

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.2.17](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.2.17)

УДК 539.3

ДВУХУРОВНЕВАЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ: ПРИЛОЖЕНИЕ К АНАЛИЗУ ВЛИЯНИЯ АНИЗОТРОПИИ УПРУГИХ СВОЙСТВ КРИСТАЛЛИТОВ НА ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ

А.С. Соколов, П.В. Трусов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Для исследования процессов неупругого деформирования поликристаллических материалов в последние 15–20 лет все более широкое применение находят многоуровневые (чаще всего двухуровневые) модели, основанные на физических теориях упруговязкопластичности (упругопластичности). При этом на мезоуровне при описании пластических деформаций анизотропия кристаллитов учитывается, в то время как упругие свойства зачастую принимаются изотропными. Целью предлагаемой работы является оценка отличий в характеристиках напряженно-деформированного состояния (особенно в остаточных мезонапряжениях), обусловленных учетом анизотропии упругих свойств (в сравнении с данными для материала с изотропными упругими свойствами, полученными с помощью различных процедур осреднения – по Фойгту, Рейссу, Хиллу), определенных для изотермического деформирования поликристаллов с отличающимися типами симметрии составляющих представительный макрообъем кристаллитов. Приведены результаты анализа напряженно-деформированного состояния поликристаллических образцов с ГЦК, ОЦК и ГПУ решетками при простом сдвиге (до накопленной деформации 50%). Для расчетов использована статистическая двухуровневая конститутивная модель, построенная в рамках геометрически нелинейной физической теории упруговязкопластичности. В указанной и подобных ей конститутивных моделях одним из основных соотношений является упругий закон, записанный в скоростной релаксационной форме в терминах мер скоростей напряжений и деформаций, не зависящих от выбора системы отсчета (или от наложенного жесткого движения). Показано, что на напряженно-деформированном состоянии представительного макрообъема учет анизотропии проявляется только на начальном этапе деформирования; в дальнейшем при деформациях, превышающих 1–1,5%, ее вклад становится малозаметным. В то же время результаты расчета остаточных мезонапряжений (напряжений после разгрузки представительного макрообъема), оказывающих значительное влияние на прочностные характеристики материалов, с учетом анизотропии кристаллитов становятся существенно отличающимися от установленных при использовании гипотезы изотропии.

Ключевые слова: двухуровневая упруговязкопластическая модель, влияние упругой анизотропии, эквивалентный изотропный материал, осреднение по Фойгту, Рейссу, Хиллу, остаточные мезонапряжения

TWO-LEVEL ELASTIC-VISCOPLASTIC MODEL: APPLICATION TO THE ANALYSIS OF THE CRYSTAL ANISOTROPY INFLUENCE

A.S. Sokolov and P.V. Trusov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

Multilevel crystal plasticity models have been widely used to study the processes of inelastic deformation of polycrystalline materials over the last 15–20 years. Anisotropy of plastic strains in crystallites is usually taken into account at the mesoscale, while their elastic properties are often assumed to be isotropic. The objective of this work is to assess the differences in the stress-strain characteristics (especially, residual mesoscopic stresses) by taking into account the anisotropy of elastic properties of materials calculated for the isothermal deformation of polycrystals with various types of crystallitelattice symmetry within a representative macrovolume. For this purpose, the results obtained by the authors were compared with the data received for the material with isotropic elastic properties and obtained using the Voigt–Reuss–Hill averaging procedures. The results of the analysis for the stress-strain state of polycrystalline samples with FCC, BCC, and HCP lattices obtained in a simple sheartest (up to the accumulated strain of 50%) are presented. The statistical two-level model developed on the basis of the geometrically nonlinear elasto-viscoplasticity theory is used to perform calculations. In such constitutive models, the main fundamental relation is the elastic law written in the rate relaxation form in terms of the measures of the stress rates and strain rates, being independent of the choice of a reference frame (or superimposed rigid motion). It is shown that the analysis of the anisotropy effect has a noticeable impact on the characteristic macrovolume stress-strain state only at the initial stage of deformation. Subsequently, for deformations exceeding 1–1.5%, the difference becomes insignificant. At the same time, the results of calculations of the residual mesoscopic stresses (i.e., the stresses after unloading a representative macrovolume), which have a significant effect on the strength characteristics of materials, taking into account the crystallite anisotropy, turned out to be significantly different from those obtained under the isotropy hypothesis.

Key words: two-level elastoviscoplastic model, elastic anisotropy effect, equivalent isotropic material, Voigt–Reuss–Hill averaging procedures, residual mesostresses

1. Введение

Для совершенствования существующих и разработки новых технологических процессов интенсивной пластической деформации широко используются математические модели разной степени сложности и глубины. Одним из наиболее значимых элементов последних являются применяемые в них конститутивные модели (определяющие соотношения) материалов, «качество» которых главным образом обуславливает адекватность математической модели в целом. Следует отметить, что физико-механические свойства различных материалов практически полностью определяются их мезо- и микроструктурой [1, 2].

В связи с вышесказанным современные модели, ориентированные на описание и совершенствование режимов обработки металлов и сплавов, должны позволять отслеживать происходящие при этом изменения внутренней структуры. Наиболее перспективными для этих целей представляются получившие в последние десятилетия широкое распространение многоуровневые (преимущественно двухуровневые) модели, основанные на введении внутренних переменных и на физических теориях упруговязкопластичности [3–9]. В таких моделях элементом мезоуровня является кристаллит (зерно, субзерно), а элементом макроуровня — представительный макрообъем [3, 7, 8]. Следует отметить, что подавляющее большинство задач, возникающих при рассмотрении технологических процессов обработки металлов и сплавов, относятся к геометрически нелинейным; при построении конститутивных моделей для описания поведения кристаллитов широко используют аддитивное разложение скорости деформации на упругую и неупругую составляющие, полученное на основе мультипликативного разложения градиента места [10–12]. Для нахождения неупругой составляющей скорости деформации в дальнейшем применяются уравнения той или иной физической теории упругопластичности (упруговязкопластичности) [3, 7].

Важную роль при построении конститутивной модели кристаллита играет выбор упругого закона. В качестве такового могут выступать уравнения в «конечной» форме, то есть в терминах мер напряжений и деформаций, определенных в базисах отсчетной или разгруженной конфигураций [13, 14]. При рассмотрении геометрически нелинейных проблем наибольшее распространение получили упругие соотношения в скоростной релаксационной форме, сформулированные в терминах актуальной конфигурации. При этом часто (особенно на ранней стадии развития многоуровневых моделей) упругими деформациями на мезоуровне или пренебрегали [15], или упругий отклик принимался изотропным [16], что упрощает решение задачи, но не имеет физического обоснования при анализе поведения кристаллитов. Отчасти данное предположение обусловлено тем, что в научной и справочной литературе упругие характеристики анизотропных материалов практически отсутствуют, поскольку стандартные испытания конструкционных материалов (растяжение–сжатие, кручение) не позволяют найти все компоненты тензора их упругих свойств.

