi_3$ : 1 – сплошная линия, –1 – штриховая линия, –2 – пунктирная линия

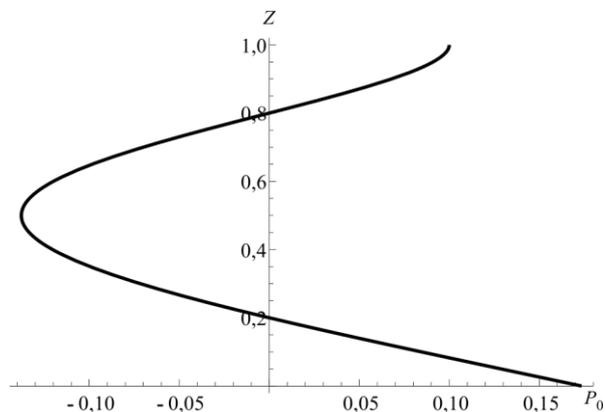


Рис. 8. Профиль фонового давления в общем случае

## 7. Заключение

В статье предложено точное решение, обобщающее семейство решений Остроумова–Бириха на течения с установившейся концентрационной конвекцией. Исследованы гидродинамические поля, определяющие структуру течения бинарной жидкости. Показано, что в жидкости регистрируются возвратные течения (противотечения) и существует застойная точка. При исследовании поля концентрации и поля давления выявлено наличие у них таких параметров, при которых наблюдается локализация полей вблизи границ слоя жидкости.

## Литература

1. Булгаков С.Н. Исследование роли халинных факторов в формировании циркуляции и структуры вод Черного моря / Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.12. Севастополь, Мор. гидрофиз. ин-т., 1986. 155 с.
2. Булгаков С.Н., Коротаев Г.К. Аналитическая модель струйной циркуляции в замкнутых водоемах // Морской гидрофизический журнал. 1987. № 3. С. 434-446.
3. Аристов С.Н., Шварц К.Г. О влиянии солеобмена на циркуляцию жидкости в замкнутом водоеме // Морской гидрофизический журнал. 1990. № 4. С. 38-42. (English version <https://doi.org/10.1007/BF02346081>)
4. Овчинников И.М., Титов В.Б. Антициклоническая завихренность течений в прибрежной зоне Чёрного моря // ДАН СССР. 1990. Т. 314, № 5. С. 1236-1239.
5. Иванов В.А., Белокопытов В.Н. Океанография Черного моря. Севастополь: Морской гидрофизический институт, 2011. 212 с.
6. Зуев А.Л. Разрыв слоя жидкости концентрационно-капиллярным течением // Коллоидный журнал. 2007. Т. 69, № 3. С. 315-322. (English version <https://doi.org/10.1134/S1061933X07030040>)
7. Бирих Р.В., Рудаков Р.Н. Влияние интенсивности адсорбционно-десорбционных процессов на концентрационную конвекцию около капли в горизонтальном канале // Вычисл. мех. сплош. сред. 2010. Т. 3, № 1. С. 24-31. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2010.3.1.3>
8. Холпанов Л.П., Запорожец Е.П., Зиберт Г.К., Кашицкий Ю.А. Математическое моделирование нелинейных термогидрогазодинамических процессов в многокомпонентных струйных течениях. М.: Наука, 1998. 320 с.
9. Косов В.Н., Мукамеденкызы В., Федоренко О.В. Некоторые особенности смешения тройных газовых смесей на границе смены режимов «диффузия – концентрационная гравитационная конвекция» в квазистационарных условиях // Вестник МГОУ. Сер.: Естественные науки. 2018. № 2. С. 125-133. <https://doi.org/10.18384/2310-7189-2018-2-125-133>
10. Попов В.Г., Сиденко Д.В., Токарев С.А. Механизм и геохимические последствия плотностной конвекции в гидростратифицированной среде // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2012. № 6(169). С. 97-100.
11. Косов В.Н., Федоренко О.В., Жакебаев Д.Б., Кизбаев А.П. Особенности возникновения структурированных формирований на границе смены режимов «диффузия-концентрационная конвекция» при изотермическом

