

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.23](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.23)
 УДК 532.517.013.4: 536.25: 551.511.3

К ТЕОРИИ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ НАД ТЕРМИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Л.Х. Ингель^{1,2}, А.А. Макоско²

¹НПО «Тайфун», Обнинск, Российская Федерация

²Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Москва, Российская Федерация

Рассмотрена теоретическая модель циркуляций над термически неоднородной горизонтальной поверхностью в поле силы тяжести, более общая, чем в ряде предыдущих работ. Модель свободна от предположения об относительной тонкости экмановского пограничного слоя, которое (будучи не всегда обоснованным) существенно упрощало расчеты, поскольку с ним связывалось наличие в задаче малого параметра. На основе предложенной модели найдено аналитическое решение линейной стационарной двумерной задачи конвективного течения в полубесконечной устойчиво стратифицированной среде, вращающейся вокруг вертикальной оси. На нижней границе задавались стационарные двумерные гармонические по горизонтали термические неоднородности и условия прилипания и непротекания, предполагалось затухание всех возмущений с высотой. Вводились определяющие параметры – аналоги чисел Релея и Тейлора, в которых в качестве пространственного масштаба фигурировал заданный горизонтальный масштаб термических неоднородностей. Для мезомасштабных атмосферных течений, для которых характерны очень большие значения этих чисел, рассмотрение ограничилось предельным случаем, когда значения чисел Релея много больше значений чисел Тейлора, но меньше последних в степени $3/2$ (ситуация, характерная для таких атмосферных течений). Получены соотношения, которые позволили проанализировать зависимости составляющих скорости и спиральности от параметров задачи. Доказан ряд общих утверждений о соотношениях разных «составляющих» спиральности в обсуждаемых термических циркуляциях, в частности, в атмосферных течениях с характерными горизонтальными масштабами порядка сотен километров. Приведены примеры численных расчетов вертикального распределения этих составляющих. Показано, что интегральный вклад «радиальной» и «азимутальной» спиральностей в приведенных ситуациях практически одинаков, но их вертикальные зависимости разные. Установлено, что пограничный слой у нижней границы в данной задаче может заметно отличаться от экмановского.

Ключевые слова: конвективные течения, горизонтальные термические неоднородности, линейная теория, стратификация, вращение, атмосфера, спиральность

TO THE THEORY OF CONVECTIVE FLOWS IN A ROTATING STRATIFIED MEDIUM OVER A THERMALLY INHOMOGENEOUS SURFACE

L.Kh. Ingel^{1,2} and A.A. Makosko²

¹Research and Production Association "Typhoon", Obninsk, Russian Federation

²Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS, Moscow, Russian Federation

A theoretical model of circulations over a thermally inhomogeneous horizontal surface in a gravity field is considered. The model is more general than that used in a number of previous works. It is free from the assumption about the relative thinness of the Ekman boundary layer, which (although not always justified) significantly simplified the calculations, since it was associated with the presence of a small parameter in the problem. On the basis of the proposed model, an analytical solution is found for a linear stationary two-dimensional convective flow problem in a semi-infinite stably stratified medium rotating around a vertical axis. Constitutive parameters are introduced – analogs of the Rayleigh and Taylor numbers, in which a given horizontal scale of thermal inhomogeneities appears as a spatial scale. For mesoscale atmospheric currents, which are characterized by very large values of these numbers, the consideration is limited to the case when the values of the Rayleigh numbers are much larger than the values of the Taylor numbers, but less than the latter to the $3/2$ power (a situation typical for such atmospheric currents). Relationships for analyzing the dependences of the components of velocity and helicity on the parameters of the problem are obtained. A number of general statements about the ratios of different helicity "components" in the discussed thermal circulations, in particular, in atmospheric currents with characteristic horizontal scales of the order of hundreds of kilometers, have been proved. Examples of numerical calculations of the vertical distribution of these components are given.

Key words: convective flows, horizontal thermal inhomogeneities, linear theory, stratification, rotation, atmosphere, helicity

1. Введение

В жидкой (газообразной) среде над термически неоднородной горизонтальной поверхностью в поле силы тяжести возникают конвективные течения, которые могут играть важную роль, в частности, в динамике атмосферы. Им посвящена обширная литература (см., например, [1–6] и библиографию в этих работах). Много полезной информации удастся получить уже из анализа линейных задач, имеющих смысл при относительно небольших амплитудах термических неоднородностей (см. [1, 3–6]). В этих и ряде других публикаций предлагаются линейные модели мезомасштабных течений в устойчиво стратифицированной вращающейся среде над неоднородно нагретой поверхностью — мезомасштабных атмосферных течений. Но, ввиду сложности задачи и разнообразия возможных сочетаний параметров, далеко не все представляющие интерес ситуации достаточно исследованы. Так, в [6] образующийся у нижней границы пограничный слой экмановского типа предполагается достаточно тонким по сравнению

с другими характерными вертикальными масштабами задачи. В задачах динамики атмосферы это условие не всегда уверенно выполняется. В настоящей работе обсуждается более общая модель, свободная от этого ограничения. Кроме того, насколько известно авторам, на сегодняшний день мало исследована спиральность конвективных течений такого типа. Важность упомянутой характеристики, в частности, для атмосферных течений, давно обсуждается в литературе (см., например, [7–13]). Данная работа содержит некоторые относящиеся сюда результаты.

