

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.3.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.20)

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ИЗГИБА МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ СТЕРЖНЕЙ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ И ЕЕ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С.О. Саркисян, М.В. Хачатрян

Ширакский государственный университет, Гюмри, Республика Армения

Обсуждается проблема перехода от системы двумерных уравнений микрополярной (моментной) теории упругости в тонкой криволинейной области к одномерной системе уравнений деформирования микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью (имеется в виду изогнутый стержень, со срединной поверхностью в виде дуги окружности). При осуществлении этого перехода применяются так называемые обобщенные на микрополярный случай гипотезы Тимошенко. Исходя из них, построена прикладная модель, описывающая напряженно-деформированное состояние при изгибе микрополярного (с независимыми полями перемещений и вращений) упругого тонкого стержня с круговой осью. Показано, что модель включает закон сохранения энергии, энергетические теоремы, вариационные принципы. Все основные функционалы построенной модели получены из функционала двумерной микрополярной теории упругости, содержащего производные перемещений и поворотов только первого порядка. Для решения граничных задач статики и динамики на основе прикладной модели изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью разрабатывается соответствующий вариант метода конечных элементов (МКЭ). Сформулированы основные понятия и этапы реализации модифицированного МКЭ: дискретизация, выбор основных узловых неизвестных, аппроксимация искомого решения и построение основных разрешающих уравнений. Приведены примеры конечно-элементных решений задач статического деформирования и задач о собственных колебаниях стержней с круговой осью в рамках как микрополярной, так и классической теории упругости. Выполнен сравнительный анализ решений, в результате которого установлены некоторые эффективные свойства стержней с круговой осью при рассмотрении их деформаций согласно микрополярной теории упругости.

Ключевые слова: микрополярная теория упругости, стержень с круговой осью, плоский изгиб, одномерная модель, метод конечных элементов

CONSTRUCTION OF THE BENDING MODEL OF MICROPOLAR ELASTIC THIN BEAMS WITH A CIRCULAR AXIS AND ITS IMPLEMENTATION USING FINITE ELEMENT METHOD

S.H. Sargsyan and M.V. Khachatryan

Shirak State University, Gyumri, Republic of Armenia

This paper considers the problem of transition from the system of two-dimensional equations of the micropolar (moment) theory of elasticity in a thin curved area to the one-dimensional system of equations describing deformation of the micropolar elastic thin beam with a circular axis. During the transition process, Timoshenko's hypotheses generalized to the micropolar case are applied. As a result, the applied model (with independent fields of displacements and rotation) of a micropolar elastic thin beam with a circular axis has been constructed. It is shown that the model includes the law of conservation of energy, energy theorems and variation principles. All main functionals for the model of the micropolar elastic thin beam with a circular axis are obtained from the functional of the two-dimensional micropolar theory of elasticity, containing only the first derivatives of displacements and rotations. The finite element method (FEM) is taken to study the boundary problems of statics and dynamics of applied model of the micropolar elastic thin beam with a circular axis. The basic concepts and stages of the FEM are formulated: the discretization, the selection of basic nodal unknowns, the approximation of the solution, and the construction of the basic FEM equations. The finite-element solutions of some problems of statics and problems on natural vibrations of beams with a circular axis are considered according to the micropolar theory of elasticity. A comparative analysis with similar problems of beams with a circular axis according to the classical theory of elasticity is carried out. Based on the results, some effective properties of beams with a circular axis have been established when considering their deformations in the context of the micropolar theory of elasticity.

Key words: micropolar theory of elasticity, beam with a circular axis, plane bending, one-dimensional model, finite element method

1. Введение

Моделям изгибной деформации упругих тонких стержней с круговой осью посвящено достаточно много работ. Так, в работах [1, 2] и других модель построена и изучена на основе классических гипотез (нерастяжимости, плоской нормали), в [3, 4] — с учетом растяжимости упругого стержня и поперечных сдвиговых деформаций. В [5] и [6] рассмотрены прикладные модели изгибной деформации микрополярных (со стесненным вращением) тонких стержней с круговой осью на основе классических гипотез (см. [5]) и с учетом растяжимости и поперечных сдвиговых деформаций (см. [6]).

Следует отметить актуальность и принципиальную значимость работы [7], где осуществлен целенаправленный анализ аналитических и численных решений статических задач в рамках микрополярной теории упругости и установлены эффекты проявления моментных свойств материала. Полученные результаты дают возможность для постановки экспериментов с целью определения упругих постоянных для этой теории.

Метод конечных элементов (МКЭ) для решения задач с использованием модели деформаций упругих тонких стержней с круговой осью, исследуемых по классической теории упругости, изложен и применен в работах [3, 4], а для микрополярной модели со стесненным вращением — в [5, 6]. МКЭ для приложений в микрополярной теории упругости получил развитие в работах [8, 9]. Авторами [10, 11] разработан вариант МКЭ для решения граничных задач деформирования микрополярных прямолинейных тонких стержней и пластин.

В данном исследовании на основе изложенных в работах [12–14] гипотез построена прикладная (одномерная) модель микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью, которая численно реализуется с помощью разработанного варианта МКЭ. На основе анализа полученных численно результатов установлены некоторые эффекты от учета микрополярных свойств материала, не наблюдаемые в случае классического расчета.

2. Постановка задачи. Система уравнений прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью

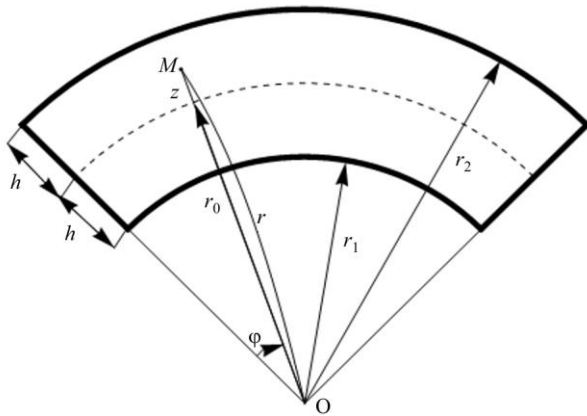


Рис. 1. Расчетная схема к задаче изгиба стержня с круговой осью (со срединной поверхностью в виде дуги окружности (показана штриховой линией))

Рассмотрим стержень с круговой осью (Рис. 1), имеющий постоянное поперечное сечение высотой $2h = r_2 - r_1$ и шириной b , настолько малой, что задачу об изгибе этого стержня можно рассматривать как плоскую (то есть считать, что имеет место обобщенное плоское напряженное состояние). Ось стержня представляет собой дугу окружности радиуса r_0 ; материал стержня изотропный. Деформация стержня описывается не только вектором перемещения \mathbf{V} , но и вектором поворота (против часовой стрелки) ω [15].

