

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.1.8](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.1.8)

УДК 539.3 : 539.92

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ИЗНОС ДВУХСЛОЙНОГО ПОКРЫТИЯ С УЧЁТОМ ТЕПЛОТЫДЕЛЕНИЯ ОТ ТРЕНИЯ

В.Б. Зеленцов¹, Б.И. Митрин¹, Т.А. Кузнецова², В.А. Лапицкая²¹ Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация² Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова НАН Беларуси, Минск, Республика Беларусь

Применение двухслойных покрытий является одним из распространённых путей повышения работоспособности высоконагруженных узлов трения. Проектирование двухслойных покрытий и прогнозирование их эффективности в условиях сухого трения скольжения требуют разработки математических моделей скользящего контакта, учитывающих износ и разогрев вследствие трения. Для этого в статье рассматривается нестационарная квазистатическая контактная задача несвязанной термоупругости в случае скольжения с постоянной скоростью жёсткого штампа, имеющего вид полуплоскости, по поверхности двухслойного упругого покрытия, сцепленного по нижней грани с плоской недеформируемой подложкой. Во время процесса жёсткий штамп не только скользит по поверхности термоупругого покрытия, но и внедряется в него по нормали. Трение штампа о покрытие описывается законом Амонтона–Кулона. Возникающий тепловой поток от трения направлен вглубь покрытия. Фрикционный скользящий контакт приводит к изнашиванию двухслойного покрытия. Решение поставленной задачи осуществляется с помощью интегрального преобразования Лапласа, а найденные основные характеристики каждого слоя – смещения, температура, напряжения – представляются в виде контурных квадратур мероморфных функций. После анализа свойств полюсов подынтегральных функций в комплексной плоскости интегрирования, определения областей термоупругой неустойчивости в пространстве параметров задачи вычисляются контурные квадратуры. Изучено влияние параметров задачи на основные характеристики скользящего контакта – температуру, износ, напряжения. В качестве примера рассмотрено изнашивание двухслойного покрытия, верхний слой которого состоит из нитрида титана, а нижний – из титана (TiN/Ti). Численные результаты показывают, что за счёт подбора толщин слоёв можно добиться улучшения износостойкости и уменьшения контактной температуры покрытия.

Ключевые слова: износ, скользящий контакт, двухслойное покрытие, фрикционное тепловыделение, квазистатика, математическое моделирование

NON-STEADY WEAR OF A TWO-LAYER COATING TAKING INTO ACCOUNT FRICTIONAL HEATING

V.B. Zelentsov¹, B.I. Mitrin¹, T.A. Kuznetsova² and V.A. Lapitskaya²¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation² A.V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of National Academy of Science of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

The application of two-layer coatings is one of the most widely used ways to increase the performance capacity of heavily loaded frictional joints. Designing of two-layer coatings for dry sliding friction surfaces and the estimation of their efficiency require the development of mathematical models of sliding contact allowing for wear and frictional heating. To achieve this goal, we consider a transient quasi-static contact problem of uncoupled thermoelasticity of a rigid punch sliding with a constant velocity over the surface of a two-layer elastic coating bonded on its bottom face to a rigid half-plane (the substrate). During sliding, the punch penetrates the two-layer coating perpendicular to its surface. The friction between the punch and the coating surface is modelled taking into account the Coulomb friction. The heat flow generated by friction is directed into the depth of coating. The frictional sliding contact leads to wear of the two-layer coating. A solution to this problem is developed using the Laplace integral transform. As a result, the basic characteristics of each layer (displacements, stresses) are presented in the form of contour integrals of the meromorphic functions. The analysis of the properties of the integrand poles in the complex plane of integration makes it possible to evaluate contour integrals. The influence of the problem parameters on the main characteristics of the sliding contact (temperature, wear, stress) is investigated. As an example, the problem of wear of a two-layer titanium nitride/titanium (TiN/Ti) coating is considered. The numerical results show that by adjusting the coating layer thickness one can improve the wear resistance and reduce the contact temperature.

Key words: wear, sliding contact, two-layer coating, frictional heating, quasistatic, mathematical modelling

1. Введение

Одним из путей повышения работоспособности высоконагруженных узлов трения являются разного рода защитные меры, в частности, нанесение двухслойных покрытий, в которых верхний слой обеспечивает антифрикционные свойства, а нижний — несущую способность и демпфирование [1]. Эффективность такой композиции существенно зависит от применяемых материалов, а также от конструкции и соотношения геометрических размеров основных элементов. В настоящее время тонкие двухслойные и многослойные покрытия, в том числе керамические — нитридные [2, 3], оксидные [3], оксинитридные [3], карбидные [5], карбонитридные [6] и другие [7, 8], — предохраняют поверхности трения от разрушения в самых различных областях техники. Такое широкое использование связано с их высокой износостойкостью, которая обуславливается твердостью при высоких температурах, химической

инертностью, жаро- и коррозионной стойкостью. Тонкие керамические покрытия наносятся также на режущий, штамповый инструмент. Нитридные покрытия, являющиеся полупроводниковыми материалами, имеют хорошую перспективу для приложения в современных электронных устройствах.

При отработке технологии создания износостойкого покрытия необходимо, исходя из его термомеханических характеристик, осуществить прогноз эксплуатационных свойств, которые приобретёт защищаемая поверхность. Каждое использование покрытий требует тщательного анализа и баланса предъявляемых, зачастую противоречивых, требований к их эксплуатационным качествам. Наиболее эффективным средством определения оптимальных параметров является математическое моделирование, которое позволяет учесть практически любое количество защитных слоёв, осуществить подбор их физико-механических, геометрических и других параметров, наилучших с точки зрения износостойкости, минимизации разогрева от трения, недопущения нештатных ситуаций при эксплуатации, таких как термоупругая неустойчивость и резонансные явления. В последнее время появляется все больше работ, посвященных исследованию функционирования покрытий [9–25], в том числе двухслойных [9–15], при наличии тепловыделения от трения без износа [19–22] и с его учётом [23–25]. Однако теоретического исследования в двухслойной композиции свойств компонентов на износ в условиях фрикционного тепловыделения ранее не проводилось, в то время как с величиной температуры на скользящем контакте напрямую связана степень износостойкости деталей машин и инструмента [26].

