

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.21](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.21)

УДК 532.5.032

РЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ СУСПЕНЗИЙ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ

О.И. Скульский

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Проведен анализ публикаций, посвященных экспериментальным и теоретическим исследованиям реологических свойств концентрированных суспензий твердых частиц. Согласно принятым в данное время представлениям, реологию суспензий рассматривают как результат контактного взаимодействия составляющих их частиц, вызванного действием внешних сил образования и разрушения конгломератных структур различного типа. Предложена новая реологическая модель высококонцентрированной суспензии твердых частиц в ньютоновской жидкости, описывающая как непрерывное, так и скачкообразное увеличение эффективной вязкости при равномерном увеличении сдвиговых напряжений. Получены точные аналитические формулы для профилей скоростей течений суспензий в ротационных вискозиметрах «конус–плоскость» и «цилиндр–цилиндр», а также в щелевом вискозиметре. Предложенная модель модифицирована для учета неньютоновских свойств дисперсионной среды, которая при малых скоростях деформации проявляет псевдопластические свойства, а при больших – дилатантные. Эффективная вязкость такой суспензии представлена как сумма вкладов от неньютоновской дисперсионной среды и твердых частиц дисперсной фазы. Для описания реологии дисперсионной фазы использовалась модель Эллиса. Численно, методом конечных элементов, получены профили скоростей в плоском канале при заданном градиенте давления и показано, что в зависимости от параметров модели они могут принимать различные сложные формы.

Ключевые слова: высококонцентрированные суспензии, реологическая модель, реометрические течения, аналитические решения, неньютоновская дисперсная среда, численное решение

RHEOMETRIC FLOWS OF CONCENTRATED SUSPENSIONS OF SOLID PARTICLES

O.I. Skul'skiy

Institute of Continuous Media Mechanics, UB RAS, Perm, Russian Federation

Publications on experimental and theoretical studies of the rheological properties of concentrated suspensions of solid particles have been analyzed. According to the currently accepted ideas, the rheology of suspensions is considered as a result of contact interaction of their constituent particles caused by the action of external forces, the formation and destruction of various types of conglomerate structures. A new rheological model of a highly concentrated suspension of solid particles in a Newtonian fluid is proposed, which describes both a continuous and discontinuous increase in the effective viscosity with a uniform increase in shear stresses. Accurate analytical formulas are obtained for the velocity profiles of suspensions in rotational viscometers “cone-plane” and “cylinder-cylinder”, as well as in a slit viscometer. The proposed model is modified to take into account the non-Newtonian properties of a dispersion medium, which exhibits pseudoplastic properties at low strain rates, and dilatant properties at large strain rates. The effective viscosity of such a suspension is presented as the sum of the contributions from the dispersion medium and the solid particles of the dispersed phase. To describe the rheology of the dispersion phase, the Ellis model was used. The velocity profiles in a pressure driven flat channel are obtained numerically by the finite element method. It is shown that, depending on the parameters of the model, the velocity profiles in a flat channel can take various complex forms.

Key words: highly concentrated suspensions, rheological model, rheometric flows, analytical solutions, non-Newtonian disperse medium, numerical solution

1. Введение

В последнее десятилетие экспериментальная и теоретическая реология обогатилась новыми знаниями о реологическом поведении дилатантных жидкостей. Концентрированные суспензии твердых частиц в жидкости, проявляющие свойства дилатансии, могут иметь как естественное, так и искусственное происхождение. Они используются в химической промышленности, медицине, фармакологии и при производстве потребительских товаров, включая продукты питания и косметику.

Даже в каналах с простой геометрией неброуновские суспензии проявляют при течении ряд неньютоновских свойств и имеют нетривиальные поля потока. Так, при увеличении сдвиговых напряжений происходит непрерывное увеличение кажущейся вязкости (Continuous Shear Thickening — CST), а при высоких концентрациях частиц — ее скачкообразное увеличение (Discontinuous Shear Thickening — DST) и заклинивание потока (shear jamming) [1–12]. На рисунке 1 представлены типичные экспериментальные S-образные кривые течения суспензии, демонстрирующие скачкообразное увеличение напряжений при плавном возрастании скорости сдвига.

В монографиях [2, 10, 11] изложены теоретические основы реологии суспензий. В последнее время появился ряд работ, посвященных экспериментальному исследованию и теоретическому моделированию реологических свойств высококонцентрированных суспензий, демонстрирующих скачкообразное увеличение напряжения при плавном росте скорости сдвига. Такая неньютоновская реология возникает из-за фрикционного взаимодействия частиц [13–18].

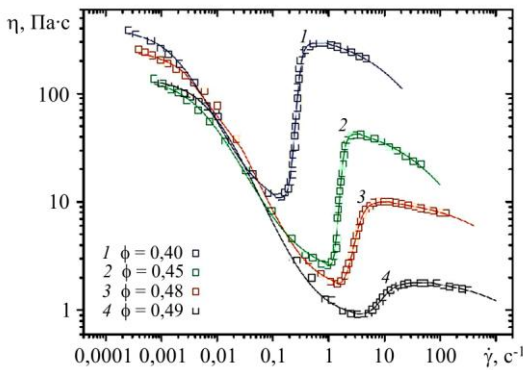


Рис. 1. Экспериментальные данные из работы [20]

Экспериментальное исследование реологических свойств неньютоновских жидкостей обычно проводят с использованием современных вискозиметров с встроенным программным обеспечением обработки данных. Результаты реологических испытаний выдаются в виде зависимости касательного напряжения от скорости сдвига при известной концентрации частиц.

Для математического моделирования течений высококонцентрированных суспензий в основном используют феноменологические реологические уравнения. В таблице приведены сведения о тех из них, которые наиболее часто упоминаются в научных публикациях.