Введем полярную систему координат $(Or\varphi)$: $r_1 \leq r \leq r_2, 0 \leq \varphi \leq \varphi_1$. Тогда для срединной плоскости стержня, где реализуется обобщенное плоское напряженное состояние с независимыми полями перемещений и поворотов [15], в рамках микрополярной теории упругости запишем:

– уравнения равновесия (движения)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{21} + \sigma_{12}) &= 0, & 1 \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \varphi} &= 0, & 2 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \mu_{13}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial r} + \frac{1}{r} \mu_{23} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= 0. & 3 \end{aligned} \tag{1}$$

В случае динамической задачи в правых частях уравнений (1) следует, соответственно, записать инерционные силы $\rho \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}, \rho \frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}$ и инерционный момент $\left(J \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} \right)$;

– соотношения упругости

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) / E, & 1 \\ \gamma_{22} &= (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) / E, & 2 \\ \gamma_{12} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21}, & 3 \\ \gamma_{21} &= \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{21} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{12}, & 4 \\ \chi_{13} &= \mu_{13} / B, & 5 \\ \chi_{23} &= \mu_{23} / B; & 6 \end{aligned} \tag{2}$$

– геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} V_2, & \gamma_{22} &= \frac{\partial V_2}{\partial r}, & \gamma_{12} &= \frac{1}{r} \frac{\partial V_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} V_1 - \omega_3, & \gamma_{21} &= \frac{\partial V_1}{\partial r} + \omega_3, \\ \chi_{13} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_3}{\partial \varphi}, & \chi_{23} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (1)–(3) приняты обозначения [15]: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}$ — компоненты тензора напряжений от приложенных внешних сил; μ_{13}, μ_{23} — компоненты тензора моментных напряжений; $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ — компоненты тензора деформаций от внешних силовых воздействий; χ_{13}, χ_{23} — компоненты тензора напряжений, возникающих в результате изгиба–кручения; V_1, V_2 — перемещения; ω_3 — компонента вектора поворота ω , нормальная к срединной плоскости стержня; E, ν, α, B — упругие постоянные микрополярного материала, при этом $\mu = E/(2(1+\nu))$; ρ — плотность материала; t — время; J — мера инерции материала при вращении.

Будем считать, что на линиях $r = r_1, r = r_2$ заданы внешние усилия и моменты:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} &= q_1^-, & \sigma_{22} &= q_2^-, & \mu_{23} &= m^- & \text{на } r = r_1, \\ \sigma_{21} &= q_1^+, & \sigma_{22} &= q_2^+, & \mu_{23} &= m^+ & \text{на } r = r_2, \end{aligned} \quad (4)$$

а в сечениях расчетной области $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$ имеет место один из следующих вариантов граничных условий:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}', \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}', \quad \mu_{13} = \mu_{13}' \quad \text{при } \varphi = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}'', \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}'', \quad \mu_{13} = \mu_{13}'' \quad \text{при } \varphi = \varphi_1;$$

$$V_1 = V_1', \quad V_2 = V_2', \quad \omega_3 = \omega_3' \quad \text{при } \varphi = 0, \quad (6)$$

$$V_1 = V_1'', \quad V_2 = V_2'', \quad \omega_3 = \omega_3'' \quad \text{при } \varphi = \varphi_1;$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}', \quad V_2 = V_2', \quad \mu_{13} = \mu_{13}' \quad \text{при } \varphi = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}'', \quad V_2 = V_2'', \quad \mu_{13} = \mu_{13}'' \quad \text{при } \varphi = \varphi_1.$$

В случае динамической задачи следует присоединить также начальные (при $t = 0$) условия для $V_1, V_2, \omega_3, \frac{\partial V_1}{\partial t}, \frac{\partial V_2}{\partial t}$ и $\frac{\partial \omega_3}{\partial t}$.

Удельная энергия деформации микрополярного упругого изотропного тела выражается следующей формулой [15]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \gamma_{11} + \sigma_{22} \gamma_{22} + \sigma_{12} \gamma_{12} + \sigma_{21} \gamma_{21} + \mu_{13} \chi_{13} + \mu_{23} \chi_{23}), \quad (8)$$

или с учетом (2), разрешенных относительно напряжений и моментных напряжений,

$$\mathcal{E} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{11}^2 + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \gamma_{11} \gamma_{22} + \frac{E}{2(1-\nu^2)} \gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} (\mu + \alpha) \gamma_{12}^2 + (\mu - \alpha) \gamma_{12} \gamma_{21} + \frac{1}{2} (\mu + \alpha) \gamma_{21}^2 + \frac{1}{2} B \chi_{13}^2 + \frac{1}{2} B \chi_{23}^2. \quad (9)$$

В случае статической задачи из уравнений (1)–(7) известным способом получим закон сохранения энергии (то есть теорему Клапейрона). Для обобщенного плоского напряженного состояния согласно микрополярной теории упругости в рассматриваемой двумерной области D (Рис. 1) она имеет вид:

$$\iint_D \mathcal{E} r dr d\varphi = A/2, \quad (10)$$

где $A/2$ — работа внешних усилий и моментов:

$$A = \int_0^{\varphi_1} (q_1^+ V_1 + q_2^+ V_2 + m^+ \omega_3)_{r=r_2} r_2 d\varphi - \int_0^{\varphi_1} (q_1^- V_1 + q_2^- V_2 + m^- \omega_3)_{r=r_1} r_1 d\varphi - \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{11}' V_1 + \sigma_{12}' V_2 + \mu_{13}' \omega_3)_{\varphi=\varphi_1} dr + \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{11}'' V_1 + \sigma_{12}'' V_2 + \mu_{13}'' \omega_3)_{\varphi=\varphi_2} dr. \quad (11)$$

Можно убедиться [15], что существуют и другие энергетические теоремы, а также вариационные принципы (как в случае статики, так и в случае динамики).