В настоящей статье оценивается состояние двухслойного покрытия, подвергающегося изнашиванию от взаимодействия с жёстким штампом. Принимаются предположения недеформируемости штампа и его незначительного по сравнению с покрытием износа, что моделирует лабораторные условия проведения испытаний [27]. Процесс изнашивания покрытия сопровождается разогревом от трения. В силу того, что жёсткость нижнего слоя существенно ниже жёсткости подложки, последняя представляется как недеформируемая полуплоскость. Решение соответствующей нестационарной начально-краевой задачи с помощью интегрального преобразования Лапласа по времени сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений в трансформантах [22, 24, 25, 28, 29]. Обращение полученных трансформант осуществляется методами теории функций комплексного переменного по аналогии с работами [22, 25, 28]. Полученное решение контактной задачи позволяет подбирать параметры слоёв покрытия как для повышения его износостойкости, так и минимизации разогрева от трения.

2. Постановка задачи

Рассматривается задача изнашивания двухслойного покрытия жёстким штампом при скользящем термофрикционном контакте. Штамп в виде жёсткой полуплоскости I с постоянной скоростью V движется по поверхности двухслойного термоупругого покрытия. Верхний слой — A , сцеплен по нижней грани со слоем B , который по своей нижней грани соединён с недеформируемой подложкой II (Рис. 1).

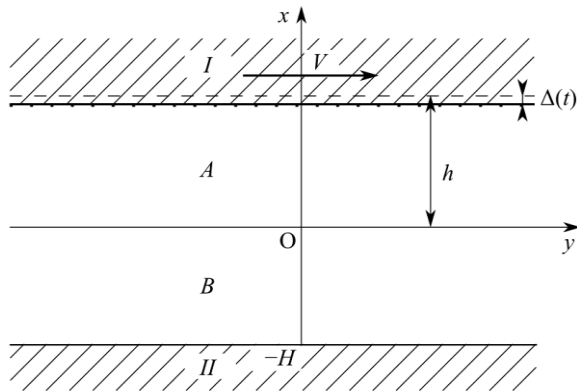


Рис. 1. Схема к постановке задачи

Одновременно с поступательным движением полуплоскость I внедряется в упругое покрытие по нормали к его поверхности. Скольжение теплоизолированной недеформируемой полуплоскости I по поверхности контакта вызывает износ и кулоновское трение, порождающее тепло. Тепловой поток, образующийся за счёт трения на контакте, направлен вглубь двухслойного покрытия. В начальный момент времени смещения и температура в слоях покрытия равны нулю.

Согласно формулировке задачи деформирования двухслойного покрытия, все основные физические характеристики упругих слоёв — температура, напряжения, смещения — не зависят от горизонтальной

координаты и являются функциями только вертикальной координаты x и времени t . Таким образом, деформирование термоупругого покрытия можно описать системой дифференциальных уравнений плоской задачи теории упругости совместно с уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}^{1,2}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}^{1,2}}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_{1,2}}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_{1,2}} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial t} = 0, \quad t > 0. \quad (2)$$

Здесь: $\sigma_{xx}(x,t)$, $\sigma_{xy}(x,t)$ — нормальные и касательные напряжения; $T(x,t)$ — температура; κ — коэффициент теплопроводности; индексами 1 и 2 обозначены характеристики верхнего A ($0 \leq x \leq h$) и нижнего B ($-H \leq x \leq 0$) слоёв покрытия соответственно.

Связь между напряжениями, смещениями и температурой устанавливают формулы Дюамеля–Неймана [30]:

$$\sigma_{xx}^{1,2} = \frac{2\mu_{1,2}(1-\nu_{1,2})}{1-2\nu_{1,2}} \frac{\partial u_{1,2}}{\partial x} - \frac{2\mu_{1,2}(1+\nu_{1,2})}{1-2\nu_{1,2}} \alpha_{1,2} T_{1,2}, \quad \sigma_{xy}^{1,2} = \mu_{1,2} \frac{\partial w_{1,2}}{\partial x}, \quad (3)$$

где $u(x,t)$, $w(x,t)$ — вертикальные и горизонтальные смещения, μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения материалов верхнего и нижнего слоёв покрытия. Подставляя (3) в (1), получим уравнения термоупругости в смещениях:

$$\frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x^2} = \frac{1+\nu_{1,2}}{1-\nu_{1,2}} \alpha_{1,2} \frac{\partial T_{1,2}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 w_{1,2}}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Граничные условия для уравнений теплопроводности (2) и термоупругости (4) запишем в следующем виде:

– механические

$$x = h: \quad u_1(h,t) = -\Delta(t) + u_w(t), \quad (5)$$

$$\sigma_{xy}^1(h,t) = -f \sigma_{xx}^1(h,t), \quad (6)$$

$$x = 0: \quad u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad \sigma_{xx}^1(0,t) = \sigma_{xx}^2(0,t), \quad (7)$$

$$w_1(0,t) = w_2(0,t), \quad \sigma_{xy}^1(0,t) = \sigma_{xy}^2(0,t), \quad (8)$$

$$x = -H: \quad u_2(-H,t) = 0, \quad (9)$$

$$w_2(-H,t) = 0; \quad (10)$$

– температурные

$$x = h: \quad K_1 \frac{\partial T_1(h,t)}{\partial x} = -Q(t), \quad (11)$$

$$x = 0: \quad T_1(0,t) = T_2(0,t), \quad K_1 \frac{\partial T_1(0,t)}{\partial x} = K_2 \frac{\partial T_2(0,t)}{\partial x}, \quad (12)$$

$$x = -H: \quad T_2(-H,t) = 0, \quad (13)$$

где $u_w(t)$ — износ покрытия, $Q(t) = -fV\sigma_{xx}^1(h,t)$ — количество тепла, образующегося на контакте вследствие трения [19], f — коэффициент трения, $\Delta(t)$ — закон внедрения полуплоскости I в упругое покрытие, K_1 , K_2 , h , H — коэффициенты теплопроводности и толщины верхнего и нижнего слоёв покрытия соответственно. Для описания износа воспользуемся линейным законом:

$$u_w(t) = -fVK^* \int_0^t \sigma_{xx}^1(h,\tau) d\tau, \quad (14)$$

где K^* — коэффициент пропорциональности между работой сил трения и количеством удалённого с поверхности контакта материала.