2. Постановка задачи о термических циркуляциях над неоднородно нагретой поверхностью

Рассмотрим полуограниченный объем стратифицированной среды $z \geq 0$, вращающийся вокруг направленной вертикально вверх оси z . Используем приближение Буссинеска, предполагая, что плотность среды линейно зависит от возмущений температуры T (в задачах физики атмосферы в качестве соответствующей переменной удобно брать отклонения потенциальной температуры [14, 15]):

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha T), \quad (1)$$

где ρ — плотность, ρ_0 — фоновое (отсчетное) значение плотности, α — термический коэффициент расширения.

Линеаризованная система уравнений динамики и переноса тепла во вращающейся системе координат для стационарной двумерной задачи имеет вид [3–6]:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta u + f v, \quad 0 = \nu \Delta v - f u, \quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta w + \alpha g T, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma w = \kappa \Delta T. \quad (3)$$

Здесь: u, v, w — составляющие вектора скорости \mathbf{v} вдоль горизонтальных осей x, y и вертикальной оси z соответственно; $P = p/\rho_0$, p — возмущение давления; g — ускорение свободного падения; ν, κ — эффективные коэффициенты турбулентного обмена; $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2$ — двумерный оператор Лапласа; f — параметр Кориолиса (удвоенная угловая скорость фонового вращения); температурная стратификация предполагается устойчивой, так что фоновый градиент потенциальной температуры $\gamma > 0$.

Отметим совпадение (с точностью до коэффициентов) уравнений для завихренности $\partial v / \partial x$ и вертикального градиента температуры $\partial T / \partial z$, которое можно легко увидеть, если продифференцировать вторые уравнения (2) и (3) по x и z соответственно и учесть уравнение неразрывности. Поэтому завихренность конвективных течений, возникающая в поле кориолисовых ускорений, весьма просто связана с горизонтальными неоднородностями вертикального потока тепла.

На нижней границе зададим стационарные двумерные периодические по горизонтали термические неоднородности и условия прилипания и непротекания:

$$z = 0: \quad c \rho_0 \kappa \frac{\partial T}{\partial z} = -Q \cos kx, \quad w = u = v = 0. \quad (4)$$

Здесь: c — теплоемкость среды; смысл параметров Q и k очевиден; предполагается, что вдали от поверхности (при $z \rightarrow \infty$) все возмущения затухают.

3. Система уравнений для амплитуд и ее общее решение

Поставленная выше задача в ряде отношений близка к рассмотренным ранее в работах [3, 4, 6]. Ниже будет найдено решение, свободное от некоторых принятых ранее ограничений.

Ищем периодические по горизонтали решения в виде:

$$\begin{aligned} u(x, z) = U(z) \sin kx, \quad v(x, z) = V(z) \sin kx, \quad w(x, z) = W(z) \cos kx, \\ P(x, z) = \Phi(z) \cos kx, \quad T(x, z) = \theta(z) \cos kx. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений для амплитуд имеет вид:

$$-k\Phi = v \left(\frac{d^2 U}{dz^2} - k^2 U \right) + fV, \quad 0 = v \left(\frac{d^2 V}{dz^2} - k^2 V \right) - fU, \quad (6)$$

$$\frac{d\Phi}{dz} = v \left(\frac{d^2 W}{dz^2} - k^2 W \right) + \alpha g \theta, \quad kU + \frac{dW}{dz} = 0, \quad (7)$$

$$\gamma W = \kappa \left(\frac{d^2 \theta}{dz^2} - k^2 \theta \right). \quad (8)$$

Исключая из системы (6)–(8) все неизвестные, кроме W , получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - 1 \right)^3 W = -\text{Ta} \frac{d^2 W}{dz^2} + RW, \quad (9)$$

$$R = \frac{N^2}{\kappa v k^4}, \quad \text{Ta} = \frac{f^2}{v^2 k^4} = \left(\frac{4}{kh_E} \right)^4, \quad N = (\alpha g \gamma_T)^{1/2}, \quad h_E = \left(\frac{2v}{f} \right)^{1/2}.$$

Здесь введены частота плавучести N , и безразмерная переменная $Z = kz$; безразмерные параметры $R > 0$, $\text{Ta} > 0$ являются некоторыми аналогами чисел Релея и Тейлора.

Решение уравнения (9) стандартным образом ищем в виде линейной комбинации экспонент типа $\exp(\sigma Z)$. Характеристическое уравнение имеет вид:

$$(\sigma^2 - 1)^3 = -\text{Ta} \sigma^2 + R. \quad (10)$$

Тогда, с учётом условия затухания возмущений при $z \rightarrow \infty$, решение для вертикальной скорости представляет собой линейную комбинацию трёх экспонент:

$$w(x, z) = \sum_{j=1}^3 C_j \exp(k\sigma_j z) \cos kx, \quad (11)$$

где отобраны корни σ_j с отрицательными действительными частями (здесь предполагается, что эти корни различны); постоянные интегрирования C_j определяются из краевых условий. Из уравнения неразрывности имеем:

$$u(x, z) = -\sum_{j=1}^3 C_j \sigma_j \exp(k\sigma_j z) \sin kx. \quad (12)$$

В выражениях для возмущений температуры, давления и вихревой составляющей горизонтальной скорости, как нетрудно убедиться, могут присутствовать также слагаемые с четвертой экспонентой $\exp(-kz)$:

$$T(x, z) = \left[C_4 \exp(-kz) + \frac{\gamma}{\kappa k^2} \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\sigma_j^2 - 1} \exp(k\sigma_j z) \right] \cos kx, \quad (13)$$

$$v(x, z) = \left[C_5 \exp(-kz) - \frac{f}{v k^2} \sum_{j=1}^3 \frac{C_j \sigma_j}{\sigma_j^2 - 1} \exp(k\sigma_j z) \right] \sin kx. \quad (14)$$

