

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.1.9](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.1.9)

УДК 534.1

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ, МАТЕРИАЛ КОТОРОЙ НАКАПЛИВАЕТ ПОВРЕЖДЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Д.М. Бриккель<sup>1</sup>, В.И. Ерофеев<sup>1,2</sup>, А.В. Леонтьева<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация<sup>2</sup>Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация

В линейной и нелинейной постановках сформулирована самосогласованная математическая модель, включающая в себя уравнение изгибных колебаний балки и кинетическое уравнение накопления повреждений в ее материале. Балка считается бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, то есть параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. Это позволяет рассматривать модель балки без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, считать бегущими изгибными волнами. В результате аналитических исследований и численного моделирования, показано, что поврежденность материала привносит частотно-зависимое затухание и существенно изменяет характер дисперсии фазовой скорости изгибной упругой волны. Если в классической балке Бернулли–Эйлера у изгибных волн имеется одна дисперсионная ветка при любом значении частоты, то для балки, материал которой накапливает повреждения, во всем частотном диапазоне существует две пары дисперсионных веток, при этом одна пара описывает распространение волны, а другая – ее затухание. В рамках геометрически нелинейной модели поврежденной балки изучается формирование интенсивных изгибных волн стационарного профиля. Показано, что такие существенно несинусоидальные волны могут быть как периодическими, так и уединенными (локализованными в пространстве). Определены зависимости, связывающие параметры волн (амплитуду, ширину, длину волны) с поврежденностью материала. Выявлено, что с ростом параметра поврежденности материала амплитуды периодической и уединенной волн увеличиваются, в то время как длина периодической волны и ширина уединенной волны уменьшаются.

*Ключевые слова:* балка, поврежденность материала, изгибная волна, дисперсия, затухание, геометрическая нелинейность, математическое моделирование

## THE PROPAGATION OF BENDING WAVES IN A BEAM, THE MATERIAL OF WHICH ACCUMULATES DAMAGE DURING ITS OPERATION

D.M. Brikkel<sup>1</sup>, V.I. Erofeev<sup>1,2</sup> and A.V. Leonteva<sup>1,2</sup><sup>1</sup>National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation<sup>2</sup>Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

The linear and nonlinear formulations of a self-consistent material model are developed based on the equation of the bending vibrations of the beam and the kinetic equation of damage accumulation in its material. The beam is considered endless. Such idealization is permissible if optimal damping devices are located at its boundaries, that is the parameters of boundary fixing are such that disturbances acting on it will not be reflected. This allows us to exclude boundary conditions from the beam model and consider the vibrations propagating along the beam as traveling bending waves. As a result of analytical studies and numerical modeling, it was found that the damage of the material involves a frequency-dependent attenuation and significantly changes the nature of the dispersion of the phase velocity of a bending elastic wave. Note that in a classical Euler–Bernoulli beam there is one dispersion branch for bending waves at any frequency value, whereas for a beam with accumulated material damage in the entire frequency range there are two dispersion branches, characterizing wave propagation, and two dispersion branches, characterizing its attenuation. The problem of the formation of intense bending waves of a stationary profile is considered in the framework of a geometrically nonlinear model of a damaged beam. It is shown that such essentially non-sinusoidal waves can be either periodic or solitary (localized in space). The dependencies relating the parameters of the waves (amplitude, width, wavelength) with the damage to the material are determined. It is shown that the amplitude of the periodic wave and the amplitude of the solitary wave increase with increasing material damage parameter, while the length of the periodic wave and the width of the solitary wave decrease with increase of this parameter.

*Key words:* beam, material damage, bending wave, dispersion, attenuation, geometric nonlinearity, mathematical modeling

### 1. Введение

Конструкционные материалы на протяжении всего срока эксплуатации должны удовлетворять требованиям прочности. В процессе работы под воздействием нагрузок увеличивается количество рассеянных в объеме материала микрповреждений различной природы — микротрещин, микропор, дефектов, вызванных напряжениями на поверхности ядер кристаллизации, и другого. В результате этого процесса, называемого накоплением повреждений [1–9], элемент конструкции может потерять свои эксплуатационные свойства, что приведет к невозможности его нормальной работы и даже к полному разрушению, что может стать причиной серьезной аварии.