В дальнейшем будем считать, что $2h \ll r_0$ и $2h \ll l$, где l — длина средней линии стержня (то есть полагаем стержень тонкостенным). Поскольку целью является построение прикладной (одномерной) модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью, то для этого радиус-вектор r произвольной точки области представим так: $r = r_0 + z$, где $-h \leq z \leq h$ ($r_1 = r_0 - h$, $r_2 = r_0 + h$), а исходя из тонкостенности стержня, имеем:

$$1 + h/r_0 \approx 1. \quad (12)$$

Приведем допущения (гипотезы), используемые в данной работе. Они установлены на основе асимптотического метода интегрирования граничных задач микрополярной теории упругости в тонких областях и применены при построении прикладных моделей прямолинейных тонких стержней, пластин и оболочек в [12–14].

Гипотеза 1. В качестве исходной кинематической гипотезы для перемещений примем гипотезу прямой линии — гипотезу Тимошенко, согласно которой линейный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости (в обсуждаемой задаче — средней линии) стержня до деформации, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии: он поворачивается на некоторый угол, но не меняет при этом своей длины. Кроме того, для независимого поворота ω_3 будем считать, что эта функция постоянна по координате z . Вследствие перечисленных допущений для срединной линии стержня с круговой осью справедлив следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по координате z :

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi), \quad \omega_3 = \Omega_3(\varphi), \quad (13)$$

где $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ — перемещения точек средней линии в направлениях по касательной и нормали к ней (то есть $w(\varphi)$ — это прогиб стержня), $\psi(\varphi)$ — угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi)$ — независимый поворот этого элемента.

Кинематические гипотезы (13) в целом, как и в работах [12–14], назовем обобщенными кинематическими гипотезами Тимошенко на случай микрополярного тонкого стержня (в данном исследовании — на стержень с круговой осью).

Гипотеза 2. Исходя из допущения о тонкостенности стержня будем принимать во внимание не только приближенное равенство (12), но и имеющее такую же точность соотношение:

$$1/r = 1/(r_0 + z) = \frac{1}{r_0(1 + z/r_0)} \approx \frac{1}{r_0}.$$

Гипотеза 3. В соотношении упругости (2₁) введем для нормального напряжения σ_{22} предположение о его малости по сравнению с нормальным напряжением σ_{11} .

Гипотеза 4. При определении деформаций от внешних силовых воздействий, изгиба–кручения, силовых и моментных напряжений примем первоначально для касательного напряжения σ_{21} условие:

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma_{21}}(\varphi). \quad (14)$$

После нахождения названных выше величин уточним формулу для σ_{21} . Для этого проинтегрируем по z уравнение равновесия (1₂) и при определении постоянной интегрирования (вернее, функции от φ) потребуем равенства нулю интеграла от полученного выражения в пределах от $-h$ до h . Установленное после интегрирования выражение прибавим к формуле (14).

Принятый закон распределения перемещений и поворота и другие соотношения из (13) подставим в формулы (3), в итоге найдем деформации от внешних силовых воздействий и деформации изгиба–кручения:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \left(\frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w \right) + z \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad \gamma_{22} = 0, \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \quad \gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \chi_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}, \quad \chi_{23} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Примем следующие обозначения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}. \quad (16)$$

Тогда для деформаций и изгиба–кручения получим:

$$\gamma_{11} = \Gamma_{11} + zK_{11}, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12}, \quad \gamma_{21} = \Gamma_{21}, \quad \chi_{13} = k_{13}, \quad \chi_{23} = 0. \quad (17)$$

Здесь: Γ_{11} — продольная относительная деформация средней линии; K_{11} — изменение кривизны средней линии (от силовых напряжений); Γ_{12}, Γ_{21} — сдвиговые деформации; k_{13} — изменение кривизны средней линии (от моментных напряжений).

На основании гипотезы 3, выражения для γ_{11} из (17) и формулы (2₁) найдем напряжения σ_{11} :

$$\sigma_{11} = \overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi) + z \overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi), \quad (18)$$

где

$$\overset{0}{\sigma}_{11}(\varphi) = E\Gamma_{11}, \quad \overset{1}{\sigma}_{11}(\varphi) = EK_{11}.$$

Для определения силового напряжения σ_{12} используем выражения (2₃), (2₄) и (15), в результате получим:

$$\sigma_{12} = (\mu + \alpha)\Gamma_{12} + (\mu - \alpha)\Gamma_{21}. \quad (19)$$

Имея ввиду формулы для σ_{11} (18) и σ_{12} (19), рассмотрим уравнение равновесия (1₂), которое проинтегрируем по r с учетом тонкостенности расчетной области и граничных условий для σ_{22} из (4), получим напряжения σ_{22} :

$$\sigma_{22} = \frac{1}{2}(q_2^+ + q_2^-) - \frac{h^2}{2} \frac{1}{r_0} \overset{1}{\sigma}_{11} + z \left(\frac{1}{r_0} \overset{0}{\sigma}_{11} - \frac{1}{r_0} \frac{d\overset{0}{\sigma}_{12}}{d\varphi} \right) + \frac{1}{r_0} \overset{1}{\sigma}_{11} \frac{z^2}{2}. \quad (20)$$

Для моментного напряжения μ_{13} на основании выражения (2₅) и с учетом формулы для χ_{13} из (17) будем иметь:

$$\mu_{13} = Bk_{13}. \quad (21)$$

Значение моментного напряжения μ_{23} получим из уравнения равновесия (1₃) путем интегрирования по r с учетом формул (14), (19), (21):

$$\mu_{23} = \frac{1}{2}(m^+ + m^-) - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d\mu_{13}}{d\varphi} + \overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21} \right). \quad (22)$$

Для определения напряжения σ_{21} возьмем за основу гипотезу 4. Тогда с использованием уравнения равновесия (1₁) и формулы (14) получим выражение:

$$\sigma_{21} = \sigma_{21}^0(\varphi) + \frac{h^2}{6} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}}{d\varphi} - z \left(\frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} \sigma_{12}^0 \right) - \frac{z^2}{2} \frac{1}{r_0} \frac{d\sigma_{11}}{d\varphi}. \quad (23)$$