Продифференцировав в (2) первое уравнение по z , а последнее по x , придем к соотношению:

$$C_5 = \frac{\alpha g}{f} C_4. \quad (15)$$

4. Упрощения, основанные на масштабном анализе

В общем случае решение весьма громоздко. Но полезно иметь в виду, что значения параметров R , Ta в атмосфере обычно большие, например: $R \sim 10^{16}$, $\text{Ta} \sim 10^{12}$ при $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, $f = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$,

$\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $k = 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ (что соответствует длине горизонтальной полуволны около 300 км); $R \sim 10^{14}$, $Ta \sim 10^{10}$, при $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ и прочих равных условиях. В таких ситуациях корни характеристического уравнения σ_j велики по абсолютной величине по сравнению с единицей. Так что имеет смысл анализировать лишь некоторые относительно простые предельные случаи.

В работах [3, 6] рассматривались значения параметров, при которых

$$1 \ll R^{2/3} \ll Ta \ll R. \tag{16}$$

Все эти неравенства хорошо выполняются при $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$. Но интенсивность турбулентного обмена в атмосфере бывает весьма различной, и нередко более адекватна оценка при $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$. В этом случае второе из неравенств (16) становится более мягким, и некоторые из допущений, принятых в [3, 6], оказываются не достаточно строгими. В настоящей работе рассмотрено более мягкое неравенство: $R^{2/3} < Ta$ (но $R^2 \ll Ta^3$). При этом перестают реализоваться предположения о малости некоторых безразмерных параметров, так что модель усложняется.

Приближенные выражения для трех корней характеристического уравнения, фигурирующих в (11)–(14), при этом совпадают с используемыми в [3, 6]:

$$\sigma_1 \approx -b, \quad \sigma_{2,3} \approx -(1 \pm i)a, \quad a \equiv \left(\frac{Ta}{4}\right)^{1/4}, \quad b \equiv \left(\frac{R}{Ta}\right)^{1/2} = \left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{1/2} \frac{N}{f}, \tag{17}$$

причем

$$a > b, \quad |\sigma_{2,3}| = Ta^{1/4} > |\sigma_1| \gg 1 \tag{18}$$

(в [3, 6] первое неравенство было более сильным).

5. Приближенное решение

С учетом краевых условий на нижней границе объема стратифицированной среды ($z = 0$) для коэффициентов при экспонентах получается система уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 C_j = 0, \quad \sum_{j=1}^3 \sigma_j C_j = 0, \tag{19}$$

$$C_4 \approx \frac{f^2}{\alpha g \nu k^2} \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\sigma_j}, \quad C_4 - \frac{\gamma}{\kappa k^2} \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\sigma_j} \approx \frac{Q}{c \rho_0 \kappa k}. \tag{20}$$

Исключая C_4 из (20), получаем:

$$\left(1 - \frac{\kappa f^2}{\nu N^2}\right) \sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\sigma_j} \approx -\frac{kQ}{c \rho_0 \gamma}.$$

Для рассматриваемых характерных значений параметров второе слагаемое в скобках много меньше единицы, поэтому совместно с двумя уравнениями (19) рассматриваем

$$\sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{\sigma_j} \approx -\nu, \quad \nu \equiv \frac{kQ}{c \rho_0 \gamma}. \tag{21}$$

Приближенное решение системы (19), (21) имеет вид:

$$C_1 \approx \frac{b\nu}{B}, \quad C_{2,3} \approx -\frac{b\nu}{2B} [1 \pm i(1 - \delta)], \quad C_4 \approx -\frac{f^2}{N^2} \frac{Q}{c \rho_0 \nu k}. \tag{22}$$

Здесь введены безразмерные параметры:

$$\delta = \frac{b}{a} = \left(\frac{4R^2}{Ta^3} \right)^{1/4}, \quad B = 1 - \delta + \frac{\delta^2}{2}.$$

Первый из них в работах [3, 6] предполагался малым параметром, что позволяло значительно упростить расчеты. Как нетрудно видеть, малость этого параметра означает, что $B \approx 1$, и экмановский масштаб высоты

$$h_E = \frac{1}{k} \left(\frac{4}{Ta} \right)^{1/4} = \left(\frac{2\nu}{f} \right)^{1/2},$$

много меньше другого существенного вертикального масштаба

$$h_b = (k\sigma_1)^{-1} = \frac{1}{k} \left(\frac{Ta}{R} \right)^{1/2} = \left(\frac{\kappa}{\nu} \right)^{1/2} \frac{f}{kN}.$$