Анализ большого числа повреждений объектов из различных областей жизнедеятельности человека показывает, что их можно было избежать при своевременном выявлении чрезмерного накопления микродефектов и образования микрповреждений или спрогнозировать при проектировании на основе точных теорий.

Таким образом, выявление и численный анализ микродефектов — важные проблемы современной науки и техники. Для их решения существуют различные подходы, позволяющие оценить прочность конструкций, поврежденность их материала, например, неразрушающий контроль. Одним из его наиболее перспективных методов является акустический [10, 11].

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики рассматриваются отдельно от задач накопления повреждений. При разработке методов их решения принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности. Фазовая скорость волны и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты и линейными функциями поврежденности [11]. При несомненных достоинствах (простоте) такой подход, как и любой другой, не опирающийся на математические модели процессов и систем, обладает целым рядом недостатков.

Авторы работ [12–14] считают задачу самосогласованной, включающей в постановку, кроме уравнения развития поврежденности, динамическое уравнение теории упругости. Такой подход позволил рассмотреть некоторые прикладные задачи волновой динамики поврежденных материалов и элементов конструкций [15–21].

В настоящей работе сформулирована (в линейной и нелинейной постановках) и исследована математическая модель, позволяющая описывать распространение изгибных волн в балке с учетом поврежденности ее материала.

## 2. Математическая модель изгибных колебаний

Пусть имеется балка, совершающая изгибные колебания. В технической теории Бернулли–Эйлера [22] предполагается:

- 1) Поперечные сечения балки, плоские и перпендикулярные ее оси, во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси балки.
- 2) Продольные сечения балки сопротивляются изгибу независимо, не оказывая друг на друга влияния (то есть нормальные напряжения на площадках, параллельных оси балки, пренебрежимо малы).
- 3) Инерцию вращения балки при изгибе можно не принимать во внимание.

Из второго предположения следует, что из компонент тензоров напряжений и деформаций существенным признаются только  $\sigma_{11}$  и  $\varepsilon_{11}$ , то есть волокна либо растягиваются, либо сжимаются, в результате чего запасается потенциальная энергия.

Положим, что балка подверглась статическим или циклическим испытаниям и в ее материале накопились повреждения. Мету поврежденности представим в виде функции Качанова–Работнова  $\Psi(x, t)$ , которая равна нулю, когда повреждения отсутствуют, и близка к единице в момент разрушения материала [1, 2]. Обозначим через  $W(x, t)$  перемещение точек срединной линии балки при изгибе. Динамику балки с учетом поврежденности ее материала опишем системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} &= \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi &= \beta_2 E \frac{\partial W}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены обозначения:  $t$  — время;  $x$  — продольная координата, совпадающая со срединной линией балки;  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  — константы, характеризующие поврежденность материала, при этом  $\alpha = 1/T$ , где  $T$  — время релаксации [16],  $\beta_1 \beta_2 < 0$ , но физический смысл этих величин не столь очевиден;  $E$  — модуль Юнга;  $c_s = \sqrt{E/\rho}$ ,  $r_y = \sqrt{J_y/F}$ , где  $\rho$  — плотность материала,  $J_y$  — осевой момент инерции,  $F$  — площадь поперечного сечения балки.

Пусть балка является бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, то есть параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В [23] на основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано существование согласованных концевых гасителей различных типов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет применять модель балки (1) без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, рассматривать как бегущие изгибные волны. Вследствие сказанного система (1) сведется к одному уравнению относительно поперечного перемещения  $W(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c_s^2 r_y^2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{c_s^2 r_y^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (2)$$

Легко видеть, что наличие поврежденности материала приводит к появлению в уравнении (2) слагаемых, эквивалентных тем, что описывают поведение балки, если бы она сжималась продольной силой (второе слагаемое) и в ее материале возникало внутреннее трение (третье и четвертое слагаемые).

Осуществим обезразмеривание величин поперечного перемещения, поперечной координаты  $z$  и времени:

$$U = W/W_0, \quad z = x\sqrt{\alpha/(c_s \cdot r_y)}, \quad \tau = \alpha \cdot t, \quad (3)$$

где  $W_0$  — максимальное поперечное перемещение, при котором балку еще можно считать нерастяжимой. Тогда уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \frac{\partial^5 U}{\partial z^4 \partial \tau} = 0, \quad (4)$$

где  $a = \frac{-\beta_1 \beta_2 E}{\alpha^2 c_s^2 r_y^2} > 0$ .