К дифференциальным уравнениям (2), (4) необходимо добавить нулевые начальные условия на смещения u_1 , w_2 , u_2 , w_2 , температуру T_1 , T_2 и закон внедрения $\Delta(t)$:

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = w_1(x,0) = w_2(x,0) = 0, \quad T_1(x,0) = T_2(x,0) = 0, \quad \Delta(0) = 0. \quad (15)$$

Следует заметить, что вертикальные смещения $u_{1,2}(x, t)$, нормальные напряжения $\sigma_{xx}^{1,2}(x, t)$ и температура $T_{1,2}(x, t)$ в слоях покрытия не зависят от горизонтальных смещений $w_{1,2}(x, t)$. Горизонтальные смещения определяются из второго уравнения в (4), второго уравнения в (3), граничных (6), (8), (10) и начальных условий (15) через нормальные напряжения $\sigma_{xx}^1(h, t)$.

3. Метод решения. Основные формулы решения

Решение квазистатической начально-краевой задачи (1)–(15) строится с помощью интегрального преобразования Лапласа [31]. В результате получается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно неизвестных трансформант $u_{1,2}^L(x, z)$, $T_{1,2}^L(x, z)$, $w_{1,2}^L(x, z)$. После их нахождения и обращения по Лапласу искомые решения поставленной задачи записываются в виде свёрток Лапласа:

$$T_1(x, t) = \frac{1-v_1}{1+v_1} \frac{\hat{V}}{\alpha_1 h} \int_0^t \Delta(\tau) f_{T_1} \left(x, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (16)$$

$$u_1(x, t) = -\frac{\lambda M_* + xh^{-1}}{\lambda M_* + 1} \Delta(t) - \int_0^t \Delta(\tau) f_{u_1} \left(x, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (17)$$

$$\sigma_{xx}^1(x, t) = -\frac{2\mu_1(1-v_1)}{(1-2v_1)h} \left(\frac{\Delta(t)}{\lambda M_* + 1} + \int_0^t \Delta(\tau) f_{\sigma_1} \left(x, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right), \quad 0 \leq x \leq h, \quad (18)$$

$$T_2(x, t) = \frac{1-v_1}{1+v_1} \frac{\hat{V}}{\alpha_1 h} \int_0^t \Delta(\tau) f_{T_2} \left(x, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad -H \leq x \leq 0, \quad (19)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{M_*(\lambda + xh^{-1})}{\lambda M_* + 1} \Delta(t) - \int_0^t \Delta(\tau) f_{u_2} \left(x, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad -H \leq x \leq 0, \quad (20)$$

$$\sigma_{xx}^2(x, t) = -\frac{2\mu_1(1-v_1)}{(1-2v_1)h} \left(\frac{\Delta(t)}{\lambda M_* + 1} + \int_0^t \Delta(\tau) f_{\sigma_2} \left(x, \frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau \right), \quad -H \leq x \leq 0, \quad (21)$$

$$u_w(t) = \hat{V} k_w \int_0^t \Delta(\tau) f_w \left(\frac{t-\tau}{t_k} \right) d\tau, \quad (22)$$

в которых

$$f_a(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_a(x, z)}{t_k R(z)} e^{z t} dz, \quad a = T_{1,2}, u_{1,2}, \sigma_{1,2}, \quad f_w(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{N_w(z)}{t_k R(z)} e^{z t} dz, \quad (23)$$

где $\Gamma = \{\zeta : -i\infty + dt_k, i\infty + dt_k\}$ — контур интегрирования, в котором значение d подбирается таким образом, чтобы все изолированные особые точки подынтегральных функций в (16)–(22) лежали левее Γ . Подынтегральные функции в (23) задаются формулами

$$R(z) = (\lambda M_* + 1) z r(h, z) - \hat{V} \left((1 - k_w) r(h, z) + \left(\frac{K_*}{\kappa_* L_*} - 1 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} - \frac{K_*}{\kappa_* L_*} \right), \quad (24)$$

$$r(x, z) = \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} + K_* \kappa_*^{-1/2} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{sh} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}}, \quad (25)$$

$$N_{T_1}(x, z) = \sqrt{z} \left(\operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} + K_* \kappa_*^{-1/2} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{sh} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} \right),$$

$$N_{u_1}(x, z) = N_{u_1}^0(x, z) - \frac{\lambda M_* + xh^{-1}}{\lambda M_* + 1} R(z), \quad N_{u_2}(x, z) = N_{u_2}^0(x, z) - \frac{M_*(\lambda + xh^{-1})}{\lambda M_* + 1} R(z),$$

$$N_{\sigma_1}(x, z) = N_{\sigma_1}^0(x, z) - (\lambda M_* + 1)^{-1} R(z), \quad N_{\sigma_2}(x, z) = N_{\sigma_2}^0(x, z) - (\lambda M_* + 1)^{-1} R(z),$$

$$N_{u_1}^0(x, z) = \left(\lambda M_* + \frac{x}{h} \right) z r(h, z) - \hat{V} \left(r(x, z) + \left(\frac{K_*}{\kappa_* L_*} - 1 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} - \frac{K_*}{\kappa_* L_*} \right),$$

$$N_{T_2}^0(x, z) = \sqrt{z} \left(\operatorname{sh} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} + \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_* \lambda \sqrt{z}} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \right),$$

$$N_{u_2}^0(x, z) = M_* \left(\lambda + \frac{x}{h} \right) z r(h, z) - \frac{K_*}{\kappa_* L_*} \hat{V} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\kappa_*} \sqrt{z} \frac{x}{h} \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_*} \lambda \sqrt{z} + \operatorname{sh} \sqrt{\kappa_*} \sqrt{z} \frac{x}{h} \operatorname{sh} \sqrt{\kappa_*} \lambda \sqrt{z} - 1 \right),$$