Таблица. Наиболее распространенные феноменологические реологические уравнения

Автор(ы) уравнения	Реологическое уравнение	Исследуемый материал или его свойство; ссылка на источник
Эйнштейн (Einstein)	$\frac{\eta_{eff}}{\eta_0} = 1 + \frac{5}{2} \phi$	Слабokonцентрированные суспензии [2, 13, 14, 15]
Гершель–Балкли (Herschel–Bulkley)	$\sigma = \sigma_y + K \dot{\gamma}^n$	Концентрированные суспензии [2, 10, 11, 23]
Эллис (Ellis)	$\frac{\eta_0}{\eta_{ef}} = 1 + \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\alpha-1}$	Концентрированные суспензии [2, 10, 11]
Муни (Mooney)	$\frac{\eta_{ef}}{\eta_0} = \exp\left(\frac{5}{2} \frac{\phi}{1-\phi/\phi_0}\right)$	Концентрированные суспензии [2, 10, 11]
Кросс (Cross)	$\eta_{ef} = \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + (K \dot{\gamma})^n}$	Концентрированные суспензии [7, 10]
Синх и др. (Singh <i>et al.</i>)	$\eta_{ef} = \frac{B^2 \sigma_y}{(\sigma - \sigma_y)^2} - \frac{B^2}{(\sigma - \sigma_y)}$	Концентрированные суспензии, скачкообразный рост вязкости [23]
Наканиши и др. (Nakanishi <i>et al.</i>)	$\eta_{ef}(\phi) = \eta_0 \exp\left(A \frac{\phi}{1-\phi}\right), \quad \phi_0 = \frac{(S/S_0)^2}{1+(S/S_0)^2}$	Концентрированные суспензии, скачкообразный рост вязкости. [12, 20]
Галиндо–Розалес (Galindo–Rosales <i>et al.</i>)	$\eta(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \eta_I(\dot{\gamma}) = \eta_c + \frac{\eta_0 - \eta_c}{1 + [K_I (\dot{\gamma}^2 / (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_c))]^{n_I}}, & \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c, \\ \eta_{II}(\dot{\gamma}) = \eta_{max} + \frac{\eta_c - \eta_{max}}{1 + [K_{II} ((\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_c) / (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_{max})) \dot{\gamma}]^{n_{II}}}, & \dot{\gamma}_c < \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_{max}, \\ \eta_{III}(\dot{\gamma}) = \frac{\eta_{max}}{1 + [K_{III} (\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_{max})]^{n_{III}}}, & \dot{\gamma}_{max} < \dot{\gamma}. \end{cases}$	Концентрированные суспензии в неньютоновской жидкости [4, 7, 10]

В таблице использованы обозначения: $\eta_{ef}, \eta_0, \eta_\infty$ — эффективная и характерные вязкости; σ — напряжение; σ_y — предел текучести; S — интенсивность напряжений; $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига; ϕ — концентрация; A, B, K — параметры моделей.

В работах [19, 21, 22] развивается микроструктурный подход на основе формализма Смолуховского. Это перспективное направление не привело пока к построению конституционного уравнения, доступного для использования в практических расчетах. Далее исследуем работоспособность новой реологической модели концентрированных суспензий твердых частиц в жидкости, проявляющих свойства дилатансии, на примере основных реометрических течений.

2. Модель течения суспензии твердых частиц в ньютоновской дисперсионной среде

В общем случае движение несжимаемой жидкости описывается системой дифференциальных уравнений, отражающих законы сохранения:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}, \tag{1}$$

$$\tau = 2\eta_{ef} \mathbf{D}, \tag{2}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T), \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \tag{4}$$

где \mathbf{V} — вектор скорости, P — давление (шаровая часть тензора напряжений), τ — девиаторная часть тензора напряжений, \mathbf{D} — симметричная часть тензора скорости деформации с компонентами $\dot{\gamma}_{ij}$, η_{ef} — эффективная вязкость, ρ — плотность.

Система (1)–(4) должна замыкаться реологическим уравнением, определяющим свойства конкретного материала, и соответствующими начальными и граничными условиями.

В механике неньютоновских жидкостей немонотонность кривых течения — явление не уникальное. Причинами его возникновения могут быть, например, резкое снижение вязкости при росте температуры [25] или снижение вязкости при увеличении скорости сдвига, который вызывает ориентацию макромолекул вдоль потока [26, 27]. Для концентрированных суспензий причиной немонотонности кривых течения являются силы контактного взаимодействия частиц, возрастающие с увеличением напряжений. Опираясь на опыт моделирования реологических свойств растворов полимеров с немонотонными кривыми течения, реологическую модель концентрированных суспензии твердых частиц можно записать в виде феноменологического уравнения, которое описывает как непрерывное, так и скачкообразное увеличение скорости сдвига при плавном возрастании напряжений:

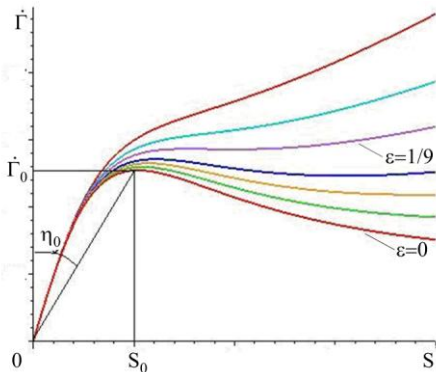


Рис. 2. Типичные кривые течения концентрированных суспензий при различных значениях параметра ε

$$\dot{\Gamma} = \frac{S}{\eta_{ef}}, \tag{5}$$

где $\eta_{ef} = \eta_0 \left(1 + \left(\frac{S}{S_0} \right)^2 \right) / \left(1 + \varepsilon \left(\frac{S}{S_0} \right)^2 \right)$ и $S = \sqrt{\frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau})}$ — как и выше, эффективная вязкость и интенсивность напряжений,

$\dot{\Gamma} = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{D} : \mathbf{D})}$ — интенсивность скорости деформации,

$\varepsilon = m \frac{\phi^* - \phi}{\phi^*}$ — относительная концентрация. Характерные значения напряжения S_0 , скорости деформации $\dot{\Gamma}_0$, вязкости $\eta_0 = S_0 / \dot{\Gamma}_0$ и подгоночного параметра m для заданной концентрации определяются в двух характерных точках экспериментальной кривой течения: в точке максимума ($\varepsilon = 0$) и в точке перегиба ($\varepsilon = 1/9$) (см. Рис. 2).