Исследуем далее на основе (4) влияние поврежденности материала на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке. Будем отыскивать решение уравнения (4) в виде бегущей гармонической волны:  $U = A \cdot e^{i(\omega\tau - kz)}$  (здесь  $A$  — комплексная амплитуда,  $\omega$  — круговая частота,  $k$  — волновое число). Получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 + ak^2 - k^4 + i\omega^3 - i\omega k^4 = 0, \quad (5)$$

из которого следует, что волновое число должно быть комплексным:

$$k = k_1 + ik_2, \quad k_2 < 0. \quad (6)$$

Подставляя (6) в комплексное дисперсионное уравнение (5) и выделяя его действительную и мнимую части, приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 - ak_1^2 + ak_2^2 + k_1^4 - 6k_1^2 k_2^2 + k_2^4 - 4\omega k_1^3 k_2 + 4\omega k_1 k_2^3 = 0, \\ -2ak_1 k_2 + 4k_1^3 k_2 - 4k_1 k_2^3 - \omega^3 + \omega k_1^4 - 6\omega k_1^2 k_2^2 + \omega k_2^4 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

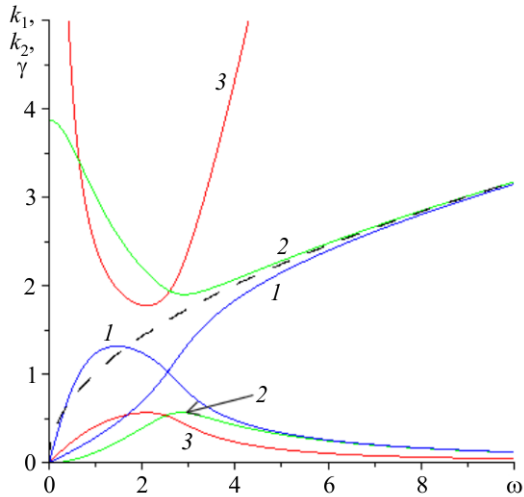
### 3. Анализ дисперсионных зависимостей

Поскольку аналитическое исследование системы (7) крайне затруднительно, для ее анализа применим численное моделирование, в результате которого получим частотные зависимости действительной —  $k_1(\omega)$ , и мнимой —  $|k_2(\omega)|$ , частей волнового числа (Рис. 1). Если в классической балке Бернулли–Эйлера у изгибных волн имеется одна дисперсионная ветка, которой отвечают  $k_1 = \sqrt{\omega}$  и  $k_2 = 0$  при любом значении  $\omega$  (пунктирная линия на рисунке 1), то у волн в балке, описываемой уравнением (4), во всем частотном диапазоне существуют две дисперсионных ветки как для  $k_1$  (характеризует распространение волны), так и для  $k_2$  (характеризует ее частотно-зависимое затухание).

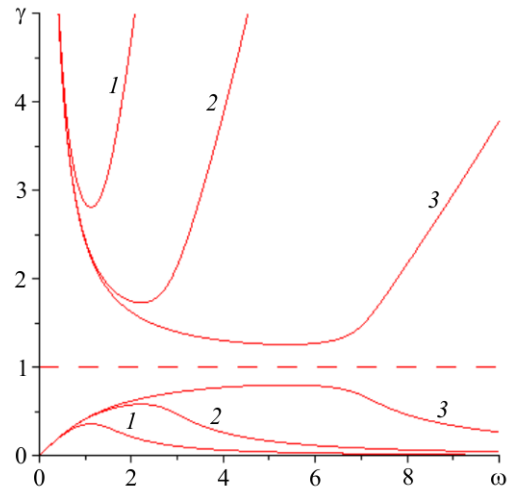
Важным фактором для процесса распространения изгибной волны является частотная зависимость параметра  $\gamma = |k_2|/k_1$  — отношения коэффициента затухания волны  $k_2$  к постоянной ее распространения  $k_1$ . Из (7) находим неявное уравнение зависимости параметра  $\gamma$  от частоты:

$$a^2 \omega^2 \gamma^8 - 4m\gamma^6 - 2(a^2 \omega^2 + 8a^2 - 4m)\gamma^4 - 4m\gamma^2 + a^2 \omega^2 = 0, \quad (8)$$

где для сокращения записи введено обозначение  $m = a^2 + 4\omega^2(1 + \omega^2)^2$ . Зависимость изображена на рисунке 1 (см. линию 3). Из рисунка видно, что для нижней по  $k_1$  дисперсионной ветки во всем частотном диапазоне справедливо неравенство  $\gamma > 1$ , следовательно, здесь преобладает затухание, и бегущих изгибных волн не существует. Для верхней по  $k_1$  дисперсионной ветки  $\gamma < 1$  во всем частотном диапазоне, следовательно, здесь имеют место бегущие затухающие изгибные волны.