- смешении бинарной смеси, в равной степени разбавленной третьим компонентом // Т и А. 2019. Т. 26, № 1. С. 31-40. (English version <https://doi.org/10.1134/S0869864319010049>)
12. Красноперов Я.И., Склярченко М.С. Фотометрический способ определения коэффициента диффузии в водных растворах красителей в тонкой горизонтальной ячейке // Приборы и техника эксперимента. 2017. № 6. С. 123-129. <https://doi.org/10.7868/S0032816217060222>
  13. Жуков М.Ю., Цывенкова О.А. Моделирование гравитационной концентрационной конвекции при изотахофорезе // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2019. № 4(204). С. 27-35. <https://doi.org/10.23683/0321-3005-2019-4-27-35>
  14. Черепанов А.Н., Черепанова В.К., Шаранов В.Н. О возможной роли термоконцентрационной конвекции при фракционировании компонентов в базитовых интрузивах // ДАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 542-546.
  15. Завгородний П.Ф., Колесник В.И., Повх И.Л., Севостьянов Г.М. Концентрационная конвекция в затвердевающем расплаве // ПМТФ. 1977. № 6. С. 98-103. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00851157>)
  16. Tao C., Wu W.-T., Massoudi M. Natural convection in a non-newtonian fluid: effects of particle concentration // Fluids. 2019. Vol. 4. P. 192-206. <https://doi.org/10.3390/fluids4040192>
  17. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
  18. Кобосынов Б.К., Пухначев В.В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости / Под ред. В.С. Авдеевского. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. 167 с. С. 116-125.
  19. Коробкин А.А. Плоская задача об ударе вертикальной стенкой по слою частично аэрированной жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 5. С. 34-46. (English version <https://doi.org/10.1007/s10808-006-0100-6>)
  20. Жданов С.К., Власов В.Л. О приближениях «мелкой» и «глубокой воды» в теории разрывной неустойчивости тонкого токового слоя // ЖЭТФ. 1998. Т. 113, № 4. С. 1313-1318. (English version <https://doi.org/10.1134/1.558531>)
  21. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films // Rev. Mod. Phys. 1997. Vol. 69. P. 931-980. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.931>
  22. Duffy B.R., Langer M., Wilson S.K. Closed-form solution of a thermocapillary free-film problem due to Pukhnachev // Eur. J. Appl. Math. 2015. Vol. 26. P. 721-741. <https://doi.org/10.1017/S095679251500008X>
  23. Couette M. Études sur le frottement des liquides // Ann. Chim. Phys. 1890. Vol. 21. P. 433-510.
  24. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. 1840. Vol. 11. P. 961-967.
  25. Ekman V.W. On the influence of the earth's rotation on ocean-currents // Ark. Mat. Astron. Fys. 1905. Vol. 2, No. 11. P. 1-53.
  26. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. 1851. Vol. 9. P. 8-106.
  27. Stokes G.G. On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids // Transactions of the Cambridge Philosophical Society. 1845. Vol. 8. P. 287-319. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511702242.005>
  28. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ. 2009. Т. 43, № 5. С. 547-566. (English version <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>)
  29. Muradov Kh., Davies D. Linear non-adiabatic flow of an incompressible fluid in a porous layer – Review, adaptation and analysis of the available temperature models and solutions // J. Petrol. Sci. Eng. 2012. Vol. 86-87. P. 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2012.03.011>
  30. Yun T. Review on analytical solutions for slump flow of cement paste // Int. J. Highw. Eng. 2016. Vol. 18. P. 21-32. <https://doi.org/10.7855/IJHE.2016.18.3.021>
  31. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69-72. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00914697>)
  32. Smith M.K., Davis S.H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part. 1. Convective instabilities // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 132. P. 119-144. <https://doi.org/10.1017/S0022112083001512>
  33. Ortiz-Pérez A.S., Dávalos-Orozco L.A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient // Phys. Fluid. 2011. Vol. 23. 084107. <https://doi.org/10.1063/1.3626009>
  34. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гостехиздат, 1952. 256 с.
  35. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь: Изд-во Пермского гос. ун-та, 2006. 153 с.
  36. Бекежанова В.Б. О смене форм неустойчивости стационарного течения двухслойной жидкости в наклонном канале // Изв. РАН. МЖГ. 2011. № 4. С. 24-34. (English version <https://doi.org/10.1134/S001546281104003X>)
  37. Гончарова О.Н. Групповая классификация уравнений свободной конвекции // Динамика сплошной среды. 1987. Вып. 79. С. 22-35.
  38. Adreiev V.K., Stepanova I.V. Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 228. P. 59-67. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.002>
  39. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 3-20. (English version <https://doi.org/10.1134/S0021894413020016>)
  40. Андреев В.К., Степанова И.В. Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека-Буссинеска // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 13-24. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462816020022>)
  41. Бирих Р.В., Пухначев В.В., Фроловская О.А. Конвективное течение в горизонтальном канале с неньютоновской реологией поверхности при нестационарном продольном градиенте температуры // Изв. РАН. МЖГ. 2015. № 1. С. 192-198. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462815010172>)
  42. Гончарова О.Н., Резанова Е.В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 2. С. 68-79. (English version <https://doi.org/10.1134/S0021894414020072>)

43. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с внутренним линейным источником тепла // ПММ. 2018. Т. 82, № 1. С. 25-30. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462818040237>)
44. *Рафик Ш., М. Наваз М., Мустахсан М.* Течение жидкости Кэссона через пористую среду, вызванное некоаксиальным вращением пористого диска и окружающей жидкости // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 4. С. 31-38. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180405>
45. *Пухначёв В.В.* Нестационарные аналоги решения Бириха // Изв. АлтГУ. 2011. № 1-2(69). С. 62-69.
46. *Шварц К.Г.* Плоскопараллельное адвективное течение в горизонтальном слое несжимаемой жидкости с твердыми границами // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 4. С. 26-30. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040036>
47. *Андреев В.К.* Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения: Препр. / ИВМ СО РАН. Красноярск, 2010. 24 с.
48. *Pukhnachev V.V.* Group-theoretical methods in the convection problems // Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences / Ed. M.D. Todorov, C.I. Christov. American Institute of Physics, 2011. P. 31-42.
49. *Andreev V.K., Gaponenko Ya.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V.* Mathematical models of convection. Berlin, Boston: Berlin Walter De Gruyter Publ., 2012. 417 p.
50. *Hadji L.* Nonlinear Stable steady solutions to the Ostroumov problem // Int. J. Heat Mass Tran. 2014. Vol. 82. P. 604-612. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.10.071>
51. *Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю.* Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // Вычис. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 2. С. 230-242. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.20>
52. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф.* Нестационарная конвекция Бенара–Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // ТОХТ. 2016. Т. 50, № 2. С. 137-146. <https://doi.org/10.7868/S0040357116020019>
53. *Браун Д.А., Мошова Е.А.* Особенности формирования волн плотности в двухслойной системе смешивающихся реагирующих жидкостей // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 3. С. 302-322. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.23>
54. *Marangoni C.* Sull'espansione delle gocce d'un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido. Pavia: Tipografia dei Fratelli Fusi, 1865. 66 p.
55. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю., Сневак Л.Ф.* Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 445-456. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38>
56. *Bekezhanova V., Goncharova O.* Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. Vol. 894. 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012023>
57. *Abdullah A.A., Alraiqib N.M., Lindsay K.A.* Modelling the stability of Marangoni convection in a layer of nanofluid // Int. J. Therm. Sci. 2020. Vol. 151. 106228. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.106228>
58. *Trouette B., Chénier E., Doumenc F., Delcarte C., Guerrier B.* Transient Rayleigh-Bénard-Marangoni solutal convection // Phys. Fluid. 2012. Vol. 24. 074108. <https://doi.org/10.1063/1.4733439>
59. *Kumar A., Prasad S., Pal P., Narayanan S., Mandal D.* Circulation inside a methanol – water drop evaporating in a heated atmosphere // Colloids and Interface Science Communications. 2018. Vol. 24. P. 82-86. <https://doi.org/10.1016/j.colcom.2018.04.003>
60. *Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю.* О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 4. С. 651-657.
61. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Крупномасштабная слоистая стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости под действием касательных напряжений на верхней границе. Исследование поля скоростей // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 1. С. 180-196. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1527>
62. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Точные решения для естественной конвекции слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости при задании тангенциальных сил и линейного распределения температуры на границах слоя // DReaM. 2017. № 4. С. 16-31. <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2017.4.016-031>
63. *Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.* Слоистая конвекция Бенара-Марангони при теплообмене по закону Ньютона-Рихмана // Компьютерные исследования и моделирование. 2016. Т. 8, № 6. С. 927-940. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2016-8-6-927-940>
64. *Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю.* Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака // Тр. ИММ УрО РАН. 2017. Т. 23, № 2. С. 32-41.
65. *Князев Д.В.* Плоские течения вязкой бинарной жидкости между подвижными твердыми границами // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 2. С. 66-72. <https://doi.org/10.1134/S0021894411020088>
66. *Goldstein S.* Modern developments in fluid mechanics. Oxford: Oxford At The Olarendon Press, 1938. 409 p.
67. *Бурмашева Н.В., Просвиряков Е.Ю.* Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // ТОХТ. 2020. Т. 54, № 1. С. 114-124. <https://doi.org/10.31857/S0040357119060034>