Скоростная форма упругих определяющих соотношений записывается обычно в виде линейной или квазилинейной связи, не зависящей от выбора системы отчета меры скорости изменения напряженного состояния (как правило, коротационной производной тензора напряжений) и упругой составляющей тензора деформации скорости (симметричной части градиента скорости перемещений). Вероятно, впервые определяющие соотношения такого типа введены К. Труделлом [17–19] и были названы им гипоупругими. Однако для гипоупругих соотношений в исходном варианте не удалось показать их соответствие гиперупругим физическим уравнениям, в силу чего они не удовлетворяют дополнительным требованиям к упругим соотношениям, сформулированным в работах Н. Хяо с соавторами [20–23]. Согласно последним: 1) для любого замкнутого по деформациям цикла упругой деформации замкнутой должна быть и траектория напряжений; 2) работа на любом таком цикле должна быть нулевой. В дальнейшем, для краткости, эти два требования будем называть условием консервативности упругих определяющих соотношений. В цитированных выше работах показано также, что единственной энергетически сопряженной (взвешенному тензору напряжений Кирхгофа) мерой деформации из класса деформаций Сетха–Хилла [24–26] является логарифмическая мера Генки, отвечающая актуальной конфигурации; при этом тензор деформации скорости равен так называемой логарифмической коротационной производной тензора Генки [20]. Заметим также, что при использовании определяющего гипоупругого соотношения с логарифмической коротационной производной не наблюдается другой известный нефизичный эффект — осцилляции напряжений при монотонной деформации простого сдвига [27, 28]. Следует отметить, что приведенное в [20] доказательство корректности гипоупругого соотношения справедливо только для изотропного материала. Данные преимущества изотропных упругих соотношений, вероятно, и обуславливают их широкие приложения, в том числе к кристаллитам, что представляется не согласующимся с наличием анизотропии упругих свойств реальных кристаллических тел (особенно у кристаллов среднего и низшего классов симметрии).

В связи с вышесказанным возникает вопрос: какую погрешность в отклик материала вносит замена в конститутивной двухуровневой модели на мезоуровне упруго-анизотропного закона соответствующим упругоизотропным? Целью работы является исследование влияния анизотропии упругих свойств на поведение поликристаллических материалов.

2. Краткое описание двухуровневой упруговязкопластической модели

Для решения поставленной задачи используется конститутивная двухуровневая статистическая упруговязкопластическая модель [3]. Элементом макроуровня служит представительный макрообъем поликристалла; в качестве элемента мезоуровня рассматривается кристаллит с изотропными или анизотропными упругими свойствами; следует отметить, что вязкопластические соотношения сформулированы в терминах скоростей сдвигов по кристаллографическим системам скольжения, в силу чего являются анизотропными. В качестве базового определяющего соотношения для упругой деформации

мезоуровня выбран гипотеза закона. Для распределения ориентаций кристаллических решеток элементов мезоуровня, входящих в представительный макрообъем, в отсчетной конфигурации принят равномерный закон.

Один из важнейших вопросов при построении конститутивных моделей, пригодных для описания процессов деформирования с большими градиентами перемещений (геометрической нелинейностью), заключается в том, как разложить движение на квазитвердое и деформационное [29], при этом предполагаемое разложение должно позволять учитывать симметричные свойства кристаллитов. С этой целью для каждого элемента мезоуровня (кристаллита) вводится собственная подвижная недеформируемая ортогональная декартова система координат (ПСК) $Ox^1x^2x^3$ с базисом \mathbf{k}^i , жестко привязанная к одному кристаллографическому направлению и кристаллографической плоскости, содержащей это направление [30]. Для системы координат, жестко связанной с решеткой кристаллита, компоненты тензора упругих характеристик \mathbf{n} можно считать неизменными. Однородное (аффинное) изменение конфигурации каждого кристаллита описывается градиентом деформации (транспонированным градиентом места) мезоуровня \mathbf{f} [26, 29]. Для рассмотрения как упругих, так и неупругих деформаций вводится дополнительная разгруженная конфигурация, получаемая из отсчетной конфигурации преобразованием, определяемым пластической составляющей \mathbf{f}^p градиента деформации (или из актуальной конфигурации с помощью преобразования \mathbf{f}^{e-1}). Используется мультипликативное разложение градиента деформации $\mathbf{f} = \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^p = \bar{\mathbf{f}}^e \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}^p$, предложенное в статье [30], где \mathbf{f}^e — упругая составляющая градиента деформации, $\mathbf{r} = \mathbf{k}_i \mathbf{k}_0^i$ — собственно ортогональный тензор, преобразующий отсчетный базис \mathbf{k}_0^i подвижной системы координат в текущий \mathbf{k}_i , $\bar{\mathbf{f}}^e$ — составляющая градиента деформации, преобразующая пластически деформированную конфигурацию, испытавшую поворот, в актуальную конфигурацию на мезоуровне, то есть $\bar{\mathbf{f}}^e$ отражает искажение кристаллической решетки. При таком разложении квазитвердое движение кристаллита описывается тензором ротации \mathbf{r} , одновременно определяющим ротацию жесткой подвижной системы координат.

Ниже приведены системы уравнений, входящие в математическую формулировку двухуровневой (для макро- и мезоуровней) конститутивной модели деформирования поликристаллических материалов (здесь и далее параметры макроуровня обозначаются заглавными буквами, соответствующие параметры мезоуровня — аналогичными строчными). Использована статистическая модель, базирующаяся на гипотезе Фойгта [3–6]. Полная система уравнений модели мезоуровня выглядит следующим образом (номера элементов мезоуровня для краткости опущены):

$$\begin{cases} \mathbf{k}^{cor} \equiv \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} : (\mathbf{I} - \mathbf{z}^{in} - \boldsymbol{\omega}), \\ \dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left(\tau^{(k)} / \tau_c^{(k)} \right)^m \mathbf{H} \left(\tau^{(k)} - \tau_c^{(k)} \right), \\ \tau^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} : \mathbf{k}, \\ \dot{\tau}_c^{(k)} = \sum_{l=1}^K h^{(kl)} \dot{\gamma}^{(l)}, \\ \mathbf{z}^{in} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}, \\ \mathbf{I}^e = \mathbf{I} - \mathbf{z}^{in}, \\ \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}^T = \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: \mathbf{k} — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа, $\mathbf{k} = (\det \mathbf{f}) \boldsymbol{\sigma}$, где $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши; $\mathbf{k}^{cor} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения тензора напряжений Кирхгоффа; $\boldsymbol{\omega}$ — тензор спина ПСК кристаллита, задающий скорость её поворота [30, 31]; \mathbf{n} — тензор четвертого ранга упругих свойств, определенный неизменными компонентами в базисе жесткой подвижной системы координат (ПСК); \mathbf{z}^{in} — неупругая составляющая тензора скорости деформации мезоуровня; $\mathbf{I} = \hat{\nabla} \mathbf{v}^T$ — транспонированный градиент скорости перемещений (в силу использования гипотезы Фойгта $\mathbf{I} = \hat{\nabla} \mathbf{V}^T = \mathbf{L}$, где \mathbf{L} — транспонированный градиент скорости перемещений макроуровня); $\dot{\gamma}^{(k)}$ — скорость сдвига на k -й системе скольжения; $\dot{\gamma}_0$ — скорость сдвига по системе скольжения при достижении касательным напряжением критического напряжения сдвига; $\tau^{(k)}$ — действующее напряжение на k -й системе скольжения; $\tau_c^{(k)}$ — критическое напряжение на k -й системе скольжения; m — показатель скоростной чувствительности материала; $\mathbf{H}(\cdot)$ — функция Хэвисайда;

$\mathbf{b}^{(k)}$, $\mathbf{n}^{(k)}$ — единичные векторы направления скольжения и нормали плоскости скольжения k -й системы скольжения (в актуальной конфигурации); \mathbf{r} — тензор ориентации подвижной системы координат. Заметим, что тензор упругих характеристик для кристаллитов в общем случае является анизотропным, тип симметрии определяется решеткой; компоненты этих тензоров в кристаллографическом базисе решетки для различных материалов являются известными справочными данными.