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, что уже выполнено для перемещений и поворота, деформаций и изгиба-кручения, силовых и моментных напряжений, в прикладной теории микрополярного упругого стержня с круговой осью вместо компонент силовых и моментных напряжений введем статически эквивалентные им интегральные характеристики — усилия N , Q_1 , Q_2 и моменты M_{11} , L_{13} , которые выражаются следующими формулами:

$$N = \int_{-h}^h \sigma_{11} dz, \quad Q_1 = \int_{-h}^h \sigma_{12} dz, \quad Q_2 = \int_{-h}^h \sigma_{21} dz, \quad M_{11} = \int_{-h}^h \sigma_{11} z dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^h \mu_{13} dz. \quad (24)$$

Далее примем за основу формулы для σ_{22} (20), μ_{23} (22) и σ_{21} (23), удовлетворим граничные условия (4) и с учетом формул (24) придем к системе уравнений равновесия прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} N - \frac{1}{r_0} \frac{dQ_1}{d\varphi} &= q_2^+ - q_2^-, \\ \frac{1}{r_0} Q_1 + \frac{1}{r_0} \frac{dN}{d\varphi} &= -(q_1^+ - q_1^-), \\ Q_2 - \frac{1}{r_0} \frac{dM_{11}}{d\varphi} &= h(q_1^+ + q_1^-), \\ Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0} \frac{dL_{13}}{d\varphi} &= m^+ - m^-. \end{aligned} \quad (25)$$

В случае динамической задачи в правые части уравнений системы (25) следует, соответственно, добавить инерционные усилия и момент $2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, $2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$, $2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}$.

Далее, при помощи формул для σ_{11} (18), σ_{12} (19), μ_{13} (21), σ_{21} (23), получим соотношения упругости для создаваемой модели:

$$\begin{aligned} N &= 2Eh\Gamma_{11}, \quad Q_1 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{21}, \quad Q_2 = 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{12}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} K_{11}, \quad L_{13} = 2Bhk_{13}. \end{aligned} \quad (26)$$

Присоединим к уравнениям равновесия (25) и соотношениям упругости (26) еще и геометрические уравнения (16):

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0} w, \quad \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0} \frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0} u - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad K_{11} = \frac{1}{r_0} \frac{d\psi}{d\varphi}, \quad k_{13} = \frac{1}{r_0} \frac{d\Omega_3}{d\varphi}. \quad (27)$$

Уравнения равновесия (25), соотношения упругости (26) и геометрические соотношения (27) представляют собой основные уравнения прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью. Для замыкания постановки задачи к этой системе уравнений также следует добавить граничные условия.

Запишем для прикладной модели уравнение баланса энергии. Оно отыскивается известным способом либо из системы уравнений (25)–(27), либо из уравнения баланса энергии (10) с использованием формул (17)–(19), (21), (23), которые получены на основе принятых выше гипотез 1–4:

$$\int_0^a \mathcal{E}_0 dx_1 = A_0/2. \quad (28)$$

где $A_0/2$ — работа приложенных внешних усилий:

$$A_0 = \int_0^{\varphi_1} \left[(q_1^+ - q_1^-)u + (q_1^+ + q_1^-)h\psi + (q_2^+ - q_2^-)w + (m^+ - m^-)\Omega_3 \right] r_0 d\varphi - uN' \Big|_{\varphi=0} - \psi M' \Big|_{\varphi=0} - wQ' \Big|_{\varphi=0} - \Omega_3 L_{13}' \Big|_{\varphi=0} + uN'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} + \psi M'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} + wQ'' \Big|_{\varphi=\varphi_1} + \Omega_3 L_{13}'' \Big|_{\varphi=\varphi_1}. \quad (29)$$

Здесь \mathcal{E}_0 выражается следующей формулой:

$$\mathcal{E}_0 = Eh\Gamma_{11}^2 + \frac{Eh^3}{3} K_{11}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu + \alpha)h\Gamma_{21}^2 + 2(\mu - \alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma + \varepsilon)hk_{13}^2, \quad (30)$$

и представляет плотность потенциальной энергии деформации. С учетом (30) общий вид функционала полной потенциальной энергии микрополярного упругого стержня с круговой осью приобретает вид:

$$U = \int_0^a \left(\mathcal{E}_0 - (q_1^+ + q_1^-)h\psi - (q_2^+ - q_2^-)w - (q_1^+ - q_1^-)u - (m^+ - m^-)\Omega_3 \right) ds - \left((Qw + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=a} - (Qw + Nu + M_{11}\psi + L_{13}\Omega_3) \Big|_{s=0} \right). \quad (31)$$

3. Матрица жесткости конечного элемента упругого стержня с круговой осью

Построение точного решения граничной задачи (25)–(27) связано с большими математическими трудностями (даже в простейших случаях, где это возможно, только для общего решения получаются довольно громоздкие формулы, а после определения постоянных интегрирования, число которых равняется восьми, понятно, о каком объеме выкладок может идти речь. Поэтому для решения подобных задач необходимо обращаться к численным методам. Ниже статическая (или динамическая) задача изгиба упругих тонких стержней с круговой осью (25)–(27) в рамках микрополярной теории упругости реализуется соответствующим вариантом МКЭ.

Основными кинематическими параметрами в этой задаче являются: прогиб оси стержня $w(s)$; осевое перемещение $u(s)$; полный угол поворота нормального элемента $\psi(s)$; независимый поворот этого элемента $\Omega_3(s)$. Распределения принятых основных кинематических переменных по s — длине изогнутой оси стержня, которая разбивается на n криволинейных конечных элементов ($i = 1, 2, \dots, n$), будем аппроксимировать полиномами:

$$\begin{aligned} w(s) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3, & u(s) &= b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3, \\ \psi(s) &= c_0 + c_1s + c_2s^2 + c_3s^3, & \Omega_3(s) &= d_0 + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь: $s = r_0\varphi$; a_i, b_i, c_i, d_i — коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты. Узловые перемещения в произвольном элементе обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} w(0) &= \delta_1, & w'(0) &= \delta_2, & u(0) &= \delta_3, & u'(0) &= \delta_4, \\ \psi(0) &= \delta_5, & \psi'(0) &= \delta_6, & \Omega_3(0) &= \delta_7, & \Omega_3'(0) &= \delta_8, \\ w(a) &= \delta_9, & w'(a) &= \delta_{10}, & u(a) &= \delta_{11}, & u'(a) &= \delta_{12}, \\ \psi(a) &= \delta_{13}, & \psi'(a) &= \delta_{14}, & \Omega_3(a) &= \delta_{15}, & \Omega_3'(a) &= \delta_{16}, \end{aligned} \quad (33)$$

где a — длина дуги i -го конечного элемента. Как видим, конечный элемент имеет шестнадцать степеней свободы.