## References

1. *Bulgakov S.N.* *Issledovaniye roli khalinnykh faktorov v formirovaniі tsirkulyatsii i struktury vod Chernogo morya* [Investigation of the role of haline factors in the formation of the circulation and structure of the Black Sea]. PhD Dissertation, Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol', 1986. 155 p.
2. *Bulgakov S.N., Korotaev G.K.* Analiticheskaya model' struynoy tsirkulyatsii v zamknutykh vodoyemakh [An analytical model of jet circulation in closed reservoirs]. *Morskoy Gidrofizicheskiy Zhurnal – Soviet Journal of Physical Oceanography*, 1987, no. 3, pp. 434-446.
3. *Aristov S.N., Shvarts K.G.* On the influence of salinity exchange on the circulation of a fluid in an enclosed basin. *Soviet journal of physical oceanography*, 1991, vol. 2, pp. 293-298. <https://doi.org/10.1007/BF02346081>

4. Ovchinnikov I.M., Titov V.B. Anticiklonicheskaya zavikhrennost' techeniy v pribrezhnoy zone Chernogo moray [Anticyclonic vorticity of currents in the offshore zone of the Black Sea]. *DAN SSSR – Reports of the USSR Academy of Sciences*, 1990, vol. 314, no. 5, pp. 1236-1239.
5. Ivanov V.A., Belokopytov V.N. *Okeanografiya Chernogo morya* [Oceanography of the Black Sea]. Sevastopol', Marine Hydrophysical Institute, 2011. 212 p.
6. Zuev A.L. The rupture of a liquid layer by solutocapillary flow. *Colloid J.*, 2007, vol. 69, pp. 286-293. <https://doi.org/10.1134/S1061933X07030040>
7. Birikh R.V., Rudakov R.N. Effect of the adsorption-desorption process intensity on solutal convection near a drop in a horizontal channel. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, pp. 131-137. <https://doi.org/10.1134/S0015462811010157>
8. Kholpanov L.P., Zaporozhets E.P., Zibert G.K., Kashitskiy Yu.A. *Matematicheskoye modelirovaniye nelineynykh termogidrogazodinamicheskikh protsessov v mnogokomponentnykh struynykh techeniyakh* [Mathematical modeling of nonlinear thermogasdynamical processes in multicomponent jet flows]. Moscow, Nauka, 1998. 320 p.
9. Kossov V., Mukamedenkyzy V., Fedorenko O. Some mixing features of ternary gas mixtures on the regime transition boundary between two mixing regimes - diffusion to concentration gravitational convection - in quasi-stationary conditions. *Vestnik MGOU. Sriya: Estestvennyye nauki – Bulletin MSRU. Series: Natural sciences*, 2018, no. 2, pp. 125-133. <https://doi.org/10.18384/2310-7189-2018-2-125-133>
10. Popov V.G., Sidenko D.V., Tokarev S.A. The mechanism and geochemical consequences of density convection in hydrostratosphe. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Tekhnicheskiye nauki – University news. North-Caucasian region. Technical sciences series*, 2012, no. 6(169), pp. 97-100.
11. Kossov V.N., Fedorenko O.V., Zhakebaev D.B., Kizbaev A.P. Peculiarities of the rise of structured formations at the boundary of the change of the regimes "diffusion-concentration convection" at an isothermal mixing of a binary mixture equally diluted by the third component. *Thermophys. Aeromech.*, 2019, vol. 26, pp. 27-35. <https://doi.org/10.1134/S0869864319010049>
12. Krasnoperov Y.I., Silyarenko M.S. A photometric method for determining the diffusivity of dyes in aqueous solutions in a thin horizontal cell. *Instrum. Exp. Tech.*, 2017, vol. 60, pp. 896-901. <https://doi.org/10.1134/S0020441217060161>
13. Zhukov M.Yu., Tsyvenkova O.A. Simulation of gravitational concentration convection in isotachophoresis. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki – Bulletin of higher education institutes. North Caucasus region. Natural science*, 2019, no. 4(204), pp. 27-35. <https://doi.org/10.23683/0321-3005-2019-4-27-35>