Настоящая модель свободна от этого упрощения: указанные масштабы могут быть сравнимыми. Тогда для искомых переменных имеем выражения:

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{b^2\nu}{B} \left\{ \exp(-bkz) - \exp(-akz) \left[\cos(akz) + \frac{2-\delta}{\delta} \sin(akz) \right] \right\} \sin kx, \\ v &\approx -\frac{f\nu}{\nu k^2} \left\{ \exp(-kz) - \frac{1}{B} \exp(-bkz) + \frac{\delta}{2B} \exp(-akz) \left[(2-\delta) \cos(akz) - \delta \cos(akz) \right] \right\} \sin kx, \\ w &\approx \frac{b\nu}{B} \left\{ \exp(-bkz) - \exp(-akz) \left[\cos(akz) + (1-\delta) \sin(akz) \right] \right\} \cos kx, \\ T &\approx \frac{fQ}{B(\nu\kappa)^{1/2} c\rho_0 kN} \left\{ \exp(-bkz) + \frac{\delta^2}{2} \exp(-akz) \left[\sin(akz) - (1-\delta) \cos(akz) \right] - B \left(\frac{\kappa}{\nu} \right)^{1/2} \frac{f}{N} \exp(-kz) \right\} \cos kx. \end{aligned} \quad (23)$$

В предельном случае малых значений безразмерного параметра δ они переходят в решение, полученное в [6] (отметим, что в выражение для температуры в [6] вкралась опечатка в знаке).

Имея в виду расчет спиральности течения, приведем также формулы для вычисления вертикальных производных составляющих горизонтальной скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{a^2 b k \nu}{B} \left\{ \delta^2 \exp(-bkz) + 2 \exp(-akz) \left[(1-\delta) \cos(akz) - \sin(akz) \right] \right\} \sin kx, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{fb\nu}{\nu k B} \left\{ \frac{B}{b} \exp(-kz) - \exp(-bkz) + \exp(-akz) \left[\cos(akz) + (1-\delta) \sin(akz) \right] \right\} \sin kx. \end{aligned} \quad (24)$$

Отметим относительную малость второй из этих производных на нижней границе, поскольку при $z = 0$ все члены в фигурных скобках, кроме малого первого слагаемого, взаимно компенсируются.

Оценим амплитуду возмущений горизонтальной скорости для характерных условий в атмосфере. Если отклонение потока тепла $Q = 10 \text{ Вт/м}^2$, $k = 10^{-5} \text{ м}^{-1}$, $\gamma = 3 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$, $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$, то $\nu \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$, $b = 100$, $\delta \approx 0,45$, $B \approx 0,65$; амплитуды скоростей u и v достигают нескольких метров в секунду. Строго говоря, это выходит за рамки принятого здесь линейного приближения, так что более обосновано использование полученных результатов для меньших амплитуд возмущений.

Входящие в найденные решения пространственные масштабы, вообще говоря, существенно различны. Так, одна из трех экспонент — $\exp(-kz)$, медленно затухает с высотой, две других (на вертикальных масштабах порядка h_E и h_b) — гораздо быстрее. Медленно затухающая экспонента отсутствует в выражениях для u , w и вносит относительно небольшой по амплитуде вклад в температурное возмущение до высот порядка h_E и h_b , но она в большой степени определяет вихревую составляющую горизонтальной скорости v . Интересно, что в областях положительного притока тепла возникает антициклоническая циркуляция (значения v отрицательны). Подробный физический анализ решения содержится, например, в работе [3], которая ограничивается частным случаем $\nu = \kappa$ и малых значений параметра δ .

Пример 1. На рисунке 1 приведено решение для составляющих скорости при $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ (значения остальных параметров приведены выше). При этом $\sigma_1 = -100$, $\sigma_{2,3} \approx -(1 \pm i) \cdot 700$, $a \approx 700$, $b = 100$, $h_b = 1000 \text{ м}$, $h_E \approx 140 \text{ м}$, $\delta \approx 0,14$, $B \approx 0,9$; $k^{-1} \gg h_b \gg h_E$. Составляющие скорости u, w практически не выходят за пределы слоя толщиной h_b (резко выраженный максимум $|u|$ заключен в значительно более тонком экмановском слое — «экмановский вток» в область тепловыделения).

Пример 2. На рисунке 2 приведены профили при $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$. Здесь $\sigma_1 = -100$, $\sigma_{2,3} \approx -(1 \pm i) \cdot 220$, $a \approx 220$, $b = 100$, $h_b = 1000 \text{ м}$, $h_E \approx 450 \text{ м}$, $\delta \approx 0,45$, $B \approx 0,65$; $k^{-1} \gg h_b > h_E$. В этом случае толщина экмановского слоя существенно больше, чем в Примере 1; хотя h_E и остается меньше h_b , но ее величина того же порядка. Вток массы в область тепловыделения происходит в значительно более толстом слое.

Толщина области возмущений у нижней границы, с одной стороны, зависит от вращения и стратификации (масштаба h_b), с другой, — от вязкости (масштаба h_E). В Примере 1 упомянутые масштабы достаточно различны, так что можно говорить о пограничных слоях разной природы. В Примере 2 эти масштабы одного порядка, поэтому эффекты разной природы «смешиваются».