**Рис. 1.** Зависимости мнимой (кривая 1), действительной (2) частей волнового числа и их отношения  $\gamma$  (3) от частоты при  $a=15$ ; штриховая линия – дисперсионная ветка классической балки Бернулли–Эйлера

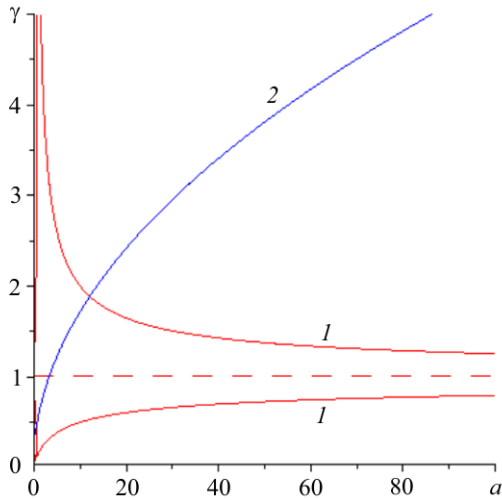


**Рис. 2.** Зависимость отношения  $\gamma$  от частоты при различных значениях параметра  $a$ : 5 (кривая 1), 15 (2), 30 (3); штриховая линия – асимптота  $\gamma=1$

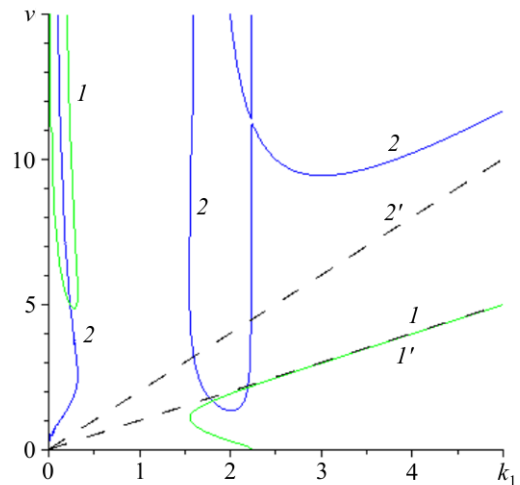
Динамика зависимости  $\gamma(\omega)$  при различных значениях параметра  $a$  изображена на рисунке 2. Координаты точки максимума нижней ветви кривой зависят от значений  $a$  и определяются из решения системы уравнений. Производная  $\gamma'(\omega)$  обращается в нуль на кривой

$$a^2\gamma^4 + 2(a^2 - 8(3\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1))\gamma^2 + a^2 = 0. \quad (9)$$

Совместное решение уравнений (8) и (9) позволяет найти координаты точки максимума  $(\omega_{\max}, \gamma_{\max})$  при фиксированном значении  $a$ . При увеличении значения  $a$  кривая приближается к асимптоте, а точка максимума сдвигается в направлении увеличения частоты и коэффициента затухания (см. Рис. 3).



**Рис. 3.** Зависимости  $\gamma_{\max}$  (нижняя ветвь кривой 1),  $\gamma_{\min}$  (верхняя ветвь кривой 1) и  $\omega_{\max} = \omega_{\min}$  (2) от параметра  $a$ ; штриховая линия – асимптота  $\gamma=1$



**Рис. 4.** Зависимости фазовой  $-v_{ph}(k_1)$  (кривая 1), и групповой  $-v_{gr}(k_1)$  (2), скоростей от действительной части волнового числа при фиксированном значении параметра  $a=5$ ; штриховые линии  $1'$  и  $2'$  – соответственно,  $v_{ph}$  и  $v_{gr}$  в классической балке Бернулли–Эйлера