14. Cherepanov A.N., Cherepanova V.K., Sharapov V.N. Possible role of thermal concentration convection during the fractionation of components in basic intrusions. *Dokl. Earth Sci.*, 2005, vol. 404, pp. 1126-1130.
15. Zavgorodnii P.F., Kolesnik V.I., Povkh I.L., Sevost'yanov G.M. Concentration convection in a solidifying melt. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1977, vol. 18, pp. 812-815. <https://doi.org/10.1007/BF00851157>
16. Tao C., Wu W.-T., Massoudi M. Natural convection in a non-newtonian fluid: effects of particle concentration. *Fluids*, 2019, no. 4, pp. 192-206. <https://doi.org/10.3390/fluids4040192>
17. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Convective stability of incompressible fluids*. Keter Publishing House, 1976. 330 p.
18. Kopbosynov B.K., Pukhnachev V.V. Termokapillyarnoye dvizheniye v tonkom sloye zhidkosti [Thermocapillary motion in a thin liquid layer]. // *Gidromekhanika i processy perenosa v nevesomosti* [Hydromechanics and transport processes in zero gravity], ed. by V.S. Avduevskii. Sverdlovsk: UNTs AN SSSR, 1983. 167 p. Pp. 116-125.
19. Korobkin A.A. Two-dimensional problem of the impact of a vertical wall on a layer of a partially aerated liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2006, vol. 47, pp. 643-653. <https://doi.org/10.1007/s10808-006-0100-6>
20. Zhdanov S.K., Vlasov V.L. "Shallow-water" and "deep-water" approximations in the theory of the disruptive instability of thin current-carrying layers. *J. Exp. Theor. Phys.*, 1998, vol. 86, pp. 717-719. <https://doi.org/10.1134/1.558531>
21. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev. Mod. Phys.*, 1997, vol. 69, pp. 931-980. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.69.931>
22. Duffy B.R., Langer M., Wilson S.K. Closed-form solution of a thermocapillary free-film problem due to Pukhnachev. *Eur. J. Appl. Math.*, 2015, vol. 26, pp. 721-741. <https://doi.org/10.1017/S095679251500008X>
23. Couette M. Études sur le frottement des liquides [Studies on the friction of liquids]. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, vol. 21, pp. 433-510.
24. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres [Experimental research on the movement of liquids in tubes of very small diameters]. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences – Weekly reports of the sessions of the Academy of Sciences*, 1840, vol. 11, pp. 961-967.
25. Ekman V.W. On the influence of the earth's rotation on ocean-currents. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1-53.
26. Stokes G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. *Camb. Philo. Trans.*, 1851, vol. 9, pp. 8-106.
27. Stokes G.G. On the theories of internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 1845, vol. 8, pp. 287-319. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511702242.005>
28. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyaniin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642-662. <https://doi.org/10.1134/S0040579509050066>
29. Muradov Kh., Davies D. Linear non-adiabatic flow of an incompressible fluid in a porous layer – Review, adaptation and analysis of the available temperature models and solutions. *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2012, vol. 86-87, pp. 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2012.03.011>
30. Yun T. Review on analytical solutions for slump flow of cement paste. *Int. J. Highw. Eng.*, 2016, vol. 18, pp. 21-32. <https://doi.org/10.7855/IJHE.2016.18.3.021>