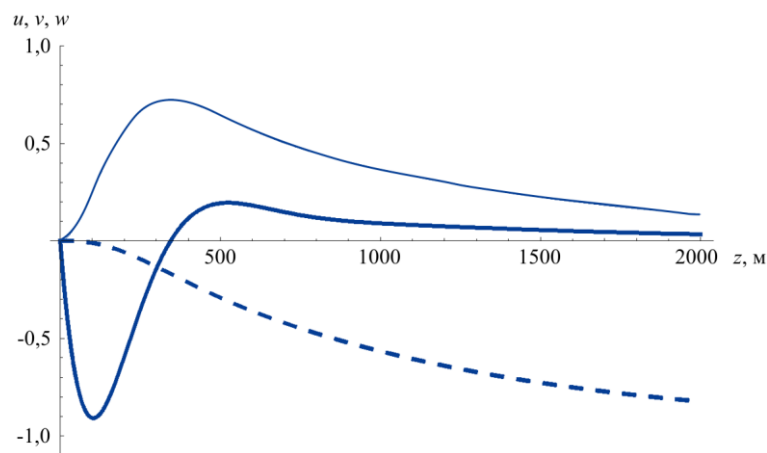


Рис. 1. Вертикальные зависимости составляющих скорости при $\kappa = \nu = 1 \text{ м}^2/\text{с}$: u (толстая линия, нормирование на $4b^2\nu/B$), v (штриховая линия, нормирование на $f\nu/(\nu k^2)$) на вертикали $kx = \pi/2$; w на вертикали $x = 0$ (тонкая линия, нормирование на $b\nu/B$)

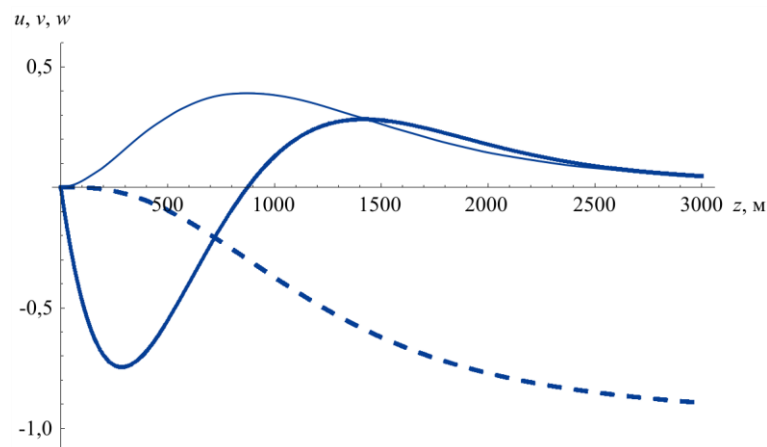


Рис. 2. То же, что на рисунке 1, но при $\kappa = \nu = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ и нормировании u на $b^2\nu/B$

6. Анализ спиральности термических циркуляций

Напомним определение спиральности:

$$H = \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{v}. \quad (25)$$

Для двумерных течений в рассматриваемой здесь вращающейся системе координат (25) можно представить в виде:

$$H = -u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial z} - v \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (26)$$

где подчеркнуты «азимутальные» составляющие (см. ниже).

Проанализируем в этом контексте полученное выше решение. Поскольку речь идет о решении линейной задачи, а спиральность квадратична по скорости, в данном случае имеет смысл брать за основу не абсолютные значения спиральности (в линейном приближении они заведомо очень малы), а ее пространственное распределение. Кроме того, представляет интерес величина относительного вклада разных слагаемых в (26). Например, в работах [11–13], где рассматривалась осесимметричная задача, сравнивались вклады «радиальной» составляющей (ее аналог — первое слагаемое в правой части (26)), «азимутальной» (подчеркнутые второе и третье слагаемые) и «вертикальной» спиральностей (последнее слагаемое).

Остановимся сначала на зависимости (26) от горизонтальной координаты x . Как легко видеть, в (26) все слагаемые в правой части пропорциональны $(\sin kx)^2$, либо $(\cos kx)^2$. При осреднении по длине волны рассматриваемой горизонтальной гармоники получаем одинаковый для всех слагаемых множитель $1/2$. Средние по длине волны значения двух последних слагаемых, очевидно, совпадают, причем их сумма однородна по горизонтали, поскольку

$$-v \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial x} = V(z)W(z) \sin^2 kx + V(z)W(z) \cos^2 kx = V(z)W(z).$$

Третье слагаемое в (26) (а следовательно, и четвертое) по амплитуде должно быть много меньше второго, поскольку вблизи максимумов вертикальных профилей имеет место отношение $|\partial w / \partial x| / |\partial u / \partial z| \sim |(w/u) \cdot (kh_E)|$; под знаком последнего модуля каждое из двух выражений в скобках много меньше единицы. Таким образом, из масштабного анализа следует, что основной вклад в спиральность, проинтегрированную по пространству, дают два первых слагаемых в правой части (26).