Подставив выражения (33) в (32), выразим коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i в i -м элементе через узловые перемещения и повороты δ_k . Подстановка найденных a_i, b_i, c_i, d_i снова в (32) приводит для перемещений и поворотов к аппроксимациям:

$$\begin{aligned} w(s) &= \sum_{i=1,2,9,10} \delta_i N_i(s), & u(s) &= \sum_{i=3,4,11,12} \delta_i N_i(s), \\ \psi(s) &= \sum_{i=5,6,13,14} \delta_i N_i(s), & \Omega_3(s) &= \sum_{i=7,8,15,16} \delta_i N_i(s), \end{aligned} \quad (34)$$

где $N_i(s)$ — функции формы i -го элемента:

$$\begin{aligned} N_1 &= N_3 = N_5 = N_7 = 1 - 3s^2/a^2 + 2s^3/a^3, \\ N_2 &= N_4 = N_6 = N_8 = s - 2s^2/a + s^3/a^2, \\ N_9 &= N_{11} = N_{13} = N_{15} = 3s^2/a^2 - 2s^3/a^3, \\ N_{10} &= N_{12} = N_{14} = N_{16} = -s^2/a + s^3/a^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Учет в функционале (31) аппроксимаций (34) и последующее интегрирование дают функцию 16 независимых переменных: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{16}$. Минимизация функционала (31) приводит к нахождению минимума функции шестнадцати независимых переменных. Вычислив соответствующие частные производные, обратив их в нуль, придем к следующему матричному уравнению: $\mathbf{K}_e \boldsymbol{\delta}_e = \mathbf{F}_e$, где \mathbf{K}_e — матрица жесткости элемента с числом узлов 16×16 , $\boldsymbol{\delta}_e = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \dots, \delta_{16}\}^T$ — вектор узловых перемещений и поворотов, \mathbf{F}_e — вектор усилий в узлах.

Вывод разрешающих уравнений при реализации МКЭ предполагает получение выражения полной потенциальной энергии для всего ансамбля конечных элементов модели: $U_\Sigma = \sum_{i=1}^n (\tilde{U}_i + \tilde{P}_i)$, где n — число элементов; \tilde{U}_i — потенциальная энергия деформации i -го элемента; \tilde{P}_i — потенциал внешних сил i -го элемента. Минимизация U_Σ по всем неизвестным в каждом узле системы приводит к глобальным уравнениям равновесия:

$$\mathbf{K}_\Sigma \Delta = \mathbf{F}_\Sigma, \quad (36)$$

где \mathbf{K}_Σ — глобальная матрица жесткости стержня; \mathbf{F}_Σ — глобальный вектор эквивалентных узловых сил всего стержня; Δ — глобальный вектор узловых неизвестных.

Отметим, что в практических расчетах целесообразно использовать традиционную для МКЭ процедуру формирования глобальной матрицы жесткости и глобального вектора эквивалентных узловых сил стержня, согласно которой матрица и вектор собираются из матриц жесткости и векторов узловых сил отдельных элементов с учетом локальных и глобальных степеней свободы системы. Решение системы уравнений (36) при соответствующих граничных условиях позволяет определить значения основных кинематических параметров во всех узлах конечно-элементной модели стержня. В случае динамической задачи (когда приходится определять собственные частоты колебаний) вместо (31) необходимо рассматривать функционал вида

$$U_0 = \int_0^a \left(W_0 + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u + \frac{\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \psi + Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2} \Omega_3 \right) ds$$

и далее поступать так же, как это делалось выше. В результате получится следующее матричное уравнение: $(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e) \cdot \boldsymbol{\delta}_e = 0$, где \mathbf{M}_e — матрица масс элемента с числом узлов 16×16 .

Вывод разрешающих уравнений при реализации МКЭ для стержня предполагает получение выражений потенциальной энергии деформации и кинетической энергии колебаний для всего ансамбля конечных элементов модели. Минимизация выражения полной энергии стержня по всем узловым неизвестным системы приводит к глобальной системе алгебраических уравнений:

$$\mathbf{K}_\Sigma \Delta - \omega^2 \mathbf{M}_\Sigma \Delta = 0,$$

где \mathbf{M}_Σ — глобальная матрица массы стержня.

4. Некоторые прикладные граничные задачи микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью

В качестве примеров рассмотрим стержни, расчетные области для которых показаны на рисунках 2 и 3. Считая φ_0 равным $\pi/2$, π , $3\pi/2$ или 2π , можно получить различные прикладные задачи. Приведенные ниже численные результаты относятся к случаю, когда $\varphi_0 = \pi/2$.

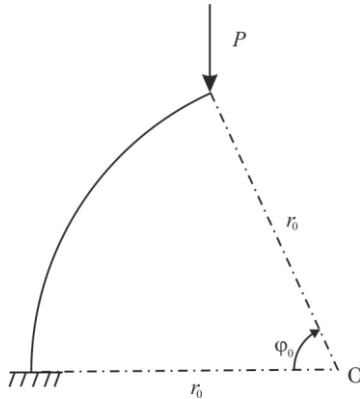


Рис. 2. Стержень, нижний конец которого жестко защемлен, а верхний свободен и нагружен сосредоточенной силой P