31. Birikh R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1966, vol. 7, pp. 43-44. <https://doi.org/10.1007/BF00914697>
32. Smith M.K., Davis S.H. Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part. 1. Convective instabilities. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 132, pp. 119-144. <https://doi.org/10.1017/S0022112083001512>
33. Ortiz-Pérez A.S., Dávalos-Orozco L.A. Convection in a horizontal fluid layer under an inclined temperature gradient. *Phys. Fluid.*, 2011, vol. 23, 084107. <https://doi.org/10.1063/1.3626009>
34. Ostroumov G.A. *Free convection under the condition of the internal problem*. NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, 1958. 233 p.
35. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevyye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloye zhidkosti* [Eddy flows of an advective nature in a rotating fluid layer]. Perm, Perm State Univ. Publ., 2006. 153 p.
36. Bekezhanova V.B. Change of the types of instability of a steady two-layer flow in an inclined channel. *Fluid Dyn.*, 2011, vol. 46, pp. 525-535. <https://doi.org/10.1134/S001546281104003X>
37. Goncharova O.N. Gruppovaya klassifikatsiya uravneniy svobodnoy konveksii [Group classification of equations of free convection]. *Dinamika sploshnoy sredy – Continuous Dynamics*, 1987, no. 79, pp. 22-35.
38. Adreev V.K., Stepanova I.V. Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force. *Appl. Math. Comput.*, 2014, vol. 228, pp. 59-67. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.002>
39. Andreev V.K., Bekezhanova V.B. Stability of non-isothermal fluids (Review). *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, pp. 171-184. <https://doi.org/10.1134/S0021894413020016>
40. Andreev V.K., Stepanova I.V. Unidirectional flows of binary mixtures within the framework of the Oberbeck–Boussinesq model. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, pp. 136-147. <https://doi.org/10.1134/S0015462816020022>
41. Birikh R.V., Pukhnachev V.V., Frolovskaya O.A. Convective flow in a horizontal channel with non-Newtonian surface rheology under time-dependent longitudinal temperature gradient. *Fluid Dyn.*, 2015, vol. 50, pp. 173-179. <https://doi.org/10.1134/S0015462815010172>
42. Goncharova O.N., Rezanova E.V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, pp. 247-257. <https://doi.org/10.1134/S0021894414020072>
43. Shvarts K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal layer of an incompressible fluid with an internal linear heat source. *Fluid Dyn.*, 2018, vol. 53, pp. S24-S28. <https://doi.org/10.1134/S0015462818040237>
44. Rafiq Sh., Nawaz M., Mustahsan M. Casson fluid flow due to non-coaxial rotation of a porous disk and the fluid at infinity through a porous medium. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, pp. 601-607. <https://doi.org/10.1134/S0021894418040053>
45. Pukhnachev V.V. Non-stationary analogues of the Birikh solution. *Izv. AltGU –News of AltSU*, 2011, no. 1-2(69), pp. 62-69.
46. Schwarz K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, pp. 438-442. <https://doi.org/10.1134/S0015462814040036>
47. Andreev V.K. *Resheniya Birikha uravneniy konveksii i nekotoryye ego obobshcheniya* [Birich solutions of convection equations and some generalizations of it]. Preprint, Russian Academy of Sciences. Institute of Computational Modeling. Krasnoyarsk, 2010. 24 p.
48. Pukhnachev V.V. Group-theoretical methods in the convection problems. *Application of mathematics in technical and natural sciences*, ed. M.D. Todorov, C.I. Christov. American Institute of Physics, 2011. Pp. 31-42.
49. Andreev V.K., Gaponenko Ya.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical models of convection*. Berlin, Boston: Berlin Walter De Gruyter Publ., 2012. 417 p.
50. Hadji L. Nonlinear Stable steady solutions to the Ostroumov problem. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2014, vol. 82, pp. 604-612. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.10.071>
51. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Vychisl. mekh. splosh. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 230-242. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.20>
52. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, pp. 132-141. <https://doi.org/10.1134/S0040579516020019>
53. Bratsun D.A., Mosheva E.A. Peculiar properties of density wave formation in a two-layer system of reacting miscible liquids. *Vychisl. mekh. splosh. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 302-322. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.23>
54. Marangoni C. *Sull'espansione delle gocce d'un liquido galleggiante sulla superficie di altro liquido* [On the expansion of the drops of a liquid floating on the surface of another liquid]. Pavia: Tipografia dei Fratelli Fusi, 1865. 66 p.
55. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychisl. mekh. splosh. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445-456. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.38>
56. Bekezhanova V., Goncharova O. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 894, 012023. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/894/1/012023>
57. Abdullah A.A., Alraihib N.M., Lindsay K.A. Modelling the stability of Marangoni convection in a layer of nanofluid. *Int. J. Therm. Sci.*, 2020, vol. 151, 106228. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2019.106228>
58. Trouette B., Chénier E., Doumenc F., Delcarte C., Guerrier B. Transient Rayleigh–Bénard–Marangoni solutal convection. *Phys. Fluid.*, 2012, vol. 24, 074108. <https://doi.org/10.1063/1.4733439>
59. Kumar A., Prasad S., Pal P., Narayanan S., Mandal D. Circulation inside a methanol – water drop evaporating in a heated atmosphere. *Colloids and Interface Science Communications*, 2018, vol. 24, pp. 82-86. <https://doi.org/10.1016/j.colcom.2018.04.003>

60. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika – Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651-657
61. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. A large-scale layered stationary convection of an incompressible viscous fluid under the action of shear stresses at the upper boundary. Velocity field investigation. *Vestnik SamGTU. Seriya fiziko-matem. nauki – Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2017, vol. 21, no 1, pp. 180-196. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1527>
62. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for natural convection of layered flows of a viscous incompressible fluid with specified tangential forces and the linear distribution of temperature on the layer boundaries. *DReaM*, 2017, no.4, pp.16-31. <https://doi.org/10.17804/2410-9908.2017.4.016-031>
63. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Layered B'enard-Marangoni convection during heat transfer according to the Newton's law of cooling. *Komp'yuternyye issledovaniya i modelirovanie – Computer Research and Modeling*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 927-940. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2016-8-6-927-940>
64. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN – Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 32-41.
65. Knyazev D.V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2011, vol. 52, pp. 212-217. <https://doi.org/10.1134/S0021894411020088>
66. Goldstein S. *Modern developments in fluid mechanics*. Oxford at the Olarendon Press, 1938. 409 p.
67. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2020, vol. 54, pp. 230-239. <https://doi.org/10.1134/S0040579519060034>.

*Поступила в редакцию 16.09.2020; после доработки 24.09.2020; принята к опубликованию 28.09.2020*