концентрации определяются в двух характерных точках экспериментальной кривой течения: в точке максимума ($\varepsilon = 0$) и в точке перегиба ($\varepsilon = 1/9$) (см. Рис. 2).

3. Течение суспензии в ротационном вискозиметре конус–плоскость

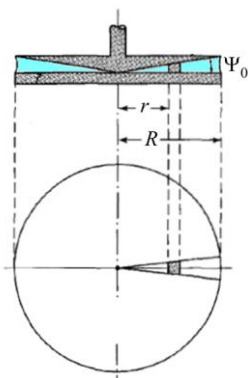


Рис. 3. Схема вискозиметра «конус–плоскость»

Вискозиметры типа «конус–плоскость» (Рис. 3) наиболее часто применяются при реологических исследованиях однородных неньютоновских жидкостей. Обычно угол раскрытия конуса (зазор) мал и считается, что $\text{tg } \Psi_0 \cong \Psi_0$. Благодаря этому используемые при обработке экспериментальных данных стандартные формулы с высокой степенью точности аппроксимируют аналитическое решение задачи течения жидкости в конусном зазоре.

Стандартные формулы для обработки экспериментальных данных имеют вид: [12].

$$\tau = \frac{3M}{2\pi R^3}, \quad \dot{\gamma} = \Omega / \Psi_0, \quad \eta_{ef} = \frac{3M \Psi_0}{2\pi R^3 \Omega},$$

где τ — касательное напряжение, $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, η_{ef} — эффективная вязкость, M — момент вращения, Ω — угловая скорость, R, Ψ_0 — параметры вискозиметра. Эти формулы справедливы

и для дилатантных жидкостей, поскольку скорость сдвига и касательные напряжения постоянны, а окружная скорость линейна по высоте зазора.

Следует отметить, что исследование реологии высококонцентрированных суспензий относительно крупных частиц должно проводиться на вискозиметрах, обеспечивающих выполнение постулатов механики сплошных сред, иначе говоря, представительный объем суспензии должен быть существенно меньше величины зазора.

4. Движение суспензии в зазоре между коаксиальными цилиндрами

Пусть внутренний цилиндр с радиусом R_1 неподвижен, внешний цилиндр с радиусом R_2 вращается под действием приложенного к нему момента M с угловой скоростью Ω (Рис. 4).

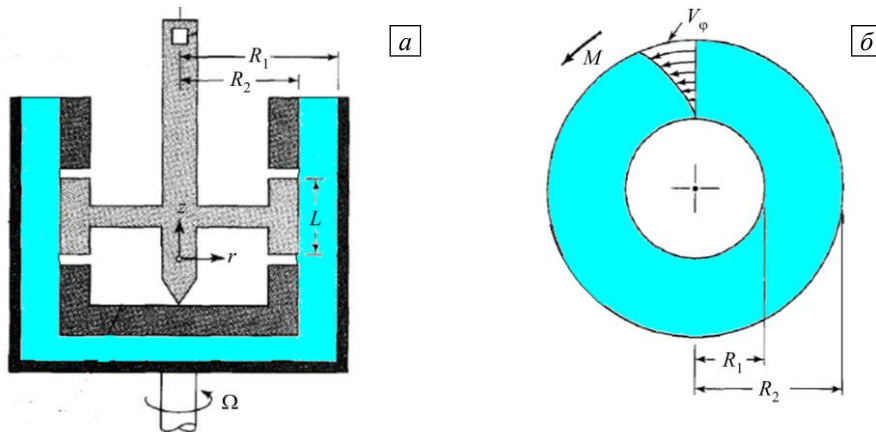


Рис. 4. Схема вискозиметра «цилиндр-цилиндр» (а) и соответствующая расчетная область (б)

В стационарном случае ползущего одномерного течения ($V_r = V_z = 0$, $V_\phi(r)$, $\partial V_\phi / \partial t = 0$) неньютоновской жидкости уравнения равновесия (1) в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{d\tau_{r\phi}}{dr} + 2\frac{\tau_{r\phi}}{r} = 0. \quad (6)$$

После интегрирования (6) получаем: $\tau_{r\phi} = C/r^2$, где постоянная интегрирования C определяется из граничных условий.

Введем безразмерные переменные: $\xi = \frac{r}{R_1}$, $k = \frac{R_2}{R_1}$, $\sigma = \frac{\tau_{r\phi}}{S_0} = \frac{M}{4\pi LR_2^2 S_0}$, $G = \frac{\dot{\gamma}_{r\phi}}{\dot{\Gamma}_0}$, $U = \frac{V_\phi}{R_2 \dot{\Gamma}_0}$. Запишем связь между скоростью деформации и напряжением, используя предложенную модель (5):

$$G = \frac{(1 + \varepsilon \sigma^2)}{(1 + \sigma^2)} \sigma, \quad G = \frac{dU}{d\xi} - \frac{U}{\xi}. \quad (7)$$

Интегрирование (7) и учет граничных условий дают формулы распределения скоростей в зазоре между цилиндрами:

– окружной

$$U(\xi) = \varepsilon \sigma \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi} \right) + (1 - \varepsilon) \xi \arctan \left(\frac{\sigma(\xi^2 - 1)}{\sigma^2 + \xi^2} \right); \quad (8)$$