Некоторые весьма общие утверждения можно доказать относительно средних (проинтегрированных по вертикали) слагаемых правой части (26). Проинтегрируем второе из этих слагаемых по всей вертикали:

$$\int_0^\infty v \frac{\partial u}{\partial z} dz = \sin^2 kx \int_0^\infty V \frac{\partial U}{\partial z} dz = \sin^2 kx \left(UV|_0^\infty - \int_0^\infty V \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = - \int_0^\infty u \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

(выполнено интегрирование «по частям» и учтено, что u обращается в нуль на нижней границе и затухает с высотой). Таким образом, интегральный вклад в спиральность двух первых слагаемых в (26) одинаков. Значит, приблизительно одинаков и интегральный вклад «радиальной» и «азимутальной» составляющих.

Из второго уравнения (2) следует:

$$u = \frac{v}{f} \Delta v \approx \frac{v}{f} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

(в приближенном равенстве учтена малость производных по горизонтали по сравнению с вертикальными производными). Отсюда заключаем, что первое слагаемое в (26) можно приближенно представить в виде:

$$-u \frac{\partial v}{\partial z} \approx -\frac{v}{f} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{v}{2f} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2.$$

Следовательно,

$$- \int_0^\infty u \frac{\partial v}{\partial z} dz \approx - \frac{v}{2f} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \Big|_0^\infty = \frac{v}{2f} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \Big|_{z=0} = \frac{fv^2}{2vk^2} \sin^2 kx \quad (27)$$

(в последнем равенстве учтена вторая формула из (24)).

На рисунках 3, 4 представлены вертикальные зависимости двух первых слагаемых правой части (26) и их суммы для численных Примеров 1 и 2. Спиральность эффективно генерируется в нижних слоях, в которых существенно влияние нижней границы. В Примере 1 (Рис. 3) это, прежде всего, достаточно

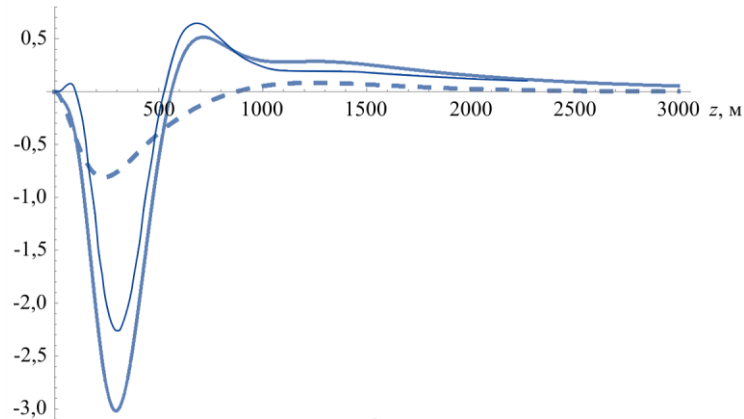


Рис. 3. Вертикальные зависимости осредненных по горизонтали составляющих спиральности: $v(\partial u/\partial z)$ (тонкая линия), $-u(\partial v/\partial z)$ (штриховая линия) и их алгебраической суммы (толстая линия); все профили нормированы на $fb^3v^2/(2vk)$ для первого численного примера

резко выраженный экмановский пограничный слой. Существенная роль экмановского слоя в этом контексте давно отмечена в литературе для течений различной природы (см. [7, 8]). Но, помимо экмановского масштаба h_E , для течений рассматриваемой природы влияние нижней границы и величина области генерации спиральности определяются также вертикальным масштабом h_b , не зависящим от вязкости. Это особенно хорошо видно в Примере 2 (Рис. 4).

Хотя интегральный вклад «радиальной» и «азимутальной» составляющих спиральности оказался практически одинаковым, но, как видно из рисунков, их вертикальные зависимости заметно различаются. Слои с положительной и отрицательной спиральностью в приведенных примерах в большой степени компенсируют друг друга, так что интеграл (27) по всей области оказался много меньше по абсолютной величине интегралов по каждому из упомянутых относительно тонких слоев.

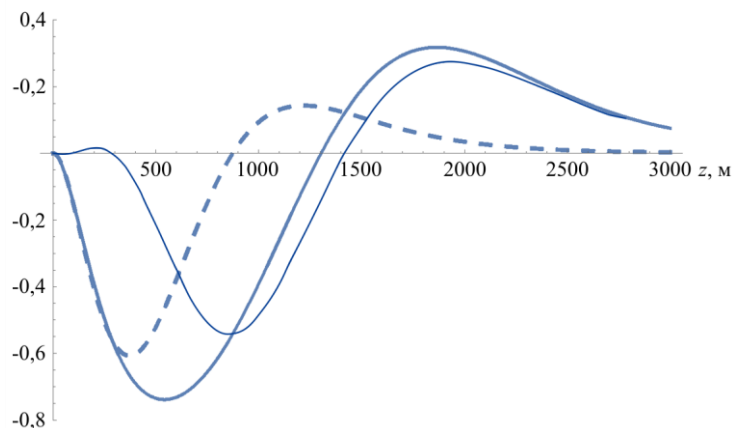


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для численного примера 2

7. Заключение

Рассмотренная теоретическая модель конвективных течений над термически неоднородной поверхностью обобщает некоторые предшествующие исследования. В частности, она свободна от предположения об относительной тонкости экмановского пограничного слоя, малости его размера по сравнению с другими характерными вертикальными масштабами задачи. Это допущение (не всегда обоснованное) существенно упрощало расчеты, поскольку с ним было связано наличие в задаче малого параметра, отказ от него потребовал заметного усложнения расчетов.