Система уравнений макроуровня включает следующие соотношения:

$$\begin{cases} \mathbf{K}^{\text{cor}} \equiv \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Pi} : (\mathbf{L} - \mathbf{\Omega} - \mathbf{Z}^{\text{in}}), \\ \mathbf{\Pi} = \langle \mathbf{n} \rangle, \\ \mathbf{\Omega} = \langle \mathbf{\omega} \rangle, \\ \mathbf{Z}^{\text{in}} = \langle \mathbf{z}^{\text{in}} \rangle + \mathbf{\Pi}^{-1} : \langle \mathbf{n}' : \mathbf{z}^{\text{in}'} \rangle + \mathbf{\Pi}^{-1} : (\langle \mathbf{\kappa}' \cdot \mathbf{\omega}' \rangle - \langle \mathbf{\omega}' \cdot \mathbf{\kappa}' \rangle). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь: \mathbf{K} — взвешенный тензор напряжений Кирхгоффа (макроуровня); $\mathbf{K}^{\text{cor}} = \dot{\mathbf{K}} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{\Omega}$ — не зависящая от выбора системы отсчета скорость изменения (коротационная производная со спином $\mathbf{\Omega}$) тензора напряжений Кирхгоффа; $\mathbf{\Omega}$ — тензор спина ПСК макроуровня; $\mathbf{\Pi}$ — тензор эффективных упругих свойств; \mathbf{Z}^{in} — неупругая составляющая индифферентной меры скорости деформации $\mathbf{Z} = \hat{\nabla} \mathbf{V}^T - \mathbf{\Omega}$; $\mathbf{L} = \hat{\nabla} \mathbf{V}^T$ — градиент скорости перемещений, определенный в актуальной конфигурации; $\langle \cdot \rangle$ — оператор осреднения по представительному макрообъему, \mathbf{a}' — обозначение отклонения тензорной характеристики \mathbf{a} в рассматриваемом кристаллите от среднего по представительному макрообъему значения [3, 30, 31]. Последнее соотношение в (2) получено из условий согласования определяющих соотношений на мезо- и макроуровнях, то есть установления определяющего соотношения макроуровня осреднением соответствующего соотношения мезоуровня [3].

Представленная системами уравнений (1), (2) двухуровневая математическая модель, как нетрудно видеть, является существенно нелинейной, в связи с чем для ее реализации требуется соответствующая процедура. Остановимся на кратком описании алгоритма реализации модели.

Для решения задачи исследования напряженно-деформированного состояния представительного макрообъема используется пошаговая процедура; входными параметрами служат заданные компоненты (в базисе лабораторной системы координат) тензора градиента скорости перемещений на момент времени начала шага. Реализация алгоритма на каждом шаге проходит в три этапа (вначале — в цикле по элементам мезоуровня): получение решения в скоростях, интегрирование системы уравнений модели с позиции наблюдателя, связанного с ПСК, и переопределение всех параметров модели вследствие того, что ориентация кристаллитов на конец шага по времени изменяется (все материальные параметры считаются при этом «вмороженными» в ПСК). После этого найденные характеристики осредняются и отыскиваются родственные параметры на макроуровне, затем осуществляется переход к следующему временному шагу. С подробным изложением алгоритма реализации двухуровневой упруговязкопластической модели интересующийся читатель может ознакомиться в монографии [3].

Как отмечено выше, во многих работах по двухуровневым моделям используется предположение о том, что материал является упруго изотропным и обладает некоторыми усредненными свойствами. В предлагаемой работе рассматриваются поликристаллические материалы, состоящие из однородных кристаллитов с одинаковыми упругими свойствами. Под соответствующей изотропной средой будет пониматься среда с упругими свойствами, «размазанными» по представительному макрообъему в предположении равномерного распределения ориентаций кристаллитов, входящих в представительный объем. Компоненты тензора упругих характеристик изотропного материала, выраженные через упругие модули ($\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — коэффициенты Ламе, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона), с использованием нотации Фойгта можно представить следующей матрицей:

$$[\mathbf{\Pi}^{\text{изотр}}] = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

При принятии гипотезы об изотропии поликристаллического материала необходимо знать наилучшее приближение изотропных констант как функций от анизотропных характеристик и условия применимости найденных значений. В работах [32–34] приведено подробное описание подходов к осреднению

(по Фойгту, Рейссу, Хиллу) для определения упругих модулей соответствующих изотропных упругих материалов через компоненты тензора упругих свойств анизотропного тела.

3. Остаточные мезонапряжения

Остаточные напряжения (ОН) возникают практически при всех технологических процессах обработки металлов [35–37], при этом обычно рассматриваются ОН первого рода — уравновешенные в пределах всего изделия [37, 38]. В то же время рабочие (в особенности прочностные) характеристики различных конструкций в значительной степени зависят от ОН более низких масштабов, в частности, от остаточных мезонапряжений, остаточных напряжений 2-го рода — самоуравновешенных ОН на масштабах зерен поликристаллов, и 3-го рода — самоуравновешенных ОН на масштабах десятков параметров решетки [36, 37]. Под остаточными мезонапряжениями (ОМН), которые и являются предметом исследования в настоящей работе, понимаются напряжения, обусловленные несовместностью упругих деформаций мезоуровня, уравновешенные на масштабе представительного макрообъема материала (остающиеся в кристаллитах после полной разгрузки представительного макрообъема). По ОМН оценивается уровень запасенной на масштабе представительного макрообъема упругой энергии, которая может влиять на возникновение и распространение микро- и мезотрещин. В предлагаемой работе с использованием двухуровневой упруговязкопластической модели рассмотрено влияние анизотропии упругих свойств элементов мезоуровня (кристаллитов) на ОМН.

Для определения ОМН в численных экспериментах необходимо после стадии активного упруговязкопластического нагружения произвести разгрузку представительного макрообъема. При этом следует иметь в виду, что описанная выше двухуровневая модель, основанная на гипотезе Фойгта, ориентирована на кинематическое задание нагружения. В связи с этим требуется применение итерационной процедуры, которая при кинематическом нагружении (реализуемом в приращениях) обеспечила бы выполнение с заданной точностью условия: $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ (равенства осредненного по представительному макрообъему взвешенного тензора напряжений Кирхгоффа нулевому тензору).