– угловой

$$\Omega = \varepsilon \sigma \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right) + (1 - \varepsilon) k \arctan \left(\frac{\sigma(k^2 - 1)}{\sigma^2 + k^2} \right). \quad (9)$$

Формула (9) выражает связь между задаваемым моментом и измеряемой угловой скоростью внешнего цилиндра. При $\varepsilon=1$, что соответствует ньютоновской жидкости, она сводится к стандартному виду, используемому в вискозиметрии [12]:

$$\eta_{ef} = \frac{M}{4\pi\Omega R_2^2 L} \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right), \quad k = \frac{R_2}{R_1}.$$

В качестве примера на рисунке 5 приведены распределения окружной скорости и скорости сдвига в зазоре между цилиндрами. Увеличение концентрации частиц, то есть уменьшение параметра $\varepsilon = m \frac{\dot{\phi}^* - \dot{\phi}}{\dot{\phi}^*}$, ведет к снижению скорости и ее градиента при заданном на внешнем цилиндре моменте.

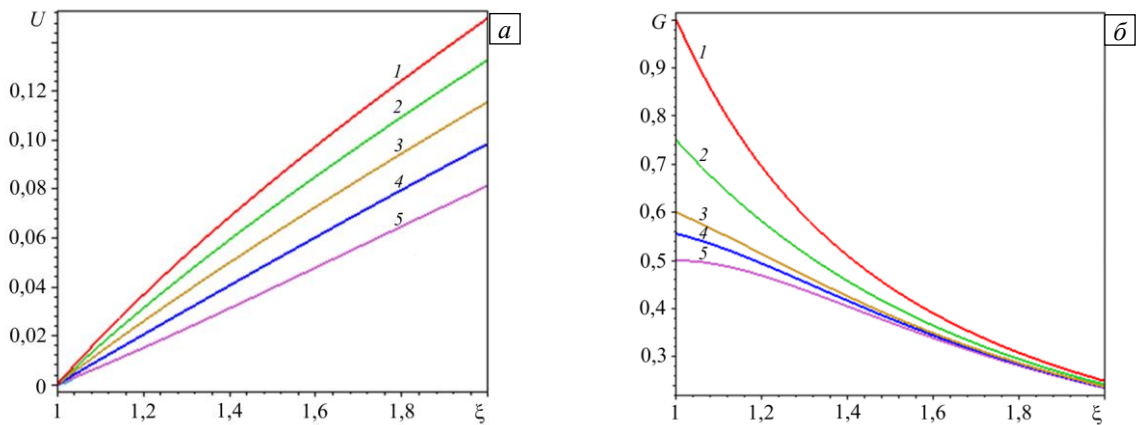


Рис. 5. Распределения окружной скорости (а) и скорости деформации (б) при различных значениях параметра ε : 1,0 (кривая 1); 0,5 (2); 0,2 (3); 0,1 (4); 0,0 (5)

5. Течение Пуазейля в плоском канале

В случае ламинарного течения жидкости в плоском канале под действием перепада давления (Рис. 6) после интегрирования уравнения движения $\frac{dP}{dx} = \frac{d\tau_{xy}}{dy}$ с учетом симметрии расчетной области получаем линейную зависимость касательного напряжения от поперечной координаты: $\tau_{xy} = (\Delta P/L)y$, с максимальным значением на стенках $|\tau_{xy}^w| = (\Delta P/L)h$.

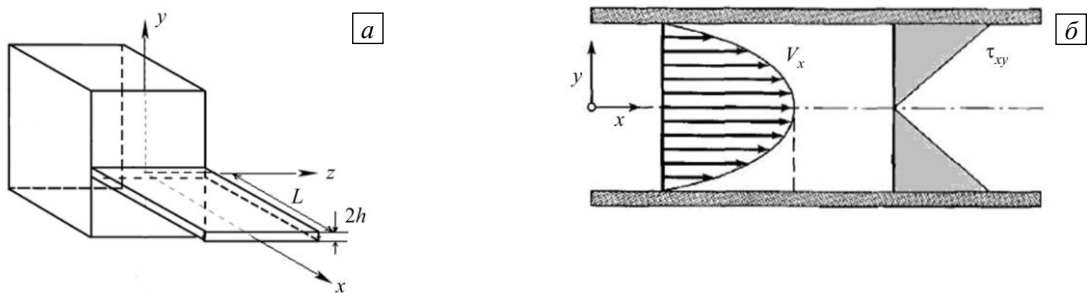


Рис. 6. Схема течения Пуазейля в щелевом вискозиметре (а); профиль скорости V_x и распределение касательного напряжения τ_{xy} по поперечной координате y (б)

Введение безразмерных переменных $\zeta = y/h$, $\sigma = (\Delta P/S_0)(h/L)$, $G = \dot{\gamma}_{xy}/\dot{\Gamma}_0$, $W = V_x/(h\dot{\Gamma}_0)$ и учет (5) позволяют записать аналитическое решение в виде:
 – для скорости сдвига

$$G = \frac{\sigma\zeta(1 + \varepsilon\sigma^2\zeta^2)}{1 + \sigma^2\zeta^2}, \tag{10}$$

– для профиля скорости

$$W = \frac{1}{2} \left[\varepsilon \sigma (1 - \zeta^2) + \frac{(1 - \varepsilon)}{\sigma} \ln \left(\frac{1 + \sigma^2}{1 + \zeta^2 \sigma^2} \right) \right], \quad (11)$$

– для удельного расхода

$$Q = \int_0^1 W d\zeta = 2 \left[\frac{\sigma \varepsilon}{3} + \frac{1}{\sigma} (1 - \varepsilon) - \frac{(1 - \varepsilon)}{\sigma^2} \arctan(\sigma) \right]. \quad (12)$$

Формулы (10)–(12) дают основу для разработки методики подбора материальных констант реологического уравнения.