$$N_{\sigma_1}^0(x, z) = N_{\sigma_2}^0(x, z) = z r(h, z), \quad N_w(z) = r(h, z),$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{t_\kappa}, \quad t_\kappa = \frac{h^2}{\kappa_1}, \quad \hat{V} = \frac{fV\alpha_1}{K_1} \frac{2\mu_1(1+\nu_1)h}{1-2\nu_1}, \quad k_w = \frac{(1-\nu_1)K_1K_*}{(1+\nu_1)\alpha_1\kappa_1}, \quad (26)$$

$$\lambda = \frac{H}{h}, \quad M_* = \frac{M_1}{M_2}, \quad L_* = \frac{L_1}{L_2}, \quad K_* = \frac{K_1}{K_2}, \quad \kappa_* = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}, \quad M_{1,2} = \frac{2\mu_{1,2}(1-\nu_{1,2})}{1-2\nu_{1,2}}, \quad L_{1,2} = \frac{1+\nu_{1,2}}{1-\nu_{1,2}} \alpha_{1,2}.$$

Таким образом, решение поставленной в разделе 2 задачи свелось к вычислению в (16)–(22) следующих квадратур: $T_{1,2}(x, t)$, $u_{1,2}(x, t)$, $\sigma_{xx}^{1,2}(x, t)$, $u_w(t)$. Использование методов теории функций комплексной переменной для вычисления квадратур позволяет представить решение рассматриваемой задачи в виде сумм по полюсам подынтегральных функций, являющихся нулями функции $R(z)$ из (24).

Горизонтальные смещения $w_{1,2}(x, t)$ определяются интегрированием второго уравнения в (4) и с учётом условий (6), (8), (10) выражаются через контактные напряжения $\sigma_{xx}^1(h, t)$ как

$$w_1(x, t) = -f\mu_1^{-1}(x + HM_*)\sigma_{xx}^1(h, t), \quad w_2(x, t) = -f\mu_2^{-1}(x + H)\sigma_{xx}^1(h, t). \quad (27)$$

Отметим, что при $H = 0$ формулы (16)–(18), (22), (27) сводятся к выражениям, полученным ранее другими авторами для случая изнашивания однослойного покрытия (см. [24]), но при условии, что в [24] $Bi \rightarrow \infty$, где Bi — число Био.

4. Особые точки подынтегральных функций в комплексной плоскости

Полюсы подынтегральных функций в (16)–(22) совпадают с нулями $R(z)$ из (24), за исключением тех нулей $R(z)$, которые являются устранимыми особыми точками подынтегральных функций. Для отыскания нулей $R(z)$ в комплексной плоскости $z = \xi + i\eta$ решается уравнение:

$$R(z) = (\lambda M_* + 1) z r(h, z) - \hat{V} \left((1 - k_w) r(h, z) + \left(\frac{K_*}{\kappa_* L_*} - 1 \right) \operatorname{ch} \sqrt{\kappa_*} \lambda \sqrt{z} - \frac{K_*}{\kappa_* L_*} \right) = 0. \quad (28)$$

Как видим, нули $R(z)$ зависят от $r(x, z)$ (см. (25)) и семи безразмерных параметров задачи: \hat{V} , k_w , λ , M_* , K_* , κ_* , L_* , определяемых по формулам (26). При исследовании поведения нулей $R(z)$ из (28) при фиксированных значениях k_w , λ , M_* , K_* , κ_* , L_* и переменном параметре \hat{V} , который изменяется от 0 до ∞ , использовался опыт авторов работ [23, 24].

5. Эффективные формулы решения задачи

С учётом поведения подынтегральных функций (23) на бесконечности, их мероморфности в комплексной плоскости и в предположении, что все полюсы ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) подынтегральных функций в (23) однократные, с помощью методов теории функций комплексного переменного [32] имеем

$$f_a(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_a(x, \zeta_k) \exp(\zeta_k t), \quad B_a(x, z) = \frac{N_a(x, z)}{t_\kappa R'(z)}, \quad (29)$$

где полюсы ζ_k даются общим списком, упорядоченным по модулю: $|\zeta_0| < |\zeta_1| \leq \dots \leq |\zeta_k| \leq \dots$.

Подставляя формулы (29) в (16)–(22), получим новые выражения для решения задачи — в виде рядов по полюсам:

$$T_1(x, t) = \frac{1-\nu_1}{1+\nu_1} \frac{\hat{V}}{\alpha_1 h} \sum_{k=0}^{\infty} B_{T_1}(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad (30)$$

$$u_1(x, t) = -\frac{\lambda M_* + xh^{-1}}{\lambda M_* + 1} \Delta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} B_{u_1}(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad 0 \leq x \leq h, \quad (31)$$

$$T_2(x, t) = \frac{1 - \nu_1}{1 + \nu_1} \frac{\hat{V}}{\alpha_1 h} \sum_{k=0}^{\infty} B_{T_2}(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad -H \leq x \leq 0, \quad (32)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{M_*(\lambda + xh^{-1})}{\lambda M_* + 1} \Delta(t) - \sum_{k=0}^{\infty} B_{u_2}(x, \zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad -H \leq x \leq 0, \quad (33)$$

$$u_w(t) = \hat{V} k_w \sum_{k=0}^{\infty} B_w(\zeta_k) D(\zeta_k, t), \quad B_w(z) = \frac{N_w(z)}{t_k R'(z)}, \quad (34)$$

в которых $D(z, t) = \int_0^t \Delta(\tau) \exp\left(z \frac{t-\tau}{t_k}\right) d\tau$.