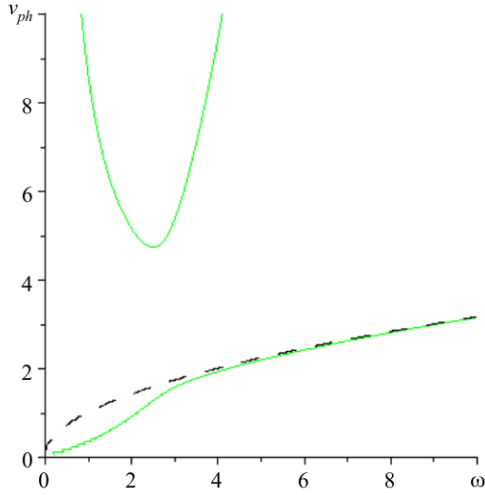


Рис. 5. Зависимость фазовой скорости от частоты  $v_{ph}(\omega)$  при фиксированном значении параметра  $a = 15$ ; штриховая линии  $-v_{ph}$  в классической балке Бернулли–Эйлера

На рисунке 4 показаны зависимости от постоянной распространения  $k_1$  фазовой —  $v_{ph} = \omega/k_1$ , и групповой —  $v_{gr} = \partial\omega/\partial k_1$ , скоростей изгибной волны. Штриховой линией на рисунке отображен линейный рост в зависимости от  $k_1$  фазовой и групповой скоростей изгибных волн, распространяющихся в классической балке Бернулли–Эйлера.

На рисунке 5 представлена зависимость фазовой скорости от частоты  $v_{ph}(\omega)$  при фиксированном значении параметра  $a$ .

#### 4. Учет геометрической нелинейности

Рассмотрим случай распространения по балке интенсивных вибраций, когда уже нельзя ограничиться изучением гармонических или квазигармонических процессов, а необходимо учитывать широкополосность изгибных волн. Примем во внимание геометрическую нелинейность балки (то есть нелинейную связь

деформации и перемещения), считая при этом, что срединная линия балки остается нерастяжимой.

Система уравнений (1) в этом случае примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{c_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] &= \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi &= \beta_2 E \frac{\partial W}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10)$$

и может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного перемещения:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c_s^2 r_y^2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{c_s^2 r_y^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} - \frac{c_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] - \frac{c_s^2}{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] = 0. \quad (11)$$

Вводя, как и выше, следующие переменные:  $U = W/W_0$ ,  $z = x/r_y$ ,  $\tau = c_s t/r_y$ , запишем уравнение (11) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_2 \frac{\partial^5 U}{\partial z^4 \partial \tau} - \frac{a_3}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{a_2 a_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \tau} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^3 \right] = 0, \quad (12)$$

где  $a_1 = \frac{-\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_s^2}$ ,  $a_2 = \frac{c_s}{\alpha r_y}$ ,  $a_3 = \frac{c_s}{\alpha r_y}$ .

Будем искать решение уравнения (12) в классе стационарных волн:

$$U = U(\xi), \quad (13)$$

где  $\xi = z - V\tau$  — «бегущая» координата,  $V = \text{const}$  — скорость волны. При малых временах релаксации  $T \rightarrow 0$  (то есть при  $\alpha \rightarrow \infty$ ) коэффициент  $a_2 \rightarrow 0$ . Предположим, что  $\beta_1 \beta_2 \sim \alpha$ . Тогда, при подстановке (13), уравнение (12) сведется к уравнению Дурффинга [24]:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + m_1 \theta + m_2 \theta^3 = 0. \quad (14)$$

Здесь:  $\theta = \frac{dW}{d\xi}$  — угол поворота поперечного сечения балки;  $m_1 = a_1 + V^2$ ;  $m_2 = -a_3/2$ .

О возможности существования нелинейных стационарных изгибных волн можно судить по знакам коэффициентов  $m_1$  и  $m_2$ , при этом первый коэффициент всегда положителен ( $m_1 > 0$ ), а второй всегда отрицателен ( $m_2 < 0$ ).