На рисунке 7 приведены профили эффективной вязкости, продольной скорости и скорости сдвига в поперечном сечении щелевого канала при $G = 10$ и различных значениях параметра ε .

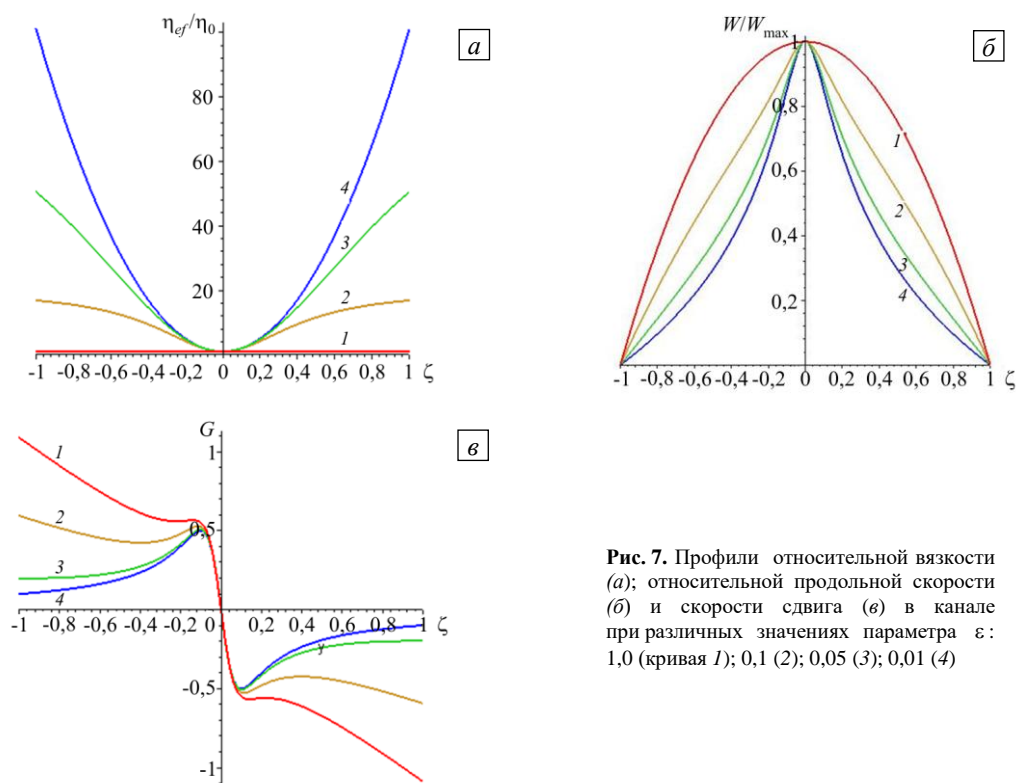


Рис. 7. Профили относительной вязкости (а); относительной продольной скорости (б) и скорости сдвига (в) в канале при различных значениях параметра ε : 1,0 (кривая 1); 0,1 (2); 0,05 (3); 0,01 (4)

6. Напорное течение суспензии твердых частиц в неньютоновской жидкости в плоском канале

Если дисперсионная жидкость является неньютоновской, при малых скоростях деформации она проявляет псевдопластические свойства, а при больших — дилатантные [4, 7, 24]. Эффективную вязкость такой суспензии можно записать как сумму вкладов от дисперсионной жидкости и твердых частиц дисперсной фазы. Для описания реологии дисперсионной жидкости использовалась модель Эллиса, а вклад в эффективную вязкость от дисперсной фазы учитывался с помощью предложенной модели:

$$\eta_{ef} = \frac{\mu_0}{1 + a \left(\frac{S}{S_0} \right)^{b-1}} + \eta_0 \left[1 + \left(\frac{S}{S_0} \right)^p \right] / \left[1 + \varepsilon \left(\frac{S}{S_0} \right)^p \right], \quad (13)$$

где μ_0 , a , b , p — материальные константы.

В большинстве публикаций, посвященных исследованию реологии суспензий, экспериментальные данные представляются в виде зависимости вязкости от скорости сдвига $\eta_{ef} = f(\dot{\gamma})$. В этом случае, для использования предлагаемой модели, можно осуществить переход от скорости сдвига к напряжениям по очевидной формуле: $\tau^i = \eta_{ef}^i \dot{\gamma}^i$, где $i = 1, \dots, N$, при этом N — число экспериментальных точек.

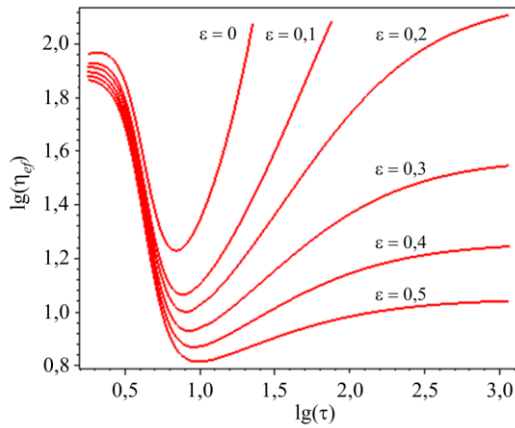


Рис. 8. Типичный вид зависимостей вязкости от напряжения для суспензии с различной концентрацией (ϵ), рассчитанных по предложенной модели с параметрами: $\mu_0 = 1,34$ Па·с; $\eta_0 = 0,63$ Па·с; $S_0 = 1$ Па; $a = 40$; $b = 64$; $p = 1$