Опишем процедуру разгрузки представительного макрообъема. Допустим, что при произвольном предшествующем этапе нагружения достигнуты макронапряжения \mathbf{K} в представительном макрообъеме, тогда для реализации пошаговой процедуры разгрузки на каждом шаге нужно знать (транспонированный) градиент скорости перемещений. Находим его из следующего условия:

$$\hat{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T = -\chi \frac{\mathbf{K}}{\|\mathbf{K}\|}, \quad \|\mathbf{K}\| = (\mathbf{K} : \mathbf{K})^{1/2}, \quad (3)$$

где χ — параметр, [с⁻¹], связанный с величиной временного шага и получаемый из численных экспериментов. При этом в силу известной проблемы неоднозначного определения разгруженной конфигурации, которая может быть установлена только с точностью до поворота исследуемого объема как жесткого целого, принимается, что главные оси тензора \mathbf{K} (или тензора упругих деформаций) при разгрузке остаются неизменными. Следует отметить, что, несмотря на принятое предположение об упругости процесса разгрузки для представительного макрообъема в целом, отдельные кристаллиты, входящие в него, могут испытывать необратимые деформации, в связи с чем и возникает необходимость использования пошаговой процедуры. Процесс разгрузки считается завершенным при выполнении условия $\|\mathbf{K}\| < \varepsilon$, где ε — малое положительное число.

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотренная в разделе 2 математическая модель была применена для исследования нагружения представительных макрообъемов (образцов) поликристаллов с объемно-центрированной кубической (ОЦК), грани-центрированной кубической (ОГЦК), гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решетками. Для каждого из рассматриваемых опытов представительные объемы макроуровня включали выборки из 1000 кристаллитов, начальные ориентации которых имели равномерный закон распределения. В численных экспериментах для каждого типа решеток рассмотрены упругие соотношения с анизотропными и соответствующими изотропными свойствами; напомним, что вязкопластические свойства во всех вариантах полагаются анизотропными, связанными с решеткой. Все остальные соотношения и параметры материалов приняты идентичными для каждого из рассматриваемых типов поликристаллов (включая законы распределения ориентаций кристаллических решеток в отсчетной конфигурации).

Известно [32], что независимые компоненты тензора упругих свойств (в нотации Фойгта) в базисе ПСК (в отсчетной конфигурации, совпадающей с кристаллографической системой координат)

для монокристаллов (элементов мезоуровня) вольфрама (ОЦК решетка), меди (ГЦК решетка), титана (ГПУ решетка) равны:

$$\begin{aligned} \text{ОЦК} \quad & \pi_{11} = 512,6 \text{ ГПа}, \quad \pi_{12} = 205,8 \text{ ГПа}, \quad \pi_{66} = 29 \text{ ГПа}, \\ \text{ГЦК} \quad & \pi_{11} = 168,4 \text{ ГПа}, \quad \pi_{12} = 121,4 \text{ ГПа}, \quad \pi_{44} = 75,4 \text{ ГПа}, \\ \text{ГПУ} \quad & \pi_{11} = 162,4 \text{ ГПа}, \quad \pi_{33} = 180,7 \text{ ГПа}, \quad \pi_{12} = 92 \text{ ГПа}, \quad \pi_{13} = 69 \text{ ГПа}, \quad \pi_{55} = 46,7 \text{ ГПа}. \end{aligned}$$

Оси ортонормированной декартовой системы координат, определенные в терминах индексов Миллера (для ГЦК и ОЦК) и Браве (для ГПУ), ориентированы по отношению к кристаллографическим осям следующим образом:

– для кубической решетки: Ox_1 — [100], Ox_2 — [010], — [001];

– для гексагонально плотноупакованной решетки: Ox_1 — $[2\bar{1}\bar{1}0]$, Ox_2 — $[01\bar{1}0]$, Ox_3 — [0001].

С использованием известных подходов [32] по приведенным выше компонентам тензоров упругих свойств монокристаллов вычислены упругие модули соответствующих изотропных материалов

(см. Табл 1), где $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ — модуль всестороннего сжатия.

Таблица 1. Модули упругости соответствующих изотропных материалов

Метод осреднения	Материал, решетка	K , ГПа	μ , ГПа	λ , ГПа
Фойгта	Вольфрам, ОЦК	308,07	78,76	255,56
Рейсса		308,07	41,88	280,15
Хилла		308,07	60,32	267,85
Фойгта	Медь, ГЦК	137,07	54,64	100,64
Рейсса		137,07	33,33	114,85
Хилла		137,07	43,98	107,74
Фойгта	Титан, ГПУ	107,06	44,00	78,02
Рейсса		123,54	38,23	98,31
Хилла		115,30	41,11	88,16

Целью настоящей работы, как отмечено ранее, являлось:

– исследование поведения материала при использовании в качестве определяющих соотношений упругого закона анизотропного и соответствующего изотропного тела;

– анализ кривых зависимости интенсивности напряжений от интенсивности накопленных деформаций, коэффициента трехосности и характеристик остаточных мезонапряжений.

Для этого проведена серия численных экспериментов для случая простого сдвига до интенсивности накопленных деформаций 50% в плоскости Ox_1x_2 поликристаллического образца прямоугольного поперечного сечения (в плоскости $x_3 = 0$) в отсчетной конфигурации. Для указания характерных осей нагружения вводилась неподвижная лабораторная система координат с базисными векторами \mathbf{l}_i , $i \in \overline{1,3}$. При моделировании простого сдвига транспонированный градиент места задавался в виде $\mathbf{F} = \mathbf{l}_1\mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2\mathbf{l}_2 + \mathbf{l}_3\mathbf{l}_3 + \lambda t \mathbf{l}_1\mathbf{l}_2$, где λ — параметр, определяющий скорость деформирования, $[c^{-1}]$, t — время. Все расчеты проводились при идентичных (за исключением компонент тензоров упругих свойств) для каждого из материалов значениях параметров модели (количества кристаллографических систем скольжения (СС), параметров закона упрочнения, ориентаций решеток всех кристаллитов в отсчетной конфигурации) и начальных условиях:

$$\mathbf{\kappa}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\tau}_c^{(k)}|_{t=0} = \boldsymbol{\tau}_{c0}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(k)}|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad k = 1, \dots, K, \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0.$$

Результаты проведенных численных экспериментов на простой сдвиг показали, что кривые напряженно-деформированного состояния сколь-нибудь существенно отличаются только на начальной стадии активного деформирования (в упругой области), в дальнейшем на графиках они почти неотличимы для каждого из рассматриваемых материалов. На рисунке 1 для титанового образца приведены зависимости интенсивности напряжений K_u ($K_u = \left(\frac{3}{2} \mathbf{K}' : \mathbf{K}'\right)^{1/2}$), от интенсивности накопленных