На фазовой плоскости  $\left(\theta, \frac{d\theta}{d\xi}\right)$  уравнения (14) точка (0,0) является устойчивым положением

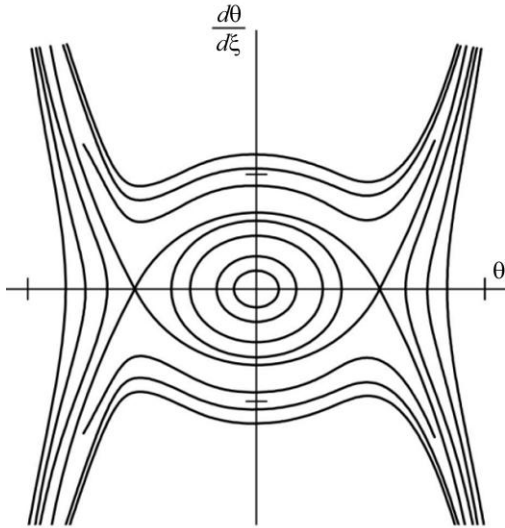


Рис. 6. Фазовый портрет нелинейного осциллятора

равновесия типа «центр», а точки  $\left(\pm\sqrt{-\frac{m_1}{m_2}}, 0\right)$  —

неустойчивые положения равновесия типа «седло» (Рис. 6). Фазовый портрет показывает, что в балке могут существовать как периодические волны (им соответствуют движения по фазовым траекториям вокруг устойчивого положения равновесия), так и уединённая стационарная волна (движение по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»).

Периодическая волна описывается эллиптическим синусом [24], форма которого близка к меандру (Рис. 7)

$$\theta = A \operatorname{sn}(k\xi, S), \quad (15)$$

где  $A$  — амплитуда волны,  $k = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}}$  —

волновое число,  $S^2 = \frac{m_2 A^2}{2m_1 + m_2 A^2}$  — квадрат модуля эллиптической функции, изменяющийся в интервале  $0 \leq S^2 \leq 1$ .

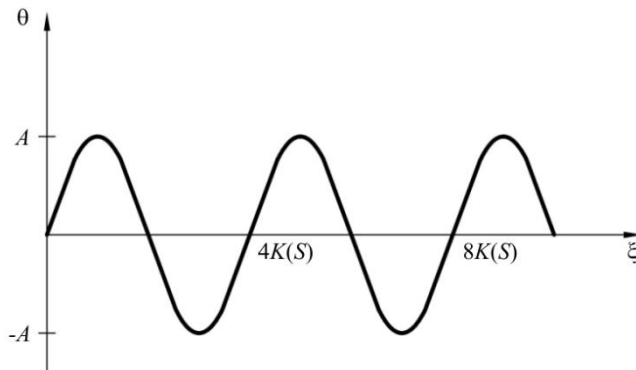


Рис. 7. Профиль нелинейной периодической стационарной волны, где  $K(S)$  — значения полного эллиптического интеграла первого рода

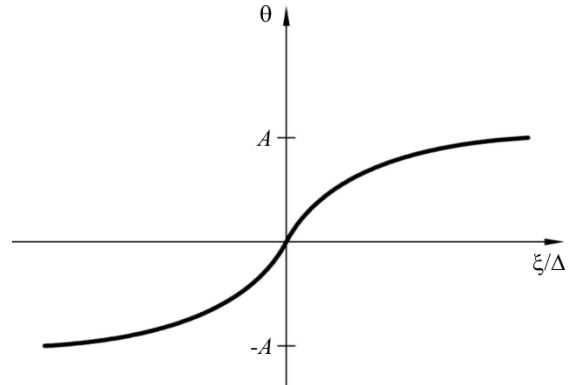


Рис. 8. Профиль нелинейной уединённой стационарной волны

Через параметры исходной задачи амплитуда и волновое число выражаются следующими соотношениями:

$$A = \sqrt{4 \left( \frac{-\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_s^2} + V^2 \right) r_y^2 \cdot S^2 / [W_0^2 (1 + S^2)]}, \quad (16)$$

$$k = \sqrt{\left( \frac{-\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_s^2} + V^2 \right) / (1 + S^2)}. \quad (17)$$

Уединенная стационарная волна имеет форму перепада (кинка) (Рис. 8) и описывается гиперболическим тангенсом:

$$\theta(\xi) = A^{(c)} \operatorname{th}(\xi/\Delta), \quad (18)$$

где  $A^{(c)}$  — амплитуда волны,  $\Delta$  — ее ширина:

$$A^{(c)} = \pm \sqrt{2 \left( -\frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_s^2} + V^2 \right) r_y^2 / W_0^2}, \quad (19)$$

$$\Delta = \sqrt{2 / \left( -\frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_s^2} + V^2 \right)}. \quad (20)$$

Из выражений (16) и (19) следует, что амплитуда периодической волны —  $A$ , и амплитуда уединенной волны —  $A^{(c)}$ , увеличиваются с ростом параметра поврежденности материала. В свою очередь, длина периодической волны  $\Lambda \sim 1/k$  (см. (17)) и ширина уединенной волны  $\Delta$  (см. (20)) с ростом параметра поврежденности уменьшаются.