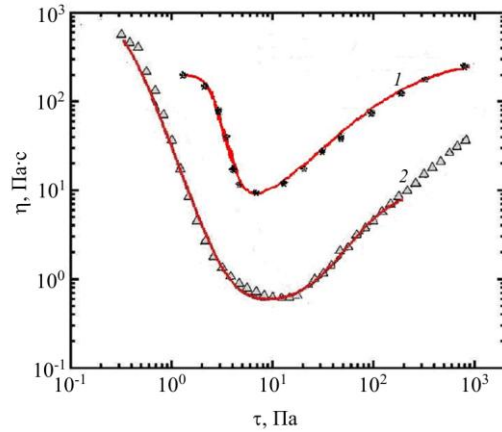


Рис. 9. Зависимости эффективной вязкости от напряжения для суспензии частиц Aerosil® R816 в полипропиленгликоле [7] (кривая 1) и частиц осажденного карбоната кальция на основе полиэтиленгликоля [24] (2); маркеры – эксперимент, сплошные линии – расчет по предложенной модели

Для демонстрации работоспособности предложенной модели на рисунке 8 показаны типичные кривые зависимости эффективной вязкости от напряжения для суспензий с неньютоновской дисперсионной жидкостью при различной концентрации частиц. На рисунке 9 приведены экспериментальные зависимости эффективной вязкости от напряжения для суспензий, построенные автором по предложенной модели, и, для сравнения, полученные ранее в работе [24].

Использование предложенного варианта реологической модели для расчета многомерных течений требует применения численных методов. Например, в случае ползущего течения суспензии в плоском канале можно применить метод конечных элементов в форме Галеркина с линейризацией методом секущих:

$$\int_0^L \int_0^h \left\{ \rho u_x \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial u_x}{\partial x} p + \eta_{ef} \left[2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dy = P_0 \int_0^h u_x dy,$$

$$\int_0^L \int_0^h \left\{ \rho u_y \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) - \frac{\partial u_y}{\partial y} p + \eta_{ef} \left[2 \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy = 0,$$

$$\int_0^L \int_0^h \alpha \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

где u_x, u_y, α — взвешивающие функции, P_0 — распределенная нагрузка, в числовом выражении равная давлению на входе, $\eta_{ef}^k, \eta_{ef}^{k-1}$ — эффективная вязкость, вычисляемая по формуле (13) на текущей и предыдущей итерации. Расчеты выполнялись на сетке из 6000 треугольных элементов. Сходимость итерационного процесса оценивалась по эффективной вязкости, вычисляемой для каждого элемента до момента выполнения условия $\max \left| \frac{\eta_{ef}^k - \eta_{ef}^{k-1}}{\eta_0} \right| < \delta$, где $\delta = 10^{-6}$ — заданное малое число. Для сходимости решения, в зависимости от параметров задачи, требовалось от 70 до 300 итераций.

На рисунке 10 представлены рассчитанные методом конечных элементов профили безразмерной скорости и зависимости максимальной скорости от перепада давления в плоском прямоугольном канале высотой $h = 0,01$ м и длиной $L = 0,1$ м для суспензии частиц осажденного карбоната кальция на основе полиэтиленгликоля [24]. Использовалась модель с материальными константами: $\epsilon = 0,29$; $\mu_0 = 1,34$ Па·с; $\eta_0 = 0,63$ Па·с; $S_0 = 1$ Па; $a = 40$; $b = 6$; $p = 1$. Расчеты выполнены при различных заданных давлениях на входе.

Результаты численного анализа течения суспензии частиц в неньютоновской дисперсионной жидкости на примере плоского канала показали, что при плавном возрастании градиента давления эффективная вязкость сначала снижается до минимального значения, а затем увеличивается, скорость же потока ведет себя при этом противоположным образом. Профили скорости при малых градиентах давления почти параболические, а при больших — стремятся к конусообразному виду.

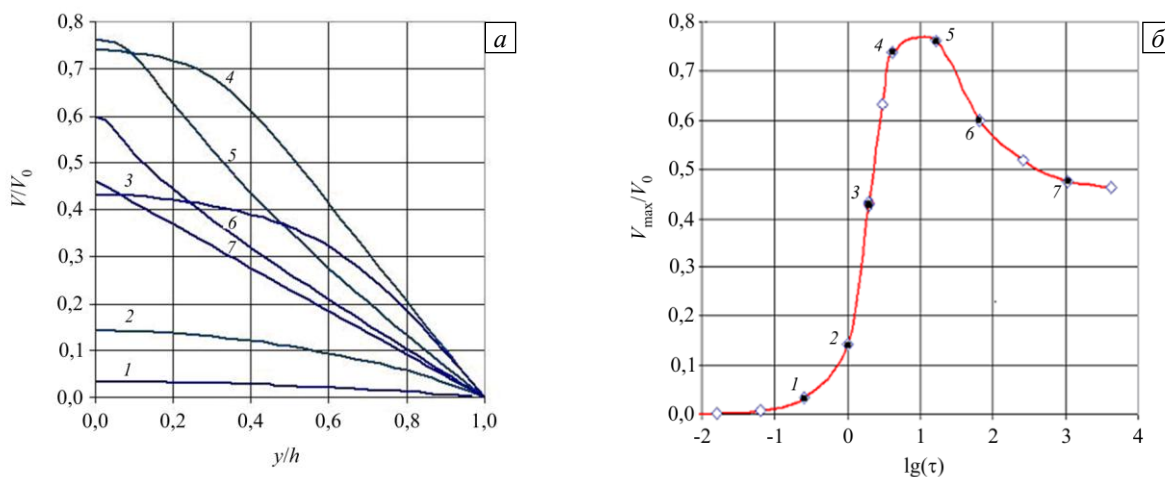


Рис. 10. Плоское течение Пуазейля для суспензии частиц осажденного карбоната кальция на основе полиэтиленгликоля при различных заданных давлениях на входе P_0 , Па: 2,56 (кривые 1); 10,24 (2); 20,06 (3); 0,96 (4); 163,84 (5); 655,36 (6); 41943,04 (7); вид профилей скорости (а) и зависимости максимальной скорости от перепада давления (б); $V_0 = 0,01$ м/с – масштаб скорости