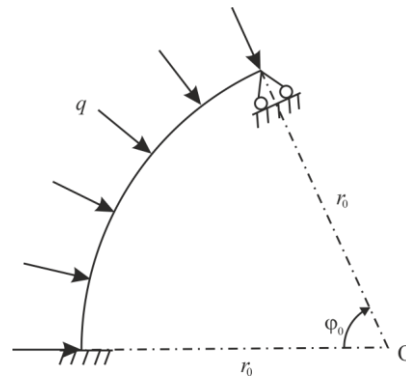


Рис. 3. Стержень, нижний конец которого жестко защемлен, а верхний шарнирно оперт, нагруженный равномерно распределенной нагрузкой q

4.1. Деформация стержня под воздействием сосредоточенной силы

Изучим деформацию стержня, показанного на рисунке 2 ($\varphi_0 = \pi/2$). Имеют место граничные условия:

– при $s = 0$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0;$$

– при $s = a = \pi r_0/2$

$$Q_1 = P, \quad N = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0.$$

Вектор узловых нагрузок выражается так:

$$\mathbf{F}_e = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, P, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Введем безразмерные величины:

$$\delta = \frac{h}{a}, \quad B^* = \frac{B}{a^2 \mu}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\mu}, \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{a}, \quad \bar{P} = \frac{P}{a \mu}.$$

Положим, что

$$\delta = 1/40, \quad \nu = 0,28, \quad E^* = E/\mu = 2(1+\nu) = 2,56, \quad B^* = 1,9 \times 10^{-3}, \quad \bar{\alpha} = 10^{-2}, \quad \bar{r}_0 = 0,64, \quad \bar{P} = 9,5 \times 10^{-7}.$$

Полученные результаты вычислений показаны на рисунке 4. Здесь $\bar{\alpha}$ имеет фиксированное значение. Для сравнения приведены кривые классического упругого деформирования стержня (соответствующие расчеты выполнены авторами этой статьи) и классическое решение для микрополярного стержня с учетом стесненного вращения (результаты взяты из работы [6]). Видно, что при учете микрополярных свойств материала повышается, по сравнению с классическим решением, жесткость стержня.

Для рассмотренной задачи на рисунке 5 и в таблице 1 представлены численные результаты в случае, когда выясняется вопрос о влиянии на жесткость стержня изменения значения безразмерной упругой постоянной $\bar{\alpha}$. Данные свидетельствуют, что при возрастании безразмерной упругой постоянной $\bar{\alpha}$ и условии постоянства остальных безразмерных параметров жесткость стержня увеличивается. При $\bar{\alpha} \rightarrow \infty$ приходим к результату, когда модель стержня соответствует микрополярной модели со стесненным вращением [6].

Отметим, что при изменении безразмерного физического параметра B^* прогиб или другие кинематические характеристики деформации стержня меняются мало.

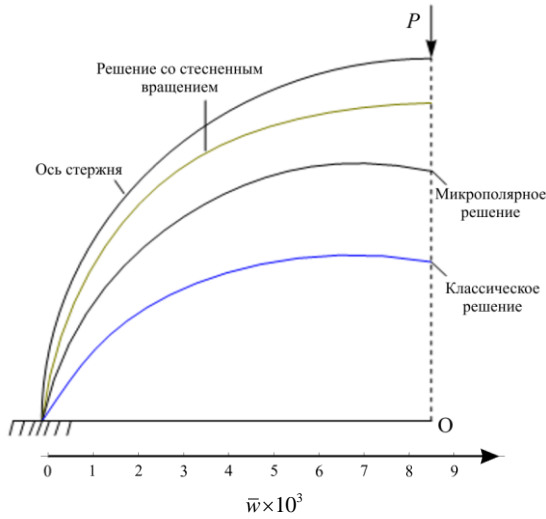


Рис. 4. График безразмерного прогиба

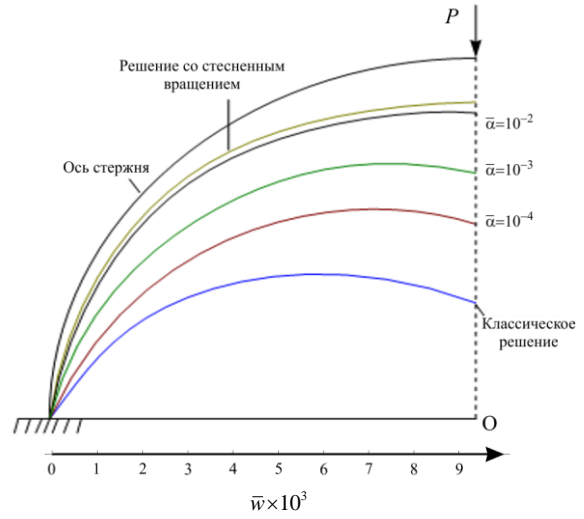


Рис. 5. Графики безразмерного прогиба при различных значениях $\bar{\alpha} = \alpha/\mu$

Таблица 1. Значения максимального безразмерного прогиба в зависимости от $\bar{\alpha} = \alpha/\mu$

$\bar{\alpha} = \alpha/\mu$	Микрополярная модель ($\bar{w}_{max} \times 10^3$)			Классическая модель ($\bar{w}_{max} \times 10^3$)			Модель со стесненным вращением [6] ($\bar{w}_{max} \times 10^3$)
	Количество конечных элементов n		Точное решение	Количество конечных элементов n		Точное решение	
	2	4		2	4		
10^{-6}	7,05	7,23	7,23	7,07	7,25	7,25	–
10^{-4}	5,56	5,67	5,67	–	–	–	–
10^{-3}	2,73	2,75	2,75	–	–	–	–
$0,5 \times 10^{-2}$	1,86	1,87	1,87	–	–	–	–
10^{-2}	1,72	1,73	1,73	–	–	–	–
10^{-1}	1,60	1,61	1,61	–	–	–	–
10	1,58	1,59	1,59	–	–	–	–
$\bar{\alpha} \rightarrow \infty$	1,59	1,59	1,59	–	–	–	1,59

4.2. Деформация стержня с шарнирным закреплением, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой

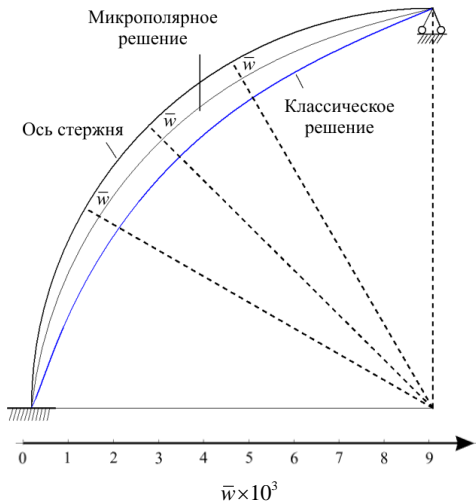


Рис. 6. График безразмерного прогиба

Исследуем деформацию стержня, показанного на рисунке 3 ($\varphi_0 = \pi/2$). Граничные условия в этой задаче имеют вид:

– при $s = 0$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0;$$

– при $s = a = \pi r_0/2$

$$w = 0, \quad N = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0.$$

Вектор узловых нагрузок выражается так:

$$\mathbf{F}_e = \left\{ aq, \frac{a^2 q}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, aq, -\frac{a^2 q}{6}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}.$$

После построения для отдельного элемента матрицы жесткости \mathbf{K}_e , а также вектора эквивалентных узловых

сил и моментов \mathbf{F}_e с учетом граничных условий составим систему линейных алгебраических уравнений, соответствующую рассматриваемой задаче, при разных числах разбиения стержня на конечные элементы.

Как и в предыдущей задаче, введем безразмерные величины. Для безразмерного усилия примем обозначение: $\bar{q} = q/\mu$. В численных расчетах возьмем следующие значения безразмерных величин: $\delta = 1/40$, $\nu = 0,28$, $B^* = 1,9 \times 10^{-3}$, $\bar{\alpha} = 10^{-2}$, $\bar{r}_0 = 0,64$, $\bar{q} = 1,42 \times 10^{-5}$.

Результаты, приведенные на рисунке 6 и в таблице 2, показывают, что учет микрополярных свойств материала повышает, по сравнению с классическим случаем, жесткость стержня.

Таблица 2. Максимальные прогибы микрополярного и классического упругого тонкого стержней

Микрополярная модель ($\bar{w}_{\max} \times 10^3$)			Классическая модель ($\bar{w}_{\max} \times 10^3$)		
Количество конечных элементов n		Точное решение	Количество конечных элементов n		Точное решение
2	4		2	4	
5,23	5,52	5,53	6,62	7,13	7,14

Если обратиться к аналогичным данным, полученным при изучении объектов в рамках микрополярной теории упругости: прямолинейных стержней [12], пластин [13], оболочек [14], то можно утверждать, что повышение (по сравнению с классической теорией упругости) жесткости элементов при учете микрополярных свойств материала является общим эффектом применения этой теории.

4.3. Свободные колебания стержня с круговой осью при защемлении одного из концов

Рассмотрим свободные колебания стержня с круговой осью, когда один из его концов жестко защемлен, а другой свободен. Граничные условия имеют следующий вид:

– при $s = 0$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0;$$

– при $s = a = \pi r_0/2$

$$Q_1 = 0, \quad N = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0.$$

Потребуем, чтобы определитель матрицы $(\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e)$ был равен нулю. Тогда для определения собственных частот колебаний стержня ω получим алгебраическое уравнение определенной степени. Результат вычислений приведем для случая, когда введенные безразмерные величины имеют следующие значения: $\delta = 1/40$, $\nu = 0,28$, $E^* = E/\mu = 2(1+\nu) = 2,56$, $B^* = 1,9 \times 10^{-3}$, $\bar{\alpha} = 10^{-1}$, $\bar{r}_0 = 0,64$, $\bar{J} = 5,29 \times 10^{-6}$, где \bar{J} вычислено по формуле: $\bar{J} = J/(\rho a^2)$. Для безразмерной частоты собственных колебаний принято обозначение: $\bar{\omega} = \omega \cdot \sqrt{\rho/\mu}$. При этом для минимального значения частоты собственных колебаний имеем: $\bar{\omega} = 0,128$ по микрополярной теории упругости и $\bar{\omega} = 0,064$ по классической.

Из приведенных численных результатов можем сделать вывод о том, что учет микрополярных свойств материала повышает, по сравнению с классическим случаем, частоты собственных колебаний.

4.4. Свободные колебания стержня с круговой осью при защемлении и шарнирном опирании

Рассмотрим свободные колебания стержня с круговой осью, когда один конец жестко защемлен, а другой шарнирно оперт, при тех же значениях безразмерных величин, что и в предыдущем случае; граничные условия имеют вид:

– при $s = 0$

$$w = 0, \quad u = 0, \quad \psi = 0, \quad \Omega_3 = 0;$$

– при $s = a$

$$w = 0, \quad N = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0.$$

Здесь получаем $\bar{\omega} = 0,291$ по микрополярной и $\bar{\omega} = 0,158$ по классической теориям упругости. Следует отметить, что при расчете по микрополярной теории упругости, в отличие от классического решения, обнаруживаются добавочные частоты собственных колебаний стержня.

Изучена также связь упругой постоянной $\bar{\alpha}$ со значениями частот собственных колебаний стержня. Численные результаты показывают, что при постоянстве остальных безразмерных параметров увеличение $\bar{\alpha}$ приводит к возрастанию собственных колебаний стержня.

5. Заключение

В работе системный подход (единый метод гипотез) построения прикладных моделей микрополярных упругих прямолинейных стержней, пластин и оболочек [12–14] распространяется на микрополярные упругие тонкие стержни с круговой осью; построена соответствующая прикладная модель. Разработан и применен вариант МКЭ для решения граничных задач статики и динамики объектов с микрополярными свойствами.

На основе численного анализа решений ряда прикладных задач установлены эффекты, которыми обладает механическая система вследствие микрополярности материала, не выявляемые в классическом случае, в частности, повышение жесткости, увеличение частоты собственных колебаний.