Отметим, что напряжения в рассматриваемой задаче не зависят от вертикальной координаты x , поэтому

$$\sigma_{xx}^{1,2}(x, t) = \sigma_{xx}(t), \quad -H \leq z \leq h,$$

и формула для их вычисления принимает вид:

$$\sigma_{xx}(t) = -\frac{2\mu_1(1-\nu_1)}{(1-2\nu_1)h} \left(\frac{\Delta(t)}{\lambda M_* + 1} + \sum_{k=0}^{\infty} B_{\sigma}(\zeta_k) D(\zeta_k, t) \right), \quad B_{\sigma}(z) = \frac{N_{\sigma}(h, z)}{t_k R'(z)}, \quad -H \leq x \leq h. \quad (35)$$

Формулы (30)–(35) позволяют проанализировать устойчивость решения задачи [22, 24, 25, 33]. В предположении, что функция $\Delta(t)$ является ограниченной на $t \in (0, \infty)$, и при условии существования хотя бы одного полюса ζ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) с $\text{Re}(\zeta_k) > 0$ справедливо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(\zeta_k, t) = \begin{cases} \infty & \text{при } \text{Im}(\zeta_k) = 0, \\ \text{не существует} & \text{при } \text{Im}(\zeta_k) \neq 0, \end{cases}$$

и полученные решения неустойчивы. С механической точки зрения в этом случае наступает термоупругая неустойчивость скользящего контакта [22, 24]. Характер поведения решений задачи термоупругого износа однослойного покрытия при термоупругой неустойчивости рассматривался ранее в [28].

6. Численные результаты

Численный анализ полученных решений рассматриваемой задачи осуществлялся с помощью формул: (30) — для температуры $T_1(x, t)$, (34) — для износа $u_w(t)$, (35) — для напряжений $\sigma_{xx}(t)$. Максимальный уровень проседания жёсткой полуплоскости I в упругое покрытие задавался параметром Δ_0 , а закон её внедрения $\Delta(t)$, состоящий из активной фазы на временном интервале $0 < t < t_\varepsilon$ и пассивной фазы на интервале $t_\varepsilon < t < \infty$, описывался формулой:

$$\Delta(t) = \Delta_0 \left(t_\varepsilon^{-1} t H(t_\varepsilon - t) + H(t - t_\varepsilon) \right), \quad t > 0, \quad (36)$$

где t_ε — время окончания активного участка внедрения, $H(t)$ — функция Хевисайда. Процесс изнашивания покрытия на величину Δ_0 считался завершённым в момент времени t_w , когда $u_w(t_w) = \Delta_0$.

Распространённым на практике материалом для износостойкой защиты является нитрид титана (TiN). Современные методы нанесения позволяют создавать под слоем из него слой металлического титана различной толщины [2]. Влияние соотношения толщин верхнего и нижнего слоёв покрытия на характеристики его изнашивания можно видеть на рисунке 2, где даны графики изменения во времени основных характеристик скользящего контакта: напряжений $p(t) = -\sigma_{xx}(t)$, температуры на контакте с деформирующим элементом $T(t) = T_1(h, t)$, износа $u_w(t)$. Термомеханические параметры материала верхнего слоя A соответствуют нитриду титана: $\mu_1 = 100,4$ ГПа, $\nu_1 = 0,25$, $\kappa_1 = 6,11 \cdot 10^{-6}$ м²/с,

$\alpha_1 = 9,35 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $K_1 = 19,2$ Вт/(м·К), $f = 0,84$, $K^* = 1,94 \cdot 10^{-5}$ мм³/(Н·м) (значения параметров f и K^* взяты из работы [27]); параметры материала нижнего слоя B отвечают титану: $\mu_2 = 44,0$ ГПа, $\nu_2 = 0,32$, $\kappa_2 = 8,99 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\alpha_2 = 8,60 \cdot 10^{-6}$ 1/К, $K_2 = 21,9$ Вт/(м·К); другие характеристики следующие: скорость скольжения $V = 5,0$ мм/с, параметры закона внедрения $t_\varepsilon = 10$ с, $\Delta_0 = 0,2$ мкм, общая толщина покрытия $h + H = 20$ мкм. На рисунке 2 номера кривых соответствуют различным значениям параметра λ , задающего отношение толщин нижнего и верхнего слоёв покрытия:

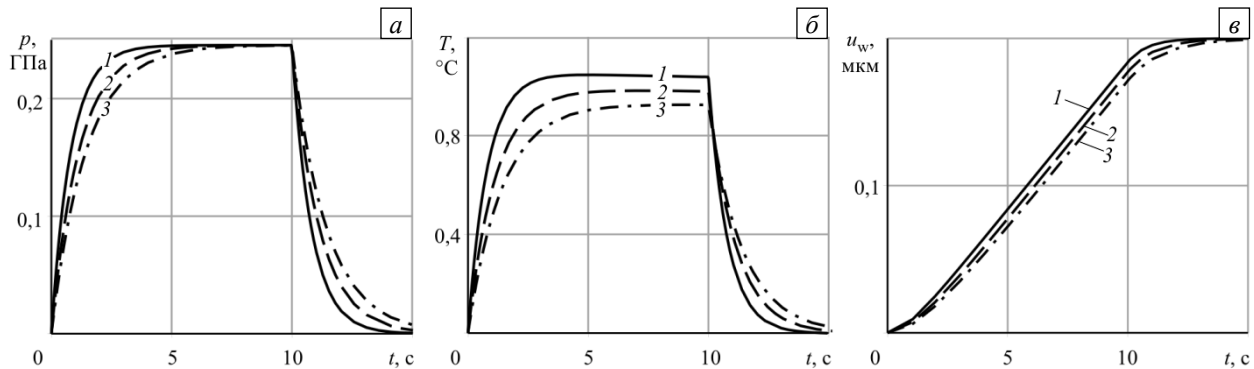


Рис. 2. Основные характеристики скользящего контакта при изнашивании двухслойного покрытия для различных значений параметра λ : 0,00 (кривая 1), 0,33 (2), 19,00 (3); контактные давления $p(t)$ (а), температура на контакте $T(t)$ (б), износ покрытия $u_w(t)$ (в)

В таблице для различных значений толщин верхнего (h) и нижнего (H) слоёв покрытия приведены значения относительной толщины нижнего слоя λ , времени износа покрытия t_w и наибольшей температуры на контакте $T_\lambda^* = \max T(h, t)$, $t \in (0, t_w]$. Рисунок 2 и таблица показывают, что с увеличением толщины нижнего слоя покрытия увеличивается время износа (то есть замедляется изнашивание покрытия) и падает относительная контактная температура T_λ^*/T_0^* (то есть уменьшается разогрев от трения на контакте).