7. Заключение

Математическое моделирование течений концентрированных суспензий в связи с широким использованием в промышленности и медицине имеет важное теоретическое и практическое значение. Предложенная феноменологическая модель позволяет получить точные аналитические выражения для основных реометрических течений, необходимых для перехода от измеряемых в эксперименте интегральных характеристик к кривой течения и определения материальных констант, входящих в модель. Для учета неньютоновских свойств дисперсионной среды предложена модель в виде феноменологического уравнения, которое описывает как непрерывное, так и скачкообразное увеличение скорости сдвига при плавном возрастании напряжений. Ее отличие от распространенных моделей заключается в добавлении закона Элиса для дисперсионной фазы. Как показали пробные численные расчеты плоского течения Пуазейля, профили скорости в поперечном сечении и скорости сдвига, в зависимости от величины приложенного давления на входе и значений параметров модели, могут иметь разнообразные сложные формы.

Литература

1. Verdier C. Rheological properties of living materials. From cells to tissues // J. Theor. Med. 2003. Vol. 5. No. 2. P. 67-91. <https://doi.org/10.1080/10273360410001678083>
2. Ходаков Г.С. Реология суспензий. Теория фазового течения и ее экспериментальное обоснование // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). 2003. Т. XLVII, № 2. С. 33-43.
3. Guillou S., Makhloufi R. Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by direct numerical simulation // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2007. Vol. 144. P. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008>
4. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J., Velazquez-Navarro J.F. Shear thickening behavior of Aerosil® R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids // Rheol. Acta. 2009. Vol. 48. P. 699-708. <https://doi.org/10.1007/s00397-009-0367-7>
5. Liu A.J., Nagel S.R. The jamming transition and the marginally jammed solid // Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2010. Vol.1. P. 347-369. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104045>
6. Seth J. R., Mohan L., Locatelli-Champagne C., Cloitre M., Bonnecaze R.T. A micromechanical model to predict the flow of soft particle glasses // Nature Mater. 2011. Vol. 10. P. 838-843. <https://doi.org/10.1038/nmat3119>
7. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2011. Vol.166. P. 321-325. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001>
8. Boyer F., Guazzell E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 107. 188301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.188301>
9. Nakanishi H., Nagahiro S., Mitarai N. Fluid dynamics of dilatant fluids // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85. 011401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011401>
10. Фортъе А. Механика суспензий. М.: Мир, 1971. 264с.
11. Урьев Н.Б. Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов. М.:Химия, 1988. 255 с.
12. Tanner R.I. Engineering rheology. Oxford University Press, 2000. 586 p.
13. Brown E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspensions: phenomenology, mechanisms and relations to jamming // Rep. Prog. Phys. 2014. Vol. 77. 046602. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/77/4/046602>

14. Denn M.M., Morris J.F. Rheology of non-Brownian suspensions // *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.* 2014. Vol. 5. P. 203-228. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060713-040221>
15. Ardakani H.A., Mitsoulis E., Hatzikiriakos S.G. Capillary flow of milk chocolate // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2014. Vol. 210. P. 56-65. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2014.06.001>
16. Mari R., Seto R., Morris J.F., Denn M.M. Non monotonic flow curves of shear thickening suspensions // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 91. 052302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.052302>
17. Pan Zh., de Cagny H., Weber B., Bonn D. S-shaped flow curves of shear thickening suspensions: Direct observation of frictional rheology // *Phys. Rev. E*. 2015. Vol. 92. 032202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032202>
18. Ness C., Sun J. Shear thickening regimes of dense non-Brownian suspensions // *Soft Matter*. 2016. Vol. 12. P. 914-924. <https://doi.org/10.1039/c5sm02326b>
19. Vázquez-Quesada A., Ellero M. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with Smoothed Particle Hydrodynamics // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 233. P. 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.12.009>
20. Nagahiro S., Nakanishi H. Negative pressure in shear thickening bands of a dilatant fluid // *Phys. Rev. E*. 2016. Vol. 94. 062614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062614>
21. Vázquez-Quesada A., Wagner N.J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation // *Phys. Fluid*. 2017. Vol. 29. 103104. <https://doi.org/10.1063/1.4997053>
22. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions // *J. Rheol.* 2018. Vol. 62. P. 457-468. <https://doi.org/10.1122/1.4999237>
23. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension // *Phys. Rev. Lett.* 2019. Vol. 122. 098004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.098004>
24. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition // *J. Rheol.* 2005. Vol. 49. P. 719-746. <https://doi.org/10.1122/1.1895800>
25. Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V., Shakirov N.V. The hysteresis phenomenon in nonisothermal channel flow of a non-Newtonian liquid // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 1999. Vol. 81. P. 17-26. [https://doi.org/10.1016/S0377-0257\(98\)00091-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0257(98)00091-3)
26. Арустов С.Н., Скульский О.И. Точное решение задачи течения шестиконстантной модели жидкости Джеффриса в плоском канале // *ПМТФ*. 2002. Т. 43, № 6. С. 39-45. (English version <https://doi.org/10.1023/A:1020752101539>)
27. Арустов С.Н., Скульский О.И. Точное решение задачи течения раствора полимера в плоском канале // *ИФЖ*. 2003. Т. 76, № 3. С. 88-95. (English version <https://doi.org/10.1023/A:1024768930375>)