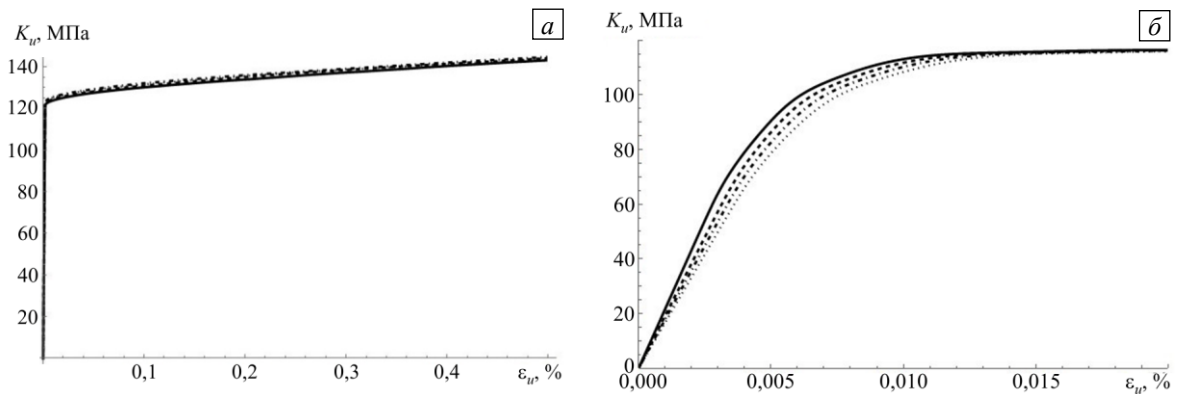


Рис. 1. Зависимость K_u от ε_u при простом сдвиге поликристаллического упругоизотропного титанового образца (ГПУ решетка) при различном осреднении упругих характеристик: по Фойгту (---), по Рейссу (···), по Хиллу (-·-·-): общий вид кривых (а), начальные участки в увеличенном масштабе (б); для сравнения показана зависимость для упруго-анизотропного титана – (—)

деформаций ε_u , определенной как интеграл по времени процесса от интенсивности скорости деформации. Из всех рассматриваемых материалов у титана различия результатов в упругой области наибольшие. На рисунке 1б начальные участки графиков показаны в увеличенном масштабе. Сплошной линией обозначена кривая для анизотропного материала.

При определении остаточных напряжений для указанной совокупности образцов после достижения в них при простом сдвиге интенсивности накопленных деформаций 50% производилась разгрузка. На приведенных гистограммах (Рис. 2–5) отражаются доли кристаллитов, имеющих интенсивности ОМН (в диапазоне ± 10 МПа от указанных на гистограмме средних); принятые сокращения: анизотропные свойства — А, изотропные V — по Фойгту, R — по Рейссу, H — по Хиллу.

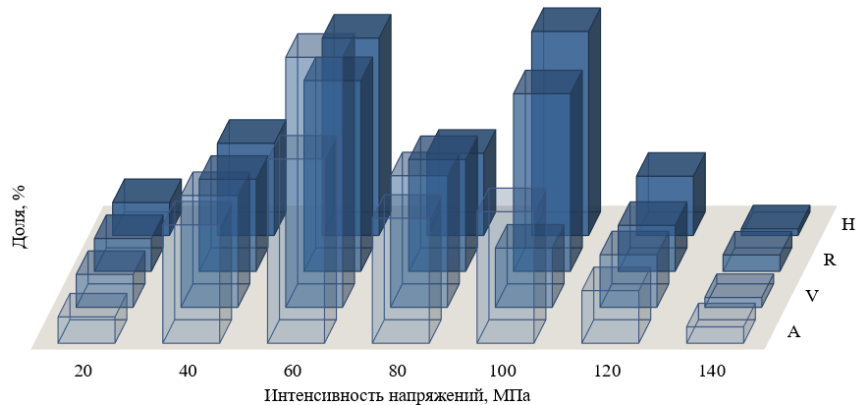


Рис. 2. Распределение кристаллитов по интенсивности остаточных мезонапряжений (вольфрам)

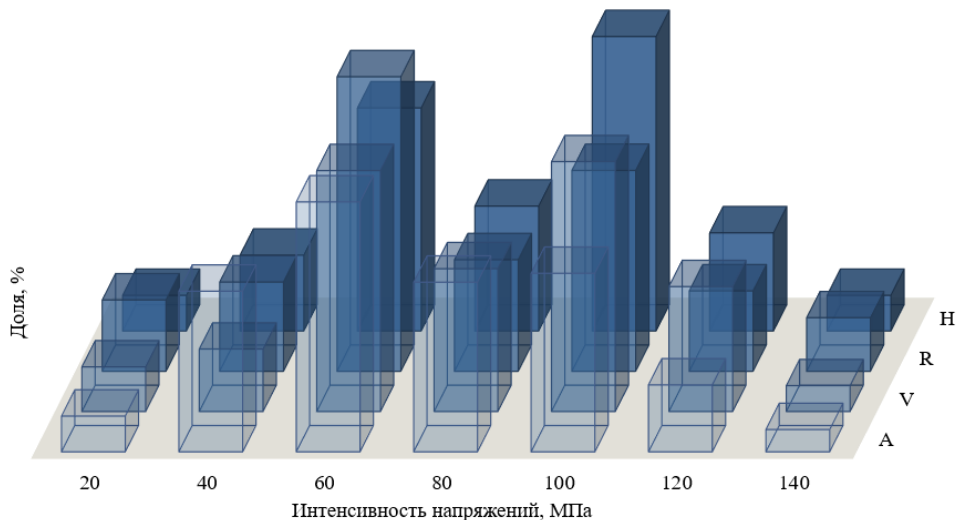


Рис. 3. Распределение кристаллитов по интенсивности остаточных мезонапряжений (медь)

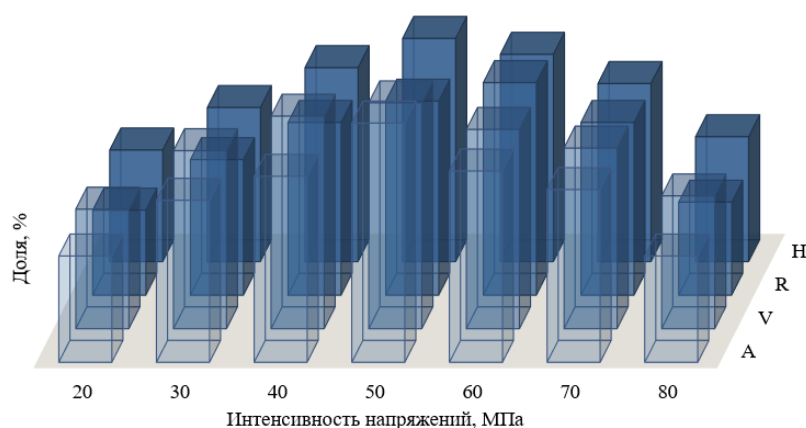


Рис. 4. Распределение кристаллитов по интенсивности остаточных мезонапряжений (титан)

Из приведенных результатов следует, что наибольшее различие распределения кристаллитов по ОМН в области высоких (90–110 МПа) интенсивностей напряжений достигается в кристаллах с кубической (ГЦК и ОЦК) решеткой. Несмотря на более высокую степень несимметричности ГПУ решетки, для титана различия в распределении элементов по остаточным мезонапряжениям, полученным при расчетах с анизотропными и изотропными упругими свойствами, оказались минимальными из рассмотренных материалов (особенно при определении осредненных характеристик по Хиллу). Возможно, данное обстоятельство связано с тем, что для ГПУ решетки упругие свойства в базовой плоскости близки к изотропным.