Заметим, что отношение амплитуды стационарной волны к волновому числу является величиной постоянной:

$$\frac{A}{k} = \frac{2r_y S}{W_0} = \operatorname{const}, \quad (21)$$

определяемой только радиусом инерции поперечного сечения балки. Примечательно, что произведение амплитуды волны на её ширину тоже является постоянной величиной:

$$A^{(c)} \Delta = \frac{2r_y}{W_0} = \operatorname{const}. \quad (22)$$

При  $S=1$  выражения (21) и (22) тождественны, что очевидно, поскольку при этом значении эллиптический синус переходит в гиперболический тангенс. Для балки кругового поперечного сечения осевой радиус инерции равен половине радиуса. Соотношение (22) в этом случае можно переписать в виде:  $2A^{(c)} \Delta = d/W_0$ , где  $d$  — диаметр балки.

Важно, что физическая реализуемость условия  $\beta_1 \beta_2 \sim \alpha$  остается недоказанной. Однако рассмотрение этого случая позволило получить точные аналитические решения в виде соотношений (15) и (18), которые в дальнейшем можно использовать в качестве порождающих решений (первого приближения) при исследовании нелинейного уравнения (12).

## 5. Заключение

По мнению авторов данной работы, развиваемый подход, позволяющий сформулировать и решить самосогласованную задачу, включающую в себя уравнение динамики балки и кинетическое уравнение поврежденности ее материала, может найти применение при разработке методик неразрушающего акустического контроля материалов и элементов конструкций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-38-90282).

## Литература

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
3. Maugin G.A. The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge University Press, 1992. 369 p.
4. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
5. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.

6. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
7. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
8. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. М.: Физматлит, 2017. 304 с.
9. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматлит, 2016. 504 с.
10. Неразрушающий контроль: справочник: в 7 томах / Под ред. В.В. Клюева. Т. 3. Ультразвуковой контроль. М.: Машиностроение, 2004. 864 с.
11. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
12. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 554-557. (English version <https://doi.org/10.1134/S106377101004024X>)
13. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Локализация волны деформации, распространяющейся в поврежденном материале // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 6. С. 60-62. (English version <https://doi.org/10.3103/S1052618810060087>)
14. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum // Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats / Eds. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Springer, 2010. P. 143-148. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8\\_15](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8_15)
15. Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Смирнов С.И. Акустоупругость поврежденных материалов // Контроль. Диагностика. 2012. № 3. С. 24-26.
16. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // Generalized continua as models for classical and advanced materials / Eds. H. Altenbach, S. Forest. Springer, 2016. P. 413-423. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2_19)
17. Dar'enkov A.B., Plekhov A.S., Erofeev V.I. Effect of material damage on parameters of a torsional wave propagated in a deformed rotor // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. P. 86-90. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.06.722>
18. Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е. Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 14-18. (English version <https://doi.org/10.3103/S1052618816060054>)
19. Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О. Влияние поврежденности материала на распространение продольной магнитоупругой волны в стержне // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 4. С. 397-408. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.30>
20. Антонов А.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Влияние поврежденности материала на распространение волны Релея вдоль границы полупространства // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 3. С. 293-300. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.25>
21. Brikkel D.M., Erofeev V.I., Nikitina E.A. Influence of material damage on the parameters of a nonlinear longitudinal wave which spread in a rod // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 747. 012053. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012048>
22. Вибрации в технике: справочник: в 6 томах. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
23. Весницкий А.И. Избранные труды по механике. Нижний Новгород: Изд-во «Наш дом», 2010. 248 с.
24. Мусхелишвили Н.И. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.

## References

1. Kachanov L.M. *Introduction to continuum damage mechanics*. New York. Springer, 1986. 140 p.
2. Rabotnov Yu.N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969. 836 p.
3. Maugin G.A. *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992. 369 p.
4. Collins J.A. *Failure of materials in mechanical design: Analysis, prediction, prevention*. 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1993. 654 p.
5. Makhutov N.A. *Deformatsionnyye kriterii razrusheniya i raschet elementov konstruksiy na prochnost'* [Deformation criteria of fracture and calculation of construction elements for strength]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1981. 272 p.
6. Bondar' V.S. *Neuprugost'. Varianty teorii* [Inelasticity. Theory options]. Moscow, Fizmatlit, 2004. 144 p.
7. Volkov I.A., Korotkiy Yu.G. *Uraveniya sostoyaniya vyzkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of state of viscoelastic-plastic media with damage]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 424 p.
8. Volkov I.A., Igumnov L.A. *Vvedeniye v kontinual'nuyu mekhaniku povrezhdennoy sredy* [Introduction to the continuum mechanics of a damaged medium]. Moscow, Fizmatlit, 2017. 304 p.
9. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov* [Creep and durability of metals]. Moscow, Fizmatlit, 2016. 504 p.
10. Klyuyev V.V. (ed.) *Nerazrushayushchiy kontrol': spravochnik: v 7 tomakh. Tom 3. Ul'trazvukovoy kontrol'* [Nondestructive testing. Handbook in 7 volumes. Vol. 3: Ultrasound testing]. Moscow, Mashinostroyeniye, 2004. 864 p.
11. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii* [Acoustic control of equipment during its manufacture and operation]. М.: Nauka, 2009. 280 p.
12. Erofeev V.I., Nikitina E.A. The self-consistent dynamic problem of estimating the damage of a material by an acoustic method. *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, no. 4, pp. 584-587. <https://doi.org/10.1134/S106377101004024X>
13. Erofeev V.I., Nikitina E.A. Localization of a strain wave propagating in damaged material. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2010, vol. 39, pp. 559-561. <https://doi.org/10.3103/S1052618810060087>



14. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum. *Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats*, ed. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Springer, 2010. P. 143-148. [https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8\\_15](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8_15)
15. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Smirnov S.I. Acoustoelasticity of damaged materials. *Kontrol'. Diagnostika – Control. Diagnostics*, 2012, no. 3, pp. 24-26.
16. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages. *Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials*, ed. H. Altenbach, S. Forest, Springer, 2016, P. 413-423. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2\\_19](https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2_19)
17. Dar'enkov A.B., Plekhov A.S., Erofeev V.I. Effect of material damage on parameters of a torsional wave propagated in a deformed rotor. *Procedia Engineering*, 2016, vol. 150, pp. 86-90. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.06.722>
18. Erofeev V.I., Lisenkova E.E. Excitation of waves by a load moving along a damaged one-dimensional guide lying on an elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2016, vol. 45, pp. 495-499. <https://doi.org/10.3103/S1052618816060054>
19. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Malkhanov A.O. Influence of material damage on propagation of a longitudinal magnetoelastic wave in a rod. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 397-408. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.30>
20. Antonov A.M., Erofeev V.I., Leonteva A.V. Influence of material damage on Rayleigh wave propagation along half-space boundary. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 3, pp. 293-300. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.25>
21. Brikkel D.M., Erofeev V.I., Nikitina E.A. Influence of material damage on the parameters of a nonlinear longitudinal wave which spread in a rod. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2020, vol. 747, 012053. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/747/1/012048>
22. Bolotin V.V. (ed.) *Vibratsii v tekhnike: spravochnik: v 6 tomakh. T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem* [Vibrations in the technics. Handbook in 6 volumes. Vol. 1: Oscillations of linear systems]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1978. 352 p.
23. Vesnitskiy A.I. *Izbrannyye trudy po mekhanike* [Selected works on mechanics]. Nizhny Novgorod, Nash Dom, 2010. 248 p.
24. Moiseyev N.N. *Asimptoticheskiye metody nelineynoy mekhaniki* [Asymptotic methods of nonlinear mechanics]. Moscow, Nauka, 1981. 400 p.

*Поступила в редакцию 16.04.2020; после доработки 01.05.2020; принята к опубликованию 02.05.2020*

---

#### Сведения об авторах

*Бриккель Дмитрий Максимович*, асп., Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23; e-mail: archive.94@mail.ru

*Ерофеев Владимир Иванович*, дфмн, проф., дир., Институт проблем машиностроения РАН (ИПМ РАН), 603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85; e-mail: erof.vi@yandex.ru

*Леонтьева Анна Викторовна*, ктн, снс, ИПМ РАН; e-mail: aleonav@mail.ru