References

1. Verdier C. Rheological properties of living materials. From cells to tissues. *J. Theor. Med.*, 2003, vol. 5, no. 2, pp. 67-91. <https://doi.org/10.1080/10273360410001678083>
2. Khodakov G.S. Reologiya suspenziy. Teoriya fazovogo techeniyaiye eksperimental'noye obosnovaniye [Suspension rheology. The theory of phase flow and its experimental substantiation]. *Ros. khim. zh. (ZH. Ros. khim. ob-vaim. D.I. Mendeleeva)*, 2003, vol. XLVII, no. 2, pp. 33-43.
3. Guillou S., Makhlof R. Effect of a shear-thickening rheological behaviour on the friction coefficient in a plane channel flow: A study by direct numerical simulation. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2007, vol. 144, pp. 73-86. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2007.03.008>
4. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernandez F.J., Velazquez-Navarro J.F. Shear thickening behavior of Aerosil® R816 nanoparticles suspensions in polar organic liquids. *Rheol. Acta*, 2009, vol. 48, pp. 699-708. <https://doi.org/10.1007/s00397-009-0367-7>
5. Liu A.J., Nagel S.R. The jamming transition and the marginally jammed solid. *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2010, vol. 1, pp. 347-369. <https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-070909-104045>
6. Seth J.R., Mohan L., Locatelli-Champagne C., Cloitre M., Bonnecaze R.T. A micromechanical model to predict the flow of soft particle glasses. *Nature Mater.*, 2011, vol. 10, pp. 838-843. <https://doi.org/10.1038/nmat3119>
7. Galindo-Rosales F.J., Rubio-Hernández F.J., Sevilla A. An apparent viscosity function for shear thickening fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2011, vol. 166, pp. 321-325. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2011.01.001>
8. Boyer F., Guazzell E., Pouliquen O. Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 2011, vol. 107, 188301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.188301>
9. Nakanishi H., Nagahiro S., Mitarai N. Fluid dynamics of dilatant fluids. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 85, 011401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.85.011401>
10. Fortier A. *Mécanique de suspensions* [Suspension mechanics]. Masson et C-ie, 1967. 176 p.
11. Ur'yev N.B. *Fiziko-khimicheskiye osnovy tekhnologii dispersnykh sistem i materialov* [Physicochemical foundations of the technology of dispersed systems and materials]. Moscow, Khimiya, 1988. 255p.
12. Tanner R.I. *Engineering rheology*. Oxford University Press, 2000. 586 p.
13. Brown E., Jaeger H.M. Shear thickening in concentrated suspensions: phenomenology, mechanisms and relations to jamming. *Rep. Prog. Phys.*, 2014, vol. 77, 046602. <http://iopscience.iop.org/0034-4885/77/4/046602>
14. Denn M.M., Morris J.F. Rheology of non-Brownian suspensions. *Annu. Rev. Chem. Biomol. Eng.*, 2014, vol. 5, pp. 203-228. <https://doi.org/10.1146/annurev-chembioeng-060713-040221>
15. Ardakani H.A., Mitsoulis E., Hatzikiriakos S.G. Capillary flow of milk chocolate. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, vol. 210, pp. 56-65. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2014.06.001>
16. Mari R., Seto R., Morris J.F., Denn M.M. Nonmonotonic flow curves of shear thickening suspensions. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 052302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.052302>

17. Pan Zh., de Cagny H., Weber B., Bonn D. S-shaped flow curves of shear thickening suspensions: Direct observation of frictional rheology. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 92, 032202. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.032202>
18. Ness C., Sun J. Shear thickening regimes of dense non-Brownian suspensions. *Soft Matter*, 2016, vol. 12, pp. 914-924. <https://doi.org/10.1039/c5sm02326b>
19. Vázquez-Quesada A., Ellero M. Rheology and microstructure of non-colloidal suspensions under shear studied with Smoothed Particle Hydrodynamics. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2016, vol. 233, pp. 37-47. <https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.12.009>
20. Nagahiro S., Nakanishi H. Negative pressure in shear thickening bands of a dilatant fluid. *Phys. Rev. E*, 2016, vol. 94, 062614. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.062614>
21. Vázquez-Quesada A., Wagner N.J., Ellero M. Planar channel flow of a discontinuous shear-thickening model fluid: Theory and simulation. *Phys. Fluid.*, 2017, vol. 29, 103104. <https://doi.org/10.1063/1.4997053>
22. Singh A., Mari R., Denn M.M., Morris J.F. A constitutive model for simple shear of dense frictional suspensions. *J. Rheol.*, 2018, vol. 62, pp. 457-468. <https://doi.org/10.1122/1.4999237>
23. Singh A., Pednekar S., Chun J., Denn M.M., Morris J.F. From yielding to shear jamming in a cohesive frictional suspension. *Phys. Rev. Lett.*, 2019, vol. 122, 098004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.098004>
24. Egres R.G., Wagner N.J. The rheology and microstructure of acicular precipitated calcium carbonate colloidal suspensions through the shear thickening transition. *J. Rheol.*, 2005, vol. 49, pp. 719-746. <https://doi.org/10.1122/1.1895800>
25. Skul'skiy O.I., Slavnov Ye.V., Shakirov N.V. The hysteresis phenomenon in nonisothermal channel flow of a non-Newtonian liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 1999, vol. 81, pp. 17-26. [https://doi.org/10.1016/S0377-0257\(98\)00091-3](https://doi.org/10.1016/S0377-0257(98)00091-3)
26. Aristov S.N., Skul'skii O.I. Exact solution of the problem on a six-constant Jeffrey's model of fluid in a plane channel. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2002, vol. 43, pp. 817-822. <https://doi.org/10.1023/A:1020752101539>
27. Aristov S.N., Skul'skii O.I. Exact solution of the problem of flow of a polymer solution in a plane channel. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2003, vol. 76, pp. 577-585. <https://doi.org/10.1023/A:1024768930375>

Поступила в редакцию 22.06.2020; после доработки 21.07.2020; принята к опубликованию 21.07.2020