Следует отметить, что на прочность изделий существенное влияние оказывает также вид напряженного состояния; в качестве характеристики вида напряженного состояния в большинстве работ, посвященных исследованию прочности, используется параметр жесткости нагружения (коэффициент трехосности), равный отношению среднего напряжения к интенсивности напряжений:

$$\Theta = \frac{\kappa_{cp}}{\kappa_u}, \quad \kappa_{cp} = \frac{I_1(\mathbf{\kappa})}{3}, \quad \kappa_u = \left(\frac{3}{2} \mathbf{\kappa}' : \mathbf{\kappa}' \right)^{1/2},$$

где $I_1(\)$ — первый инвариант тензора 2-го ранга, $\mathbf{\kappa}'$ — девиатор напряжений Кирхгоффа. Большинство материалов разрушается по-разному, в зависимости от того, являются ли средние напряжения растягивающими или сжимающими. Как показывают опыты, все материалы без исключения способны воспринимать весьма большие напряжения в условиях всестороннего сжатия, в то время как при всестороннем растяжении разрушение наступает при сравнительно низких напряжениях. Имеются напряженные состояния, при которых разрушение происходит хрупко, без образования пластических деформаций, а есть такие, при которых тот же материал способен пластически деформироваться. Более подробно ознакомиться с критериями разрушения можно в многочисленных монографиях (см., например, [39–41]) и обзорах [42, 43 и других].

С использованием метрики Чебышева были найдены такие пары кристаллитов (анизотропного и соответствующего изотропного тела), для которых интенсивность разности компонент тензоров ОМН максимальна:

$$\|\Delta\kappa_N\| = \max_{i=1,I} \left(\frac{3}{2} (\kappa_i'^A - \kappa_i'^N) : (\kappa_i'^A - \kappa_i'^N) \right)^{1/2},$$

где $\kappa_i'^A, \kappa_i'^N$ — девиаторы ОМН в i -м кристаллите, рассчитанные для анизотропного (А) и соответствующих изотропных упругих тел с осреднением констант по Фойгту ($N=V$), Рейссу ($N=R$) и Хиллу ($N=H$), I — число элементов мезоуровня в представительном макрообъеме.

После нахождения (по метрике Чебышева) пары кристаллитов рассчитывалась: 1) разность между тензорами ОМН анизотропного и соответствующего изотропного кристаллитов $(\Delta\kappa_N)_{ij}$ (компоненты тензоров определены в базисе ЛСК); 2) интенсивность напряжений $\|\Delta\kappa_N\|$; 3) значения параметров трехосности. Полученные результаты сведены в таблицу 2. Следует отметить значимые различия как по величине разности ОМН, так и по их компонентам; при этом интенсивность разности ОМН может даже превосходить предел текучести (в отчетной конфигурации).

Таблица 2. Характеристики ОМН при использовании изотропных и анизотропных упругих свойств кристаллитов

		ОЦК	ГЦК	ГПУ
A-V	$\ \Delta\kappa_v\ $, МПа	89,14	67,42	114,18
	$\frac{\Theta_v}{\Theta_A}$	$\frac{0,61}{0,52}$	$\frac{0,72}{0,64}$	$\frac{0,68}{0,55}$
	$(\Delta\kappa_v)_{ij}$, МПа	$\begin{pmatrix} 24,74 & 17,42 & -19,57 \\ 17,42 & 39,08 & 25,93 \\ -19,57 & 25,93 & 21,01 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14,18 & 12,94 & -26,1 \\ 12,94 & 24,08 & 13,7 \\ -26,1 & 13,7 & 13,3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 15,47 & -31,27 & 16,62 \\ -31,27 & 44,23 & 15,12 \\ 16,62 & 15,12 & -59,42 \end{pmatrix}$
A-R	$\ \Delta\kappa_R\ $, МПа	98,57	78,57	120,23
	$\frac{\Theta_R}{\Theta_A}$	$\frac{0,58}{0,52}$	$\frac{0,58}{0,64}$	$\frac{0,49}{0,55}$
	$(\Delta\kappa_R)_{ij}$, МПа	$\begin{pmatrix} 12,39 & 16,25 & -21,62 \\ 16,25 & 46,54 & 24,5 \\ -21,62 & 24,5 & 38,67 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24,91 & 13,4 & -15,6 \\ 13,4 & 38,21 & 16,14 \\ -15,6 & 16,14 & 25,85 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4,99 & -50,63 & -35,13 \\ -50,63 & 24,79 & 16,32 \\ -35,13 & 16,32 & -29,5 \end{pmatrix}$
A-H	$\ \Delta\kappa_H\ $, МПа	104,98	74,93	166,88
	$\frac{\Theta_H}{\Theta_A}$	$\frac{0,46}{0,52}$	$\frac{0,70}{0,64}$	$\frac{0,61}{0,55}$
	$(\Delta\kappa_H)_{ij}$, МПа	$\begin{pmatrix} 28,13 & 19,9 & -34,4 \\ 19,9 & 37,17 & 18,4 \\ -34,4 & 18,4 & -36,87 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6,28 & 14,9 & -18,1 \\ 14,9 & 23,57 & 21,08 \\ -18,1 & 21,08 & 34,07 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9,31 & -40,62 & -3,18 \\ -40,62 & 81,69 & 11,3 \\ -3,18 & 11,3 & -90,73 \end{pmatrix}$

5. Выводы

На основе двухуровневой упруговязкопластической модели проанализировано различие отклика материалов при использовании для описания упругого деформирования анизотропных (с определенным классом симметрии) и соответствующих изотропных определяющих соотношений. По результатам расчетов получены кривые, характеризующие напряженно-деформированное состояние, произведена оценка остаточных мезонапряжений (остающихся в кристаллитах после разгрузки представительного макрообъема поликристалла), найдены коэффициенты трехосности таких пар кристаллитов (анизотропного и соответствующего изотропного тела), для которых интенсивность разности компонент тензоров остаточных мезонапряжений максимальна. С помощью численных экспериментов на примере простого сдвига показано, что кривые зависимости интенсивности напряжений от интенсивности накопленных деформаций для представительного макрообъема, состоящего из 1000 зерен, отличаются незначительно на стадиях развитых деформаций; некоторые различия имеют место для материала с гексагональной плотноупакованной решеткой (у титана) при деформировании в окрестности упругой области.

При анализе остаточных мезонапряжений для материалов с ОЦК и ГЦК решетками наилучшее приближение к анизотропному телу достигается при использовании упругих соотношений материалов, упругие модули в которых определены с помощью гипотезы Рейсса. Для материала с ГПУ решеткой наилучшее соответствие имеет место при изотропных упругих характеристиках, полученных в рамках гипотезы Хилла. Применение различных подходов для нахождения упругих свойств соответствующего упругоизотропного тела значительно влияет на результаты расчета остаточных мезонапряжений: некоторые из подходов могут привести к существенным погрешностям при оценке усталостной прочности изделия. Остаточные мезонапряжения дают представление об уровне накопленной упругой энергии в кристаллитах в результате предшествующего упругопластического деформирования, позволяют предсказать образование и распространение трещин на мезоуровне, что необходимо учитывать при прогнозировании прочностных свойств изделий. На процессы накопления повреждений и разрушения значительное влияние оказывает также вид напряженного состояния; часто в качестве основной характеристики вида напряженного состояния используется коэффициент трехосности. Результаты расчетов с помощью двухуровневой модели показали, что коэффициенты трехосности для ОМН при применении для описания упругих деформаций анизотропного и соответствующего изотропного законов приводят к различиям, достигающим 23%, что также может существенно отразиться на точности прогнозирования разрушения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания ПНИПУ, проект № FSNM-020-0027) и РФФИ (проект № 20-31-70027).