Таблица. Значения основных характеристик процесса изнашивания двухслойного покрытия при различных значениях толщин верхнего и нижнего слоёв покрытия

h , мкм	H , мкм	λ	t_w , с	T_λ^*/T_0^*
20	0	0,00	11,7	1,00
15	5	0,33	12,3	0,97
10	10	1,00	12,8	0,94
5	15	3,00	13,4	0,91
1	19	19,00	13,9	0,88

7. Заключение

В результате теоретического исследования износостойкости двухслойного покрытия с учётом его разогрева вследствие трения, создаваемого скользящим по его поверхности жёстким штампом, установлена связь параметров процесса с толщиной нижнего слоя. Она влияет:

- на износостойкость двухслойного покрытия в целом;
- на температуру разогрева контакта слоёв.

Полученное решение контактной задачи может быть использовано для подбора толщины наносимых слоёв с целью улучшения износостойкости и уменьшения разогрева от трения в высоконагруженных узлах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-57-00015-Бел_а) и БелРФФИ (проект № Ф18Р-239).

Литература

1. Колесников В.И., Иваночкин П.Г. Двухслойные композиции триботехнического назначения для тяжело нагруженных узлов трения. Ростов-н/Д: РГУПС, 2009. 124 с.

2. Liu L., Shen H.H., Liu X.Z., Guo Q., Meng T.X., Wang Z.X., Yang H.J., Liu X.P. Wear resistance of TiN(Ti₂N)/Ti composite layer formed on C17200 alloy by plasma surface Ti-alloying and nitriding // *Appl. Surf. Sci.* 2016. Vol. 388. P. 103-108. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2016.03.059>
3. Shi C.-M., Wang T.-G., Pei Z.-L., Gong J., Sun C. Effects of the thickness ratio of CrN vs Cr₂O₃ layer on the properties of double-layered CrN/Cr₂O₃ coatings deposited by arc ion plating // *J. Mater. Sci. Tech.* 2014. Vol. 30. P. 473-479. <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2014.01.007>
4. Zhang J., Sun K., Wang J., Tian B., Wang H., Yin Y. Sliding wear behavior of plasma sprayed Fe₃Al–Al₂O₃ graded coatings // *Thin Solid Films.* 2008. Vol. 516. P. 5681-5685. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2007.07.126>
5. Murray J.W., Cook R.B., Senin N., Algodí S.J., Clare A.T. Defect-free TiC/Si multi-layer electrical discharge coatings // *Mater. Des.* 2018. Vol. 155. P. 352-365. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.06.019>
6. Sharifahmadian O., Mahboubi F. A comparative study of microstructural and tribological properties of N-DLC/DLC double layer and single layer coatings deposited by DC-pulsed PACVD process // *Ceram. Int.* 2019. Vol. 45. P. 7736-7742. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.01.076>
7. Фельдштейн Е.Э., Девойно О.Г., Кардаполова М.А., Луцко Н.И., Журек Д., Михальски М. Трибологические характеристики композиционных покрытий, сформированных лазерной наплавкой порошков никелевого самофлюсующегося сплава и бронзы // *Трение и износ.* 2016. Т. 37, № 5. С. 588-596. (English version <https://doi.org/10.3103/S1068366616050056>)
8. Козарез И.В., Михальченко М.А., Лавров В.И., Синяя Н.В. Повышение абразивной износостойкости деталей варьированием техники наплавки двухслойных покрытий с твердой поверхностью // *Тракторы и сельхозмашины.* 2016. № 10. С. 38-40.
9. Иваночкин П.Г., Колесников В.И., Флек Б.М., Чебаков М.И. Контактная прочность двухслойного покрытия при наличии сил трения в области контакта // *Изв. РАН. МТТ.* 2007. № 1. С. 183-192. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654407010190>)
10. Горячева И.Г., Торская Е.В. Моделирование контактно-усталостного разрушения двухслойного упругого основания // *Изв. РАН. МТТ.* 2008. № 3. С. 132-144. (English version <https://doi.org/10.3103/S002565440803014X>)
11. Азоян А.И., Иваночкин П.Г. Плоская контактная задача для тонкой двухслойной упругой полосы при неполном сцеплении слоев с учетом тепловыделения в зоне контакта // *Современные проблемы механики сплошной среды: тр. XVIII Междунар. конф., Ростов-на-Дону, 7-10 ноября 2016 г. Ростов-н/Д: Изд-во ЮФУ, 2016. С. 20-24.*
12. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer // *Mater. Phys. Mech.* 2018. Vol. 35. P. 175-180. https://doi.org/10.18720/MPM.3512018_20
13. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Torsion of an elastic transversely isotropic half-space with a coating reinforced by a functionally graded interlayer // *Proc. of the 11th Int. Conf. "Shell structures: Theory and applications". SSTA 2017, Gdansk, Poland, October 11-13, 2017. Vol. 4. P. 185-188. <https://doi.org/10.1201/9781315166605-39>*
14. Yilmaz K.B., Comez I., Yildirim B., Guler M.A., El-Borgi S. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch // *Int. J. Mech. Sci.* 2018. Vol. 141. P. 127-142. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.041>
15. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Litvinenko A.N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch // *Mater. Phys. Mech.* 2018. Vol. 40. P. 254-260. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_14
16. Гольдштейн Р.В., Устинов К.Б., Ченцов А.В. Оценка влияния податливости подложки на напряжения, вызывающие потерю устойчивости отслоившегося покрытия // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2011. Т. 4, № 3. С. 48-57. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.3.26>
17. Kudish I., Pashkovski E., Volkov S.S., Vasiliev A. S., Aizikovich S.M. Heavily loaded line EHL contacts with thin adsorbed soft layers // *Math. Mech. Solid.* 2020. Vol. 25. P. 1011-1037. <https://doi.org/10.1177/1081286519898878>
18. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Sadyrin E.V. Contact problem on indentation of an elastic half-plane with an inhomogeneous coating by a flat punch in the presence of tangential stresses on a surface // *AIP Conf. Proc.* 2018. Vol. 1959. 070037. <https://doi.org/10.1063/1.5034712>
19. Бабешко В.А., Ворович И.И. К расчету контактных температур, возникающих при вращении вала в подшипнике // *ПМТФ.* 1968. № 2. С. 135-137. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00913191>)
20. Лифанов И.К., Саакян А.В. Метод численного решения задачи о вдавлении движущегося штампа в упругую полуплоскость с учётом тепловыделения // *ПММ.* 1982. Т. 46, № 3. С. 494-501. (English version [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90117-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90117-4))
21. Ворович И.И., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Задача термоупругости о движущемся штампе при учете тепловыделения от трения // *ПММ.* 1994. Т. 58, № 3. С. 161-166. (English version [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(94\)90103-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90103-1))
22. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И. Термоупругая неустойчивость в связанной квазистатической задаче термоупругости о скользящем контакте с разогревом от трения // *Изв. РАН. МТТ.* 2019. № 1. С. 72-87. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654419010059>)
23. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // *Трение и износ.* 1992. Т. 13, № 1. С. 154-160.
24. Евтушенко А.А., Пырьев Ю.А. Влияние изнашивания на развитие термоупругой неустойчивости фрикционного контакта // *Изв. РАН. МТТ.* 1997. № 1. С. 114-121.
25. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A., Kudish I.I. Diagnostics of wear thermoelastic instability based on sliding contact parameter monitoring // *IMA J. Appl. Math.* 2019. Vol. 84. P. 345-365. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxy061>
26. Аль-Эхари Х., Аль-Дулайми К.Ю., Вархолински Б., Кузнецова Т.А. Взаимосвязь температуры поверхности и трибологических характеристик защитного покрытия на инструменте // *Трение и износ.* 2019. Т. 40, № 5. С. 623-630. (English version <https://doi.org/10.3103/S1068366619060229>)
27. Broszeit E., Matthes B., Herr W., Kloos K.H. Tribological properties of r.f. sputtered Ti–B–N coatings under various pin-on-disc wear test conditions // *Surf. Coating Tech.* 1993. Vol. 58. P. 29-35. [https://doi.org/10.1016/0257-8972\(93\)90171-J](https://doi.org/10.1016/0257-8972(93)90171-J)

28. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Лубягин И.А. Влияние износа на фрикционный разогрев и возникновение термоупругой неустойчивости скользящего контакта // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 430-442. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.36>
29. Вестяк А.В., Игумнов Л.А., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на тонкую сферическую оболочку с упругим наполнителем // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 443-452. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37>
30. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
31. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.
32. Гурвиц А., Курант П. Теория функций. М.: Наука, 1968. 648 с.
33. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 331 с.

References

1. Kolesnikov V.I., Ivanochkin P.G. *Dvukhsloynnye kompozitsii tribotekhnicheskogo naznacheniya dlya tyazhelonagruzhennykh uzlov treniya* [Bilayered composites of tribotechnical purposes for heavily loaded frictional joints]. Rostov-on-Don, RGUPS, 2009. 124 p.
2. Liu L., Shen H.H., Liu X.Z., Guo Q., Meng T.X., Wang Z.X., Yang H.J., Liu X.P. Wear resistance of TiN(Ti₂N)/Ti composite layer formed on C17200 alloy by plasma surface Ti-alloying and nitriding. *Appl. Surf. Sci.*, 2016, vol. 388, pp. 103-108. <https://doi.org/10.1016/j.apsusc.2016.03.059>
3. Shi C.-M., Wang T.-G., Pei Z.-L., Gong J., Sun C. Effects of the thickness ratio of CrN vs Cr₂O₃ layer on the properties of double-layered CrN/Cr₂O₃ coatings deposited by arc ion plating. *J. Mater. Sci. Tech.*, 2014, vol. 30, pp. 473-479. <https://doi.org/10.1016/j.jmst.2014.01.007>
4. Zhang J., Sun K., Wang J., Tian B., Wang H., Yin Y. Sliding wear behavior of plasma sprayed Fe₃Al–Al₂O₃ graded coatings. *Thin Solid Films*, 2008, vol. 516, pp. 5681-5685. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2007.07.126>
5. Murray J.W., Cook R.B., Senin N., Algodí S.J., Clare A.T. Defect-free TiC/Si multi-layer electrical discharge coatings. *Mater. Des.*, 2018, vol. 155, pp. 352-365. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.06.019>
6. Sharifahmadian O., Mahboubi F. A comparative study of microstructural and tribological properties of N-DLC/DLC double layer and single layer coatings deposited by DC-pulsed PACVD process. *Ceram. Int.* 2019, vol. 45, pp. 7736-7742. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2019.01.076>
7. Feldshtein E.E., Devojno O.G., Kardapolava M.A., Lutsko N.I., Žurek D., Michalski M. Tribological characteristics of composite coatings formed by laser cladding of powders of nickel self-fluxing alloy and bronze. *J. Frict. Wear*, 2016, vol. 37, pp. 454-461. <https://doi.org/10.3103/S1068366616050056>
8. Kozarez I.V., Mikhal'chenkova M.A., Lavrov V.I., Sinyaya N.V. Increase of abrasive wear resistance of parts by means of variation of welding technique of double-layer coatings with hard surface. *Traktory i sel'khoz mashiny – Tractors and Agricultural Machinery*, 2016, no. 10, pp. 38-40.
9. Ivanochkin P.G., Kolesnikov V.I., Flek B.M., Chebakov M.I. Contact strength of a two-layer covering under friction forces in the contact region. *Mech. Solids*, 2007, vol. 42, pp. 157-165. <https://doi.org/10.3103/S0025654407010190>
10. Goryacheva I.G., Torskaya E.V. Modeling the contact wear fracture of a two-layer basement. *Mech. Solids*, 2008, vol. 43, pp. 426-436. <https://doi.org/10.3103/S002565440803014X>
11. Azojan A.I., Ivanochkin P.G. *The XVIIIth Int. Conf. "Current problems of continuum mechanics", 7-10 November 2016, Rostov-on-Don, Southern Federal University, 2016. Pp. 20-24.*
12. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. Approximated analytical solution of contact problem on indentation of elastic half-space with coating reinforced with inhomogeneous interlayer. *Mater. Phys. Mech.*, 2018, vol. 35, pp. 175-180. https://doi.org/10.18720/MPM.3512018_20
13. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M. *Proc. of the 11th Int. Conf. "Shell structures: Theory and applications". SSTA 2017, Gdansk, Poland, October 11-13, 2017. Vol. 4. P. 185-188.* <https://doi.org/10.1201/9781315166605-39>
14. Yilmaz K.B., Comez I., Yildirim B., Guler M.A., El-Borgi S. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch. *Int. J. Mech. Sci.*, 2018, vol. 141, pp. 127-142. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.03.041>
15. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Litvinenko A.N. Indentation of an elastic half-space reinforced with a functionally graded interlayer by a conical punch. *Mater. Phys. Mech.*, 2018, vol. 40, pp. 254-260. https://doi.org/10.18720/MPM.4022018_14
16. Goldstein R.V., Ustinov K.B., Chentsov A.V. Influence of substrate compliance on stresses generating stability loss of a delaminated coating. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2011, vol. 4, no. 3, pp. 48-57. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2011.4.3.26>
17. Kudish I., Pashkovski E., Volkov S.S., Vasiliev A. S., Aizikovich S.M. Heavily loaded line EHL contacts with thin adsorbed soft layers. *Math. Mech. Solid.*, 2020, vol. 25, pp. 1011-1037. <https://doi.org/10.1177/1081286519898878>
18. Volkov S.S., Vasiliev A.S., Aizikovich S.M., Sadyrin E.V. Contact problem on indentation of an elastic half-plane with an inhomogeneous coating by a flat punch in the presence of tangential stresses on a surface. *AIP Conf. Proc.*, 2018, vol. 1959, 070037. <https://doi.org/10.1063/1.5034712>
19. Babeshko V.A., Vorovich I.I. Calculation of contact temperatures generated by the rotation of a shaft in a bearing. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1968, vol. 9, pp. 221-222. <https://doi.org/10.1007/BF00913191>
20. Lifanov I.K., Saakian A.V. Method of numerical solution of the problem of impressing a moving stamp into an elastic half-plane, taking heat generation into account. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, pp. 388-394. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90117-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90117-4)