Полученные соотношения позволяют проанализировать зависимости составляющих скорости и спиральности от параметров задачи. Например, на первый взгляд, можно было полагать, что с интенсификацией вращения (увеличением параметра Кориолиса f) генерация спиральности усилится. Но, как видно из решения, радиальная скорость быстро убывает по абсолютной величине с ростом f ,

таким образом, на достаточно больших горизонтальных масштабах вращение препятствует радиальным движениям. Вследствие этого уменьшается по абсолютной величине и спиральность (за исключением экмановского пограничного слоя, где радиальная скорость относительно медленно убывает с увеличением f).

Доказан ряд общих утверждений относительно соотношения разных «составляющих» спиральности в рассматриваемых термических циркуляциях, в частности, в атмосферных течениях с характерными горизонтальными масштабами порядка сотен километров. Приведены примеры численных расчетов вертикального распределения этих составляющих. Показано, что интегральный вклад «радиальной» и «азимутальной» составляющих спиральности в обсуждаемых ситуациях практически одинаков, но их вертикальные зависимости заметно различаются. Вертикальные сдвиги горизонтальной скорости, от которых зависит генерация спиральности, определяются не только экмановским масштабом высоты, но и масштабом h_b , не зависящим от вязкости.

Полученные результаты могут иметь значение при анализе различных характеристик спиральности. Так, полная спиральность в столбе воздуха единичного сечения все шире применяется в современных исследованиях по геофизической гидродинамике и динамической метеорологии в качестве диагностической и прогностической характеристик интенсивных вихрей и атмосферной циркуляции [9, 16]. В северном полушарии в пределах пограничного слоя она положительна, что отвечает в целом (по толще пограничного слоя) правому вращению скорости ветра с высотой [9].

Согласно полученным результатам, над термически неоднородной поверхностью возникают соответствующие однозначно связанные с характером этой неоднородности возмущения вертикального профиля спиральности. Это приводит к вариациям полной спиральности, а также к вариациям ее горизонтального градиента.

Учет вариаций полной спиральности вследствие неоднородного нагрева поверхности может оказаться важным в перспективе при диагностических исследованиях атмосферных вихрей. Ясный физический механизм изменения горизонтального градиента полной спиральности, который является прогностическим индикатором неблагоприятных и опасных явлений погоды [17] над термически неоднородной поверхностью, по-видимому, позволит более обоснованно использовать его в аспекте практическом.

Наконец, полученные результаты помогут обозначить возможную роль влияния термически неоднородной поверхности на то, что при заданном поле геострофического ветра спиральность выше в пограничном слое под антициклоном и ниже под циклоном [9].

Литература

1. *Lin Y.-L.* Mesoscale dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 646 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619649>
2. *Геххарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б.* Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен. Кн. 1. М.: Мир, 1991. 678 с.
3. *Перестенко О.В., Ингель Л.Х.* К линейной теории нестационарной конвекции в устойчиво стратифицированной вращающейся среде над термически неоднородной поверхностью // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26, № 9. С. 906-916.
4. *Ингель Л.Х., Беляева М.В.* К теории конвекции во вращающейся стратифицированной среде над термически неоднородной горизонтальной поверхностью // ИФЖ. 2011. Т. 84, № 4. С. 759-763. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-011-0539-z>)
5. *Свиркунов П.Н., Фельде Э.А.* Структура конвективных течений над источниками тепловыделения в устойчиво стратифицированной атмосфере // Метеорология и гидрология. 1988. № 1. С. 17-23.
6. *Ингель Л.Х., Макоско А.А.* Об аналогии между термическими и «гравитационными» мезомасштабными циркуляциями в атмосфере // Геофизические исследования. 2019. Т. 20, № 3. С. 36-44. <https://doi.org/10.21455/gr2019.3-3>
7. *Lilly D.K.* The structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part II: Helicity and storm stabilization // J. Atmos. Sci. 1986. Vol. 43. P. 126-140. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1986\)043<0126:TSEAPO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1986)043<0126:TSEAPO>2.0.CO;2)
8. *Molinari J., Vollaro D.* Extreme helicity and intense convective towers in hurricane Bonnie // Mon. Wea. Rev. 2008. Vol. 136. P. 4355-4372. <https://doi.org/10.1175/2008MWR2423.1>
9. *Курганский М.В.* Спиральность в атмосферных динамических процессах // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2016. Т. 53, № 2. С. 147-163. <https://doi.org/10.7868/S0002351517020079>
10. *Han Y., Wu R., Fang J.* Shearing wind helicity and thermal wind helicity // Adv. Atmos. Sci. 2006. Vol. 23. P. 504-512. <https://doi.org/10.1007/s00376-006-0504-5>
11. *Levina G.V., Montgomery M.T.* Tropical cyclogenesis: a numerical diagnosis based on helical flow organization // J. Phys.: Conf. Ser. 2014. Vol. 544. 012013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/544/1/012013>
12. *Sukhanovskii A., Evgrafova A., Popova E.* Helicity of convective flows from localized heat source in a rotating layer // Arch. Mech. Eng. 2017. Vol. 64. P. 177-188. <https://doi.org/10.1515/meceng-2017-0011>
13. *Teimurazov A., Sukhanovskii A., Evgrafova A., Stepanov R.* Helicity sources in a rotating convection // J. Phys.: Conf. Ser. 2017. Vol. 899. 022017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/899/2/022017>

14. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т.1. 398 с.
15. *Гилл А.Е.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986. Т. 1. 397 с.
16. *Макоско А.А., Рубинштейн К.Г.* Исследование спиральности азиатского муссона по данным реанализа и результатам численного моделирования циркуляции атмосферы с учетом неоднородности силы тяжести // ДАН. 2014. Т. 459, № 2. С. 237-242. <https://doi.org/10.7868/S0869565214320176>
17. *Makosko A.A., Maksimenkov L.O.* To the prognostic meaning for the one of criteria for helicity estimation in atmosphere // IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci. 2019. Vol. 231. 012033. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/231/1/012033>

References

1. Lin Y.-L. *Mesoscale dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. 646 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511619649>
2. Gebhart B., Jaluria Y., Mahajan R.L., Sammakia B. *Buoyancy-induced flows and transport*. Springer, 1988. 1001 p.
3. Perestenko O.V., Ingel L.Kh. Linear theory of nonsteady-state convection in a stably stratified rotating medium above a thermally nonuniform surface. *Izv. Atmos. Ocean Phys.*, 1990, vol. 26, no. 9, pp. 666-673.
4. Ingel' L.Kh., Belyaeva M.V. Toward the theory of convection in a rotating stratified medium over a thermally inhomogeneous horizontal surface. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2011, vol. 84, pp. 820-826. <https://doi.org/10.1007/s10891-011-0539-z>
5. Svirkunov P.N., Fel'de E.A. Структура конвективных течений над источниками тепловыделения в устойчиво стратифицированной атмосфере [Structure of convective flows above sources of heat release into a stably stratified atmosphere]. *Meteorologiya i Gidrologiya*, 1988, no. 1, pp. 17-23.
6. Ingel L.Kh., Makosko A.A. On analogy between thermal and "gravity" mesoscale atmospheric circulations. *Geofizicheskiye issledovaniya – Geophys. Res.*, 2019, vol. 20, no. 3, pp. 36-44. <https://doi.org/10.21455/gr2019.3-3>
7. Lilly D.K. The Structure, energetics and propagation of rotating convective storms. Part II: Helicity and storm stabilization. *J. Atmos. Sci.*, 1986, vol. 43, pp. 126-140. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1986\)043<0126:TSEAPO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1986)043<0126:TSEAPO>2.0.CO;2)
8. Molinari J., Vollaro D. Extreme helicity and intense convective towers in hurricane Bonnie. *Mon. Wea. Rev.*, 2008, vol. 136, pp. 4355-4372. <https://doi.org/10.1175/2008MWR2423.1>
9. Kurgansky M.V. Helicity in dynamic atmospheric processes. *Izv. Atmos. Ocean Phys.*, 2017, vol. 53, pp. 127-141. <https://doi.org/10.1134/S0001433817020074>
10. Han Y., Wu R., Fang J. Shearing wind helicity and thermal wind helicity. *Adv. Atmos. Sci.*, 2006, vol. 23, pp. 504-512. <https://doi.org/10.1007/s00376-006-0504-5>
11. Levina G.V., Montgomery M.T. Tropical cyclogenesis: a numerical diagnosis based on helical flow organization. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2014, vol. 544, 012013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/544/1/012013>
12. Sukhanovskii A., Evgrafova A., Popova E. Helicity of convective flows from localized heat source in a rotating layer. *Arch. Mech. Eng.*, 2017, vol. 64, pp. 177-188. <https://doi.org/10.1515/meceng-2017-0011>
13. Teimurazov A., Sukhanovskii A., Evgrafova A., Stepanov R. Helicity sources in a rotating convection. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 899, 022017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/899/2/022017>
14. Pedlosky J. *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, 1987. 710 p.
15. Gill A.E. *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, 1982. 682 p.
16. Makosko A.A., Rubinshtein K.G. Study of a helical Asian monsoon based on reanalysis of data and the results of numerical modeling of atmospheric circulation with account for the inhomogeneous gravity force. *Dokl. Earth Sc.*, 2014, vol. 459, pp. 1451-1456. <https://doi.org/10.1134/S1028334X14110130>
17. Makosko A.A., Maksimenkov L.O. To the prognostic meaning for the one of criteria for helicity estimation in atmosphere. *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.*, 2019, vol. 231, 012033. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/231/1/012033>

Поступила в редакцию 11.06.2020; после доработки 18.08.2020; принята к опубликованию 21.08.2020

Сведения об авторах

Ингель Лев Ханаанович, дфмн, внс, НПО «Тайфун», 249038, г. Обнинск, ул. Победы, д. 4; e-mail: lev.ingel@gmail.com

Макоско Александр Аркадьевич, дтн, проф., член-корр. РАН, зав.лаб., Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН (ИФА им. А.М. Обухова РАН), 119017, г. Москва, Пыжевский пер., д. 3; e-mail: aamacosco@mail.ru