Литература

1. Физическая мезомеханика и компьютерное конструирование материалов / Под ред. В.Е. Панина. Новосибирск: Наука, 1995. Т. 1. 298 с. Т. 2. 320 с.
2. Панин В.Е. Физические основы мезомеханики среды со структурой // Изв. вузов. Физика. 1992. Т. 35, № 4. С. 5-18. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00560066>)
3. Трусов П. В., Швейкин А.И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2019. 605 с. <http://dx.doi.org/10.15372/MULTILEVEL2019TPV>
4. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity // Int. J. Plast. 2010. Vol. 26. P. 1280-1309. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008>
5. Horstemeyer M.F. Multiscale modeling: A review // Practical Aspects of Computational Chemistry / Ed. J. Leszczynski, M.K. Shukla. Springer, 2009. P. 87-135. https://doi.org/10.1007/978-90-481-2687-3_4
6. Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications // Acta Mater. 2010. Vol. 58. P. 1152-1211. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.10.058>
7. Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория пластичности. Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2011. 419 с.
8. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физ. мезомех. 2011. Т. 14, № 4. С. 17-28. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959913010037>)
9. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика. 2011. Т. 14, № 5. С. 5-30. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959913020021>)
10. Kroner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen // Arch. Rational Mech. Anal. 1959. Vol. 4. P. 273-334. <https://doi.org/10.1007/BF00281393>
11. Lee E.H., Liu D.T. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis // J. Appl. Phys. 1967. Vol. 38. P. 19-27. <https://doi.org/10.1063/1.1708953>
12. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strain // J. Appl. Mech. 1969. Vol. 36. P. 1-6. <https://doi.org/10.1115/1.3564580>
13. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
14. Трусов П.В., Кондратьев Н.С., Швейкин А.И. О геометрически нелинейных определяющих соотношениях упругого материала // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 3. С. 182-200. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.3.13>
15. Taylor G.I. Plastic strain in metals // J. Inst. Metals. 1938. Vol. 62. P. 307-324.
16. Lin T.H. Analysis of elastic and plastic strains of a face-centered cubic crystal // J. Mech. Phys. Solid. 1957. Vol. 5. P. 143-149. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(57\)90058-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90058-3)
17. Truesdell C.A. Hypo-elasticity // J. Rational Mech. Anal. 1955. Vol. 4. P. 83-133.
18. Truesdell C. The simplest rate theory of pure elasticity // Comm. Pure Appl. Math. 1955. Vol. 8. P. 123-132. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160080109>
19. Truesdell C. Hypo-elastic shear // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27. P. 441-447. <https://doi.org/10.1063/1.1722399>
20. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate // J. Elasticity. 1997. Vol. 47. P. 51-68. <https://doi.org/10.1023/A:1007356925912>
21. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures // Arch. Mech. 1988. Vol. 50, no. 6. P. 1015-1045. <https://am.ippt.pan.pl/index.php/am/article/view/v50p1015/631>
22. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. The choice of objective rates in finite elastoplasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate // Proc. R. Soc. Lond. A. 2000. Vol. 456. P. 1865-1882. <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0591>
23. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems // Acta Mechanica. 2005. Vol. 176. P. 135-151. <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0218-2>
24. Hill R. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain // Proc. R. Soc. Lond. A. 1970. Vol. 314. P. 457-472. <https://doi.org/10.1098/rspa.1970.0018>
25. Seth B.R. Generalized strain and transition concepts for elastic-plastic deformation-creep and relaxation // Applied Mechanics / ed. H. Görtler. Springer, 1966. P. 383-389. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_51
26. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
27. Lehmann T. Anisotrope plastische Formänderungen // Rheol. Acta. 1964. Vol. 3. P. 281-285. <https://doi.org/10.1007/BF02096162>
28. Dienes J.K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies // Acta Mechanica. 1979. Vol. 32. P. 217-232. <https://doi.org/10.1007/BF01379008>
29. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 232 с.
30. Трусов П.В., Швейкин А.И., Янц А.Ю. О разложении движения, независимых от выбора системы отсчета производных и определяющих соотношениях при больших градиентах перемещений: взгляд с позиций многоуровневого моделирования // Физ. мезомех. 2016. Т. 19, № 2. С. 47-65. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959917040014>)
31. Трусов П.В., Швейкин А.И. О разложении движения и определяющих соотношениях в геометрически нелинейной упруговязкопластичности кристаллитов // Физ. мезомех. 2016. Т. 19, № 3. С. 25-38. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959917040026>)
32. Кривошеина М.Н., Туч Е.В., Хон Ю.А. Применение критерия Мизеса–Хилла для моделирования динамического нагружения сильно анизотропных материалов // Изв. РАН. Серия физическая. 2012. Т. 76, № 1. С. 91-96. (English version <https://doi.org/10.3103/S1062873812010169>)

33. Ньюнхем Р.Э. Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т комп. исслед., 2007. 652 с.
34. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных тел. М: Наука, 1977. 399 с.
35. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
36. Фридман Я.Б. Механические свойства металлов. М.: Машиностроение, 1974. Ч. 1. Деформация и разрушение. 472 с.
37. Поздеев А.А., Няшин Ю.И., Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. М.: Наука, 1982. 112 с.
38. Радченко В.П., Саушкин М.Н. Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях. М.: Машиностроение, 2005. 226 с.
39. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
40. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
41. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
42. Besson J. Continuum models of ductile fracture: A Review // *Int. J. Damage Mechanics*. 2010. Vol. 19. P. 3-52. <https://doi.org/10.1177%2F1056789509103482>
43. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусов П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // *Физ. мезомех.* 2015. Т. 18, № 4. С. 68-86. (English version <https://doi.org/10.1134/S1029959916030103>)