21. Vorovich I.I., Pozharskii D.A., Chebakov M.I. The thermoelasticity of a moving punch when the heat release from friction is taken into account. *J. Appl. Math. Mech.*, 1994, vol. 58, pp. 539-544. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(94\)90103-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90103-1)
22. Zelentsov V.B., Mitrin B.I. Thermoelastic instability in the quasi-static coupled thermoelasticity problem dealt with the sliding contact with frictional heating. *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, pp. 58-69. <https://doi.org/10.3103/S0025654419010059>
23. Alexandrov V.M., Annakulova G.K. Interaction between coatings of a body with deformation, wear, and heat release due to friction. *Soviet J. Frict. Wear*, 1992, vol. 13, no. 1, pp. 154-160.
24. Evtushenko A.A., Pyr'yev Yu.A. Vliyaniye iznashivaniya na razvitiye termouprugoy neustoychivosti friktsionnogo kontakta [Influence of wear on the development of thermoelastic instability of a frictional contact]. *Izv. RAN. MTT – Mechanics of Solids*, 1997, no. 1, pp. 114–121.
25. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A., Kudish I.I. Diagnostics of wear thermoelastic instability based on sliding contact parameter monitoring. *IMA J. Appl. Math.*, 2019, vol. 84, pp. 345-365. <https://doi.org/10.1093/imamat/hxy061>
26. Al-Ethari H., Al-Dulaimi K.Y., Warcholinski B., Kuznetsova T.A. Interrelation of surface temperature and tribological characteristics of a protective coating on a tool. *J. Frict. Wear*, 2019, vol. 40, pp. 603-608. <https://doi.org/10.3103/S1068366619060229>
27. Broszeit E., Matthes B., Herr W., Kloos K.H. Tribological properties of r.f. sputtered Ti–B–N coatings under various pin-on-disc wear test conditions. *Surf. Coating Tech.*, 1993, vol. 58, pp. 29-35. [https://doi.org/10.1016/0257-8972\(93\)90171-J](https://doi.org/10.1016/0257-8972(93)90171-J)
28. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Lubyagin I.A. Effect of wear on frictional heating and thermoelastic instability of sliding contact. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 430-442. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.36>
29. Vestyak A.V., Igumnov L.A., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The influence of non-stationary pressure on a thin spherical shell with an elastic filler. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 4, pp. 443-452. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.4.37>
30. Kovalenko A.D. *Thermoelasticity: Basic Theory and Applications*. Groningen, Wolters-Noordhoff, 1970. 251 p.
31. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operatsionnoye ischisleniye* [Operational calculus]. Moscow, Vishaya shkola, 1975. 407 p.
32. Hurwitz A., Courant R. *Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen* [Lectures on general function theory and elliptic functions]. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1964. 706 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00750-1>
33. Pontryagin L.S. *Ordinary Differential Equations*. Pergamon, 1962. 304 p.

Поступила в редакцию 18.04.2020; после доработки 23.04.2020; принята к опубликованию 24.04.2020

Сведения об авторах

Зеленцов Владимир Борисович, кфмн, снс, Донской государственный технический университет (ДГТУ), г. Ростов-на-Дону, 344003, пл. Гагарина, д. 1; e-mail: vbzelen@gmail.com

Митрин Борис Игоревич, кфмн, снс, ДГТУ; e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru

Кузнецова Татьяна Анатольевна, ктн, доц., зам.зав.лаб., Институт тепло- и массообмена имени А.В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси (ИТМО НАН Беларуси), Республика Беларусь, г. Минск, 220072, ул. П. Бровки, д. 15; e-mail: t_kuzn@hmti.ac.by

Лапцкая Василина Александровна, б/с, нс, ИТМО НАН Беларуси; e-mail: vasilinka.92@mail.ru