Литература

1. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К., Макушин В.М., Малинин Н.Н., Феодосьев В.И. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчеты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке. М.: Машгиз, 1956. 884 с.
2. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник / Под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 832 с.
3. Кузьмин М.А., Лебедев Д.Л., Попов Б.Г. Расчеты на прочность элементов многослойных композитных конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. 341 с.
4. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель плоского кривого (кругового) упругого стержня по классической теории упругости с учетом поперечных сдвиговых деформаций // Доклады НАН Армении. 2016. Т. 116. № 1. С. 34-42.
5. Lakes R.S., Drugan W.J. Bending of a Cosserat elastic bar of square cross section: Theory and experiment // J. Appl. Mech. 2015. Vol. 82. 091002. <https://doi.org/10.1115/1.4030626>
6. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью по теории со стесненным вращением и метод конечных элементов // Изв. НАН РА. Механика. 2019. Т. 72, № 3. С. 39-55
7. Nakamura S., Benedict R.L., Lakes R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity // Int. J. Eng. Sci. 1984. Vol. 22. P. 319-330. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(84\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0020-7225(84)90013-2)
8. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Численное исследование двумерных задач несимметричной теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 63-70. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654408020064>)
9. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Аналитические и численные решения в рамках континуума Коссера как основа для постановки экспериментов по обнаружению моментных эффектов в материалах // Вычисл. мех. сплош. сред. 2009. Т. 2, № 4. С. 76-91. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.4.33>
10. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. Finite element method for solving boundary value problems of bending of micropolar elastic thin bars // Proc. of the XLII Summer school-conference "Advanced Problems in Mechanics". APM-2014, St.-Petersburg, Russia, June 30-July 5, 2014. P. 427-434.
11. Жамакочян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 3. С. 375-383. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.31>
12. Sargsyan S.H. Effective manifestations of characteristics of strength and rigidity of micropolar elastic thin bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol. 2. № 1. P. 100-110. <https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=19348959-201201-201205080001-201205080001-100-110>
13. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 2. С. 148-156. (English version <https://doi.org/10.1134/S0021894412020162>)
14. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физ. мезомех. 2011. Т. 14, № 1. С. 55-66. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959912010079>)
15. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Pergamon Press, 1986. 383 p.

References

1. Ponomarev S.D., Biderman V.L., Likharev K.K., Makushin V.M., Malinin N.N., Feodos'yev V.I. *Raschety na prochnost' v mashinostroyenii. T.1. Teoreticheskiye osnovy i eksperimental'nyye metody. Raschety sterzhnevyykh elementov konstruktсий pri staticheskoy nagruzke* [Strength calculations in mechanical engineering. Vol. 1. Theoretical foundations and experimental methods. Calculations of bar structural members under static load]. Moscow, Mashgiz, 1956. 884 p.
2. Birger I.A., Panovko Ya.G. (ed.) *Prochnost'. Ustoychivost'. Kolebaniya. Spravochnik* [Strength. Stability. Fluctuations. Handbook]. Vol. 1. Moscow, Mashgiz, 1968. 832 p.
3. Kuz'min M.A., Lebedev D.L., Popov B.G. *Raschety na prochnost' elementov mnogosloynnykh kompozitnykh konstruktсий* [Strength calculations for elements of multilayer composite structures]. Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2012. 341 p.

4. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. *Matematicheskaya model' ploskogo krivogo (krugovogo) uprugogo sterzhnya po klassicheskoy teorii uprugosti s uchedom poperechnykh sdvigovykh deformatsiy* [Mathematical model of elastic plane curve beam (circular) with consideration of shear deformations on the basis of the classical theory of elasticity]. *Doklady NAN Armenii – Reports of NAS of RA*, 2016, vol. 116, no. 1, pp. 34-42.
5. Lakes R.S., Drugan W.J. Bending of a Cosserat elastic bar of square cross section: Theory and experiment. *J. Appl. Mech.*, 2015, vol. 82, 091002. <https://doi.org/10.1115/1.4030626>
6. Sargsyan S.H., Khachatryan M.V. *Matematicheskaya model' staticheskoy deformatsii mikropolyarnogo uprugogo sterzhnya s krugovoy os'yu po teorii so stesennym vrashcheniyem i metod konechnykh elementov* [Mathematical model of static deformation of micropolar elastic beam with a circular axis on the theory with constrained rotation and the finite element method]. *Izv. NAN RA. Mekhanika – Proceedings of NAS of Armenia. Mechanics*, 2019, vol. 72, no. 3, pp. 39-55.
7. Nakamura S., Benedict R.L., Lakes R.S. Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, 1984, vol. 22, pp. 319-330. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(84\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0020-7225(84)90013-2)
8. Korepanov V.V., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Numerical study of two-dimensional problems of nonsymmetric elasticity. *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, pp. 218-224. <https://doi.org/10.3103/S0025654408020064>
9. Korepanov V.V., Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Analytical and numerical solutions in the context of Cosserat continuum as the basis for experiments on detection of couple-stress effects in materials. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2009, vol. 2, no. 4, pp. 76-91. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2009.2.4.33>
10. Sargsyan S.H., Zhamakochyan K.A. *Proc. of the XLII Summer school-conference "Advanced Problems in Mechanics". APM-2014, St.-Petersburg, Russia, June 30-July 5, 2014. P. 427-434.*
11. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Finite element method for calculation of bending of micropolar elastic thin plates. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 375-383. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.3.31>
12. Sargsyan S.H. Effective manifestations of characteristics of strength and rigidity of micropolar elastic thin bars. *Journal of Materials Science and Engineering*, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 100-110. <https://www.airitilibrary.com/Publication/alDetailedMesh?DocID=19348959-201201-201205080001-201205080001-100-110>
13. Sarkisyan S.H. Mathematical model of micropolar elastic thin plates and their strength and stiffness characteristics. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2012, vol. 53, pp. 275-282. <https://doi.org/10.1134/S0021894412020162>
14. Sargsyan S.H. General theory of micropolar elastic thin shells. *Phys. Mesomech.*, 2012, vol. 15, pp. 69-79. <https://doi.org/10.1134/S1029959912010079>
15. Nowacki W. *Theory of asymmetric elasticity*. Pergamon Press, 1986. 383 p.

Поступила в редакцию 15.06.2020; после доработки 13.07.2020; принята к опубликованию 15.07.2020

Сведения об авторах

Саркисян Самвел Оганесович, член-корр. НАН Армении, дфмн, проф., Ширакский государственный университет имени М. Налбандяна (ШГУ), Республика Армения, 3126, г. Гюмри, ул. Паруйра Севака, д. 4; e-mail: s_sargsyan@yahoo.com
Хачатрян Мелине Вардановна, асп., ШГУ; e-mail: khachatryanmeline@mail.ru