References

1. Panin V.E. (ed.) *Fizicheskaya mezomekhanika i komp'yuternoye konstruirovaniye materialov* [Physical mesomechanics and computer-aided design of materials]. Novosibirsk, Nauka, 1995. Vol. 1, 298 p. Vol. 2, 320 p.
2. Panin V.E. Physical foundations of mesomechanics of a medium with a structure. *Russ. Phys. J.*, 1992, vol. 35, pp. 305-315. <https://doi.org/10.1007/BF00560066>
3. Trusov P.V., Shveykin A.I. *Mnogourovnevyye modeli mono- i polikristallicheskih materialov: teoriya, algoritmy, primery primeneniya* [Multilevel models of mono- and polycrystalline materials: theory, algorithms, application examples]. Novosibirsk, Siberian Branch of RAS, 2019. 605 p. <http://dx.doi.org/10.15372/MULTILEVEL2019TPV>
4. McDowell D.L. A perspective on trends in multiscale plasticity. *Int. J. Plast.*, 2010, vol. 26, pp. 1280-1309. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2010.02.008>
5. Horstemeyer M.F. Multiscale modeling: A review. *Practical Aspects of Computational Chemistry*, ed. J. Leszczynski, M.K. Shukla. Springer, 2009. P. 87-135. https://doi.org/10.1007/978-90-481-2687-3_4
6. Roters F., Eisenlohr P., Hantcherli L., Tjahjanto D.D., Bieler T.R., Raabe D. Overview of constitutive laws, kinematics, homogenization and multiscale methods in crystal plasticity finite-element modeling: Theory, experiments, applications. *Acta Mater.*, 2010, vol. 58, pp. 1152-1211. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2009.10.058>
7. Trusov P.V., Shveykin A.I. *Teoriya plastichnosti* [Plasticity theory]. Perm, Perm. gos. tekhn. un-t, 2011. 419 p.
8. Trusov P.V., Shveykin A.I. Multilevel crystal plasticity models of single- and polycrystals. Statistical models. *Phys. Mesomech.*, 2013, vol. 16, pp. 23-33. <https://doi.org/10.1134/S1029959913010037>
9. Trusov P.V., Shveykin A.I. Multilevel crystal plasticity models of single- and polycrystals. Direct models. *Phys. Mesomech.*, 2013, vol. 16, pp. 99-124. <https://doi.org/10.1134/S1029959913020021>
10. Kroner E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen [Continuum theory of dislocations and residual stresses]. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1959, vol. 4, pp. 273-334. <https://doi.org/10.1007/BF00281393>
11. Lee E.H., Liu D.T. Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis. *J. Appl. Phys.*, 1967, vol. 38, pp. 19-27. <https://doi.org/10.1063/1.1708953>
12. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strain. *J. Appl. Mech.*, 1969, vol. 36, pp. 1-6. <https://doi.org/10.1115/1.3564580>
13. Green A.E., Adkins J.E. *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. Oxford, The Clarendon Press, 1960. 348 p.
14. Trusov P.V., Kondratev N.S., Shveykin A.I. About geometrically nonlinear constitutive relations for elastic material. *Vestnik PNIPU. Mekhanika – PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 3, pp. 182-200. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.3.13>
15. Taylor G.I. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*, 1938, vol. 62, pp. 307-324.
16. Lin T.H. Analysis of elastic and plastic strains of a face-centered cubic crystal. *J. Mech. Phys. Solid.*, 1957, vol. 5, pp. 143-149. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(57\)90058-3](https://doi.org/10.1016/0022-5096(57)90058-3)
17. Truesdell C.A. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, 1955, vol. 4, pp. 83-133.
18. Truesdell C. The simplest rate theory of pure elasticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1955, vol. 8, pp. 123-132. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160080109>
19. Truesdell C. Hypo-elastic shear. *J. Appl. Phys.*, 1956, vol. 27, pp. 441-447. <https://doi.org/10.1063/1.1722399>
20. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate. *J. Elasticity*, 1997, vol. 47, pp. 51-68. <https://doi.org/10.1023/A:1007356925912>
21. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures. *Arch. Mech.*, 1988, vol. 50, no. 6, pp. 1015-1045. <https://am.ippt.pan.pl/index.php/am/article/view/v50p1015/631>
22. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. The choice of objective rates in finite elastoplasticity: general results on the uniqueness of the logarithmic rate. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 2000, vol. 456, pp. 1865-1882. <https://doi.org/10.1098/rspa.2000.0591>
23. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems. *Acta Mechanica*, 2005, vol. 176, pp. 135-151. <https://doi.org/10.1007/s00707-005-0218-2>
24. Hill R. Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1970, vol. 314, pp. 457-472. <https://doi.org/10.1098/rspa.1970.0018>

25. Seth B.R. Generalized strain and transition concepts for elastic-plastic deformation-creep and relaxation. *Applied Mechanics*, ed. H. Görtler. Springer, 1966. P. 383-389. https://doi.org/10.1007/978-3-662-29364-5_51
26. Lurie A.I. *Nonlinear theory of elasticity*. Elsevier, 1990. 617 p.
27. Lehmann T. Anisotrope plastische Formänderungen. *Rheol. Acta*, 1964, vol. 3, pp. 281-285. <https://doi.org/10.1007/BF02096162>
28. Dienes J.K. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mechanica*, 1979, vol. 32, pp. 217-232. <https://doi.org/10.1007/BF01379008>
29. Pozdeyev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I. *Bol'shiye uprugoplasticheskiye deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya* [Large elastic-plastic deformations: theory, algorithms, applications]. Moscow, Nauka, 1986. 232 p.
30. Trusov P.V., Shveykin A.I., Yanz A.Yu. Motion decomposition, frame-indifferent derivatives, and constitutive relations at large displacement gradients from the viewpoint of multilevel modeling. *Phys. Mesomech.*, 2017, vol. 20, pp. 357-376. <https://doi.org/10.1134/S1029959917040014>
31. Trusov P.V., Shveykin A.I. On motion decomposition and constitutive relations in geometrically nonlinear elastoviscoplasticity of crystallites. *Phys. Mesomech.*, 2016, vol. 19, pp. 377-391. <https://doi.org/10.1134/S1029959917040026>
32. Krivosheina M.N., Tuch E.V., Khon Yu.A. Applying the Mises-Hill criterion to modeling the dynamic loading of highly anisotropic materials. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.*, 2012, vol. 76, pp. 80-84. <https://doi.org/10.3103/S1062873812010169>
33. Newnham R.E. *Properties of materials. Anisotropy, symmetry, structure*. Oxford University Press, 2005. 390 p.
34. Shermgor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh tel* [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous bodies]. Moscow, Nauka, 1977. 399 p.
35. Birger I.A. *Ostatochnyye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, Mashgiz, 1963. 232 p.
36. Fridman Ya.B. *Mekhanicheskiye svoystva metallov. Ch. 1. Deformatsiya i razrusheniye* [Mechanical properties of metals. Part 1. Deformation and Destruction]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1974. 472 p.
37. Pozdeyev A.A., Nyashin Yu.I., Trusov P.V. *Ostatochnyye napryazheniya: teoriya i prilozheniya* [Residual stresses: theory and applications]. Moscow, Nauka, 1974. 112 p.
38. Radchenko V.P., Saushkin M.N. *Polzuchest' i relaksatsiya ostatochnykh napryazheniy v uprochnennykh konstruktivnykh* [Creep and relaxation of residual stresses in reinforced structures]. Moscow, Mashinostroyeniye, 2005. 226 p.
39. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of fracture mechanics]. Moscow, Nauka, 1974. 312 p.
40. Collins J.A. *Failure of materials in mechanical design: Analysis, prediction, prevention*. John Wiley & Sons, 1981. 629 p.
41. Rabotnov Yu.N. *Vvedeniye v mekhaniku razrusheniya* [Introduction to fracture mechanics]. Moscow, Nauka, 1987. 80 p.
42. Besson J. Continuum models of ductile fracture: A Review. *Int. J. Damage Mechanics*, 2010, vol. 19, pp. 3-52. <https://doi.org/10.1177%2F1056789509103482>
43. Volegov P.S., Gribov D.S., Trusov P.V. Damage and fracture: Review of experimental studies. *Phys. Mesomech.*, 2016, vol. 19, pp. 319-331. <https://doi.org/10.1134/S1029959916030103>

Поступила в редакцию 12.06.2020; после доработки 05.07.2020; принята к опубликованию 11.07.2020

Сведения об авторах

Соколов Александр Сергеевич, б/с, студ., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., д. 29а; e-mail: aleks1997.1997@yandex.ru

Трусов Пётр Валентинович, дфмн, проф., зав. каф., ПНИПУ; e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru