

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.1.4](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.1.4)

УДК 519.3

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ КОРУНДОСОДЕРЖАЩЕЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ С РАЗНОМАСШТАБНЫМИ ПОРАМИ

А.Б. Кудимова, А.В. Наседкин

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

Рассматриваются задачи гомогенизации для определения эффективных модулей керамоматричных пьезокомпозиатов с учетом разномасштабной пористости. Полагается, что пьезокомпозит состоит из пьезокерамической матрицы, более жестких упругих корундовых включений и пор. Применяются две модели пористости: для микропор и для мезопор. Микропорами называются распределенные в пьезокерамике поры с размерами, много меньшими размеров включений, а мезопорами – поры, сравнимые по размерам с включениями. Мезопоры в совокупности считаются отдельной фазой пьезокомпозита. При наличии микропористости задача гомогенизации решается на двух масштабных уровнях. Вначале вычисляются эффективные модули для микропористой пьезокерамики, в которой микропоры выступают как отдельная фаза двухфазного пьезокомпозита без включений, а затем реализуется задача гомогенизации для общего случая, то есть для трехфазного композита из микропористой пьезокерамики, включений и, возможно, мезопор. Для решения задач гомогенизации использован метод эффективных модулей в стандартной формулировке, метод конечных элементов и вычислительный комплекс ANSYS. Разработаны конечно-элементные модели представительных объемов 3-0 связности (для двухфазных композитов) и 3-0-0 связности (для трехфазных композитов) с изолированными включениями и порами. Полный набор эффективных модулей находился из решений пяти краевых задач с различными линейными главными граничными условиями. Результаты вычислительных экспериментов показали, что эффективные модули существенно зависят не только от объемных долей включений и пор, но и от размеров пор и их конфигурации. При этом наличие пористости в структуре пьезокомпозитов в большей степени влияет на их эффективные модули упругости, чем на пьезомодули и диэлектрические проницаемости.

*Ключевые слова:* пьезоэлектричество, трехфазный пьезокомпозит, гранулированное включение, пористость, эффективный модуль, представительный объем, метод конечных элементов

## FINITE ELEMENT ANALYSIS OF THE EFFECTIVE PROPERTIES OF CORUNDUM-CONTAINING PIEZOCERAMICS WITH MULTISCALE PORES

A.B. Kudimova and A.V. Nasedkin

*Southern Federal University, Rostov on Don, Russian Federation*

The homogenization problems for determining the effective material modules of ceramicmatrix piezocomposites with respect to multiscale porosity are considered. The piezocomposite consists of a piezoceramic matrix, more rigid elastic corundum inclusions and pores. Two porosity models for micropores and for mesopores are used. Here the pores, distributed in piezoceramics with sizes much smaller than the sizes of inclusions, are called micropores, and the pores, comparable in size to inclusions, are called mesopores. Mesopores are considered as a separate phase of a piezocomposite. In the presence of microporosity, the homogenization problem is solved at two scale levels. First, we calculate the effective modules for microporous piezoceramics, where micropores are considered as a separate phase of a two-phase piezocomposite without inclusions, and then we solve the homogenization problem in the general case, i.e. for a three-phase composite consisting of microporous piezoceramics, inclusions and, possibly, mesopores. To solve the homogenization problems, the method of effective modules in the standard formulation, the finite element method and the ANSYS computational package are used. The finite element models of representative volumes of 3-0 connectivity for two-phase composites and 3-0-0 connectivity are developed for three-phase composites with isolated inclusions and pores. A complete set of effective modules was determined from the solutions of five boundary value problems with different linear essential boundary conditions. The results of computational experiments showed that effective modules quite significantly depend not only on the volume fractions of inclusions and pores, but also on the structure and size of the pores. Moreover, the structure of porosity affects to a greater extent the effective stiffness modules than the piezoelectric modules and dielectric constants.

*Key words:* piezoelectricity, three-phase piezocomposite, granular inclusion, porosity, effective modulus, representative volume, finite element method

### 1. Введение

С целью повышения эффективности керамических материалов для различных применений были разработаны керамоматричные композиты с добавками пьезоматериалов [1, 2], а также композиты с пьезокерамической матрицей и упругими включениями [3–12]. Так, для улучшения механических свойств в пьезокерамику на этапе спекания можно добавить более жесткие кристаллиты и в результате получить композит типа пьезокерамика– кристаллит. К этому классу относятся композиты, состоящие из пьезокерамической матрицы (основного материала) и включений из корунда [3–5, 9–12]. Как показали исследования [3–5, 9, 10], корундосодержащая пьезокерамика в ряде случаев ведет себя как трехфазный композит, в котором поры следует считать третьей фазой. Общая пористость в керамоматричных композитах может быть как малой, так и достаточно большой. При этом можно выделить располагающиеся по большей части на границах между основным материалом и включениями поры,

размеры которых сравнимы с размерами включений. Такие поры далее будем называть мезоразмерными порами или мезопорами. Кроме того, сама керамическая матрица корундосодержащего композита является пористой, поры в ней имеют размеры, много меньшие размеров включений. Поры такого типа назовем микроразмерными порами или микропорами. Отметим, эта классификация пор связана с размерами включений, и она отличается от классификации международного союза по чистой и прикладной химии (IUPAC), в которой микропоры, мезопоры и даже макропоры наноразмерны.

Экспериментальные данные по свойствам корундосодержащей пьезокерамики, установленные разными исследователями [3–5, 9–12], существенно различаются между собой и свидетельствуют, что технология изготовления и исходные составы оказывают на них большое влияние. Кроме того, данные по эффективным модулям требуют дополнительного обоснования, поскольку получены из обработки результатов экспериментов, выполненных по стандартам IEEE [13] и по аналогичным регламентам, которые приняты для однородных пьезокерамических образцов. Таким образом, компьютерное моделирование свойств корундосодержащей пьезокерамики с учетом особенностей ее пористой структуры представляется актуальным.

В данной работе рассматриваются задачи гомогенизации для гранулированных пьезоэлектрических композитов с учетом как распределенной в керамической матрице микропористости, так и мезопористости на некоторых из границ контакта упругих гранул с пьезокерамикой. По терминологии Р.Э. Ньюема [14] такие композиты относятся к композитам 3-0 или 3-0-0 связности. При связности 3-0 пьезокомпозит состоит из двух фаз: первая фаза — это материал, пьезоэлектрически активный и связный по трем перпендикулярным пространственным направлениям; вторая фаза — совокупность изолированных пьезоэлектрически пассивных включений или пор. В трехфазном, связности 3-0-0, композите первой фазой является пьезокерамическая матрица, второй фазой — изолированные включения, а третьей — изолированные поры.

Аналитические и численные исследования смесевых двухфазных пьезокомпозитов, основанные на различных подходах [15–32], выявили существенную зависимость значений эффективных материальных свойств от размера и количества пор, их положения относительно включений и типа связности. Метод эффективных модулей в сочетании с конечно-элементным решением задач гомогенизации и моделированием представительных объемов позволяет в наиболее полной мере учесть внутреннюю структуру пьезокомпозита, типы связности, а также формы и размеры включений или пор [19–24, 26–29, 31]. Осуществленные в [26] исследования для ячеек периодичности пористых пьезокерамических материалов показали, что данный подход дает удовлетворительное согласование с наиболее популярными аналитическими схемами Мори–Танака и схемами самосогласования, а также с оценками Хашина–Штрихмана и Халпина–Цая. Однако применение аналитических подходов становится затруднительным для композита с большим числом фаз.

В настоящей работе решение задач гомогенизации осуществляется на основе методов эффективных модулей и конечных элементов. Для моделирования представительных объемов композитов и проведения численных экспериментов используется конечно-элементной комплекс ANSYS. Аналогичные подходы применялись ранее при изучении двухфазных корундовых пьезокомпозитов без учета мезопористости [19, 23, 24] и трехфазных корундовых пьезокомпозитов с учетом мезопористости [33]. В отличие от [33], здесь рассматривается другой тип корундовой пьезокерамики — керамика с более высоким процентным содержанием пор. Результаты исследования двухфазных и трехфазных композитов позволяют дать сравнительную оценку влияния микро- и мезопористости на эффективные свойства корундосодержащей пьезокерамики.

## 2. Постановка задач гомогенизации

Пусть  $V$  — представительный объем керамоматричного композита. В наиболее общем случае будем полагать, что  $V$  является трехфазным композитом:  $V = V^{(c)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ . Здесь  $V^{(c)}$  — сплошная ( $V^{(c)} = V^{(dc)}$ ) или микропористая ( $V^{(c)} = V^{(pc)}$ ) пьезокерамика, где  $V^{(e)}$  — совокупность упругих включений с диэлектрическими свойствами,  $V^{(p)}$  — совокупность мезоразмерных пор или микропор в задаче гомогенизации микропористой пьезокерамики. Считаем, что все подобласти заполнены своими пьезоэлектрическими материалами с упругими жесткостями  $c_{\alpha\beta}^E = c_{\alpha\beta}^{E(m)}$ , пьезомодулями  $e_{j\beta} = e_{j\beta}^{(m)}$  и диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_{ij}^{S(m)}$ ,  $\mathbf{x} \in V^{(m)}$ , где  $\mathbf{x}$  — вектор в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , а верхний индекс здесь и далее принимает значения  $t = dc, pc, e, p$ . При этом упругий материал в  $V^{(e)}$  будем рассматривать, как пьезоэлектрический материал с пренебрежимо малыми пьезомодулями, для пор в  $V^{(p)}$  зададим пренебрежимо малые упругие жесткости и пьезомодули, а диэлектрические проницаемости приравняем к диэлектрической проницаемости вакуума:  $\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м.

Этот общий случай допускает использование задач гомогенизации для нахождения эффективных модулей жесткости  $c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}}$ , эффективных пьезомодулей  $e_{j\beta}^{\text{eff}}$  и эффективных диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{jj}^{S\text{eff}}$  у пьезоэлектрических композитов различного типа:

- микропористой пьезокерамики, где  $V = V^{(dc)} \cup V^{(p)}$ , с модулями  $c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}} = c_{\alpha\beta}^{E(pc)}$ ,  $e_{j\beta}^{\text{eff}} = e_{j\beta}^{(pc)}$  и  $\varepsilon_{jj}^{S\text{eff}} = \varepsilon_{jj}^{S(pc)}$ ;
- керамоматричного пьезокомпозита без учета пористости:  $V = V^{(dc)} \cup V^{(e)}$ ;
- керамоматричного пористого пьезокомпозита с учетом только микропористости пьезокерамики:  $V = V^{(pc)} \cup V^{(e)}$ ;
- керамоматричного пористого пьезокомпозита с учетом только мезопористости:  $V = V^{(dc)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ ;
- керамоматричного пористого пьезокомпозита с учетом как микропористости, так и мезопористости:  $V = V^{(pc)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ .

Для решения задач гомогенизации всех перечисленных пьезокомпозитов воспользуемся методом эффективных модулей в обычной формулировке. Примем, что в объеме  $V$  выполняются классические уравнения теории пьезоэлектричества, которые запишем в векторно-матричном виде [19, 23, 24, 27]:

$$\mathbf{L}^T(\nabla) \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \cdot \mathbf{S} - \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{S} + \boldsymbol{\varepsilon}^S \cdot \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}(\nabla) \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

$$[\mathbf{L}(\nabla)]^T = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla = \begin{Bmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{Bmatrix}. \quad (3)$$

Здесь:  $\mathbf{T} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}$ ,  $\mathbf{S} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\}$  — массивы компонент напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$  соответственно;  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции или вектор электрического смещения;  $\mathbf{E}$  — вектор напряженности электрического поля;  $\mathbf{c}^E$  —  $6 \times 6$  матрица упругих жесткостей  $c_{\alpha\beta}^E$ , измеренных при постоянном электрическом поле;  $\mathbf{e}$  —  $3 \times 6$  матрица пьезомодулей  $e_{j\beta}$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}^S$  —  $3 \times 3$  матрица диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_{jj}^S$ , измеренных при постоянных деформациях;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $\phi$  — электрический потенциал;  $\mathbf{L}(\mathbf{a})$  —  $6 \times 3$  матричный оператор от вектора  $\mathbf{a}$ ;  $(\dots)^T$  — операция транспонирования матриц;  $(\dots) \cdot (\dots)$  — операция скалярного произведения матриц или векторов, например,  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{S} = e_{k\beta} S_{\beta} \mathbf{i}_k$ , где  $\mathbf{i}_k$  — орты декартовой системы координат.

Основная идея метода эффективных модулей состоит в использовании граничных условий, обеспечивающих для однородной среды постоянные поля напряжений, деформаций, электрической индукции и напряженности электрического поля. Аналогично работам [19, 23, 24, 27], примем следующие граничные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}_0, \quad \phi = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (4)$$

где  $\Gamma = \partial V$  — внешняя граница представительного объема,  $\mathbf{S}_0 = \{\varepsilon_{011}, \varepsilon_{022}, \varepsilon_{033}, 2\varepsilon_{023}, 2\varepsilon_{013}, 2\varepsilon_{012}\}$ ,  $\varepsilon_{0km}$  — некоторые постоянные значения, не зависящие от  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{E}_0$  — некоторый постоянный вектор. Тогда для определения эффективных свойств пьезокомпозитов можно решить набор краевых задач (1)–(4), задавая одну из компонент —  $\mathbf{S}_0$  или  $\mathbf{E}_0$  — отличной от нуля.

Для керамоматричного композита, состоящего из обладающей гексагональной анизотропией пьезокерамической матрицы, изотропных включений и пор, можно предположить, что в результате решения задачи гомогенизации его эффективная среда будет материалом гексагональной сингонии. Тип анизотропии может измениться, если в представительном объеме будет иметься существенная геометрическая анизотропия другого типа. Однако для случайного распределения включений и пор гомогенный материал обычно получается с гексагональной анизотропией, то есть трансверсально-изотропным. В таких случаях для нахождения полного набора эффективных модулей трансверсально-изотропного композита ( $c_{11}^{E\text{eff}}, c_{12}^{E\text{eff}}, c_{13}^{E\text{eff}}, c_{33}^{E\text{eff}}, c_{44}^{E\text{eff}}, e_{31}^{\text{eff}}, e_{33}^{\text{eff}}, e_{15}^{\text{eff}}, \varepsilon_{11}^{S\text{eff}}, \varepsilon_{33}^{S\text{eff}}$ ) достаточно решить пять задач, описываемых уравнениями (1)–(4): три задачи с ненулевыми компонентами  $\mathbf{S}_0$  и две с ненулевыми компонентами  $\mathbf{E}_0$  [19, 23, 27]:

**Задача I.** При линейном смещении внешних границ объема  $V$  в направлении оси  $x_1$ :

$$S_{0\beta} = S_0 \delta_{1\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, 6), \quad E_{0k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \quad (5)$$

после решения задачи (1)–(5) можно определить следующие эффективные модули:

$$c_{1j}^{E\text{eff}} = \langle \sigma_{jj} \rangle / S_0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad e_{31}^{\text{eff}} = \langle D_3 \rangle / S_0, \quad \langle \dots \rangle = (1/|V|) \int_V (\dots) dV. \quad (6)$$

**Задача II.** Известно линейное смещение внешних границ объема  $V$  в направлении оси  $x_3$ :

$$S_{0\beta} = S_0 \delta_{3\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, 6), \quad E_{0k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Решение задачи (1)–(4), (7) позволяет вычислить эффективные модули:

$$c_{j3}^{E\text{eff}} = \langle \sigma_{jj} \rangle / S_0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad e_{33}^{\text{eff}} = \langle D_3 \rangle / S_0. \quad (8)$$

**Задача III.** Задан линейный сдвиг внешних границ объема  $V$  по осям  $x_2$  и  $x_3$ :

$$S_{0\beta} = S_0 \delta_{4\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, 6), \quad E_{0k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Разрешив (1)–(4), (9), получим сдвиговые модули:

$$c_{44}^{E\text{eff}} = \langle \sigma_{23} \rangle / (2S_0), \quad e_{15}^{\text{eff}} = \langle D_2 \rangle / (2S_0). \quad (10)$$

**Задача IV.** На внешних границах объема  $V$  задается линейный по  $x_1$  электрический потенциал:

$$S_{0\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, 6), \quad E_{0k} = E_0 \delta_{1k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (11)$$

В результате решения задачи (1)–(4), (11) установим модули:

$$e_{15}^{\text{eff}} = \langle \sigma_{13} \rangle / E_0, \quad \epsilon_{11}^{S\text{eff}} = \langle D_1 \rangle / E_0. \quad (12)$$

**Задача V.** На внешних границах объема  $V$  задается линейный по  $x_3$  электрический потенциал:

$$S_{0\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, 6), \quad E_{0k} = E_0 \delta_{3k} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (13)$$

По решению задачи (1)–(4), (13) можно найти:

$$e_{3j}^{\text{eff}} = -\langle \sigma_{jj} \rangle / E_0 \quad (j = 1, 3), \quad \epsilon_{33}^{S\text{eff}} = \langle D_3 \rangle / E_0. \quad (14)$$

В совокупности формулы (6), (8), (10), (12), (14) позволяют определить полный набор эффективных модулей пьезокерамического композита. Подтверждением того, что результирующая гомогенная среда является материалом с гексагональной анизотропией, будет равенство модулей жесткости  $c_{13}^{E\text{eff}}$ , вычисленных из решений задач I и II, равенство модулей  $c_{13}^{E\text{eff}} = c_{23}^{E\text{eff}}$  в задаче II, равенство пьезомодулей  $e_{31}^{\text{eff}}$ ,  $e_{33}^{\text{eff}}$ ,  $e_{15}^{\text{eff}}$ , найденных из задач I–III и из задач IV, V. Естественно, что при численном решении задач гомогенизации данные равенства будут выполняться лишь приближенно.

Отметим, что для гомогенизации свойств керамоматричных пьезокомпозитов вместо граничных условий (4) можно брать и другие граничные условия [19, 27]. Однако тестовые расчеты для двухфазной корундовой пьезокерамики показали [19], что все основные виды граничных условий метода эффективных модулей приводят к приблизительно одинаковым результатам.

Изложенный подход может быть распространен и на задачи гомогенизации, применяемые к керамоматричным пьезокомпозитам с наноразмерными включениями и пораами, но при условии, что моделирование в рамках обобщенной теории Гуртина–Мурдоха учитывает интерфейсные поверхностные эффекты [34–36].

### 3. Моделирование представительных объемов

Для решения в объеме  $V$  задач I–V, описываемых уравнениями (1)–(4) и одним из граничных условий — (5), (7), (9), (11) или (13), используем метод конечных элементов и пакет ANSYS. Представительный объем сразу построим в виде конечно-элементного аналога следующим образом. Вначале сгенерируем базовую кубическую ячейку со стороной размером  $l_c$ , состоящую из 8 прямоугольных параллелепипедов. Примем, что в этой ячейке только основной кубический конечный элемент со стороной  $l_e$  может иметь материальные свойства включения:  $l_e = k_e l_c$ ,  $k_e < 1$ . Предположим, что с кубическим элементом, являющимся включением, по общим граням может контактировать  $\kappa_d$  число мезопор, где  $\kappa_d$  (в различных вариантах алгоритма) принимает значения 0, 1, 2 или 3. Коэффициент  $k_e$  для двухфазных композитов, не содержащих мезоразмерные поры, зададим явно, а для трехфазных композитов с мезопорами определим его, исходя из заданных объемных долей включений  $v_e$  и мезоразмерных пор  $v_p$ , по формуле:  $k_e = \kappa_d v_e / (\kappa_d v_e + v_p)$ .

Первоначально все конечные элементы базовой ячейки имеют свойства пьезокерамического материала. Далее ячейку копируем  $n_a - 1$  раз вдоль оси  $x_1$  со смещением на  $jl_c$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_a - 1$ , затем полученное  $n_a$  количество ячеек аналогичным образом  $n_a - 1$  раз воспроизводим вдоль оси  $x_2$ , и, наконец, массив из  $n_a^2$  ячеек  $n_a - 1$  раз размещаем вдоль оси  $x_3$ . В результате образуется представительный объем из  $n_c = n_a^3$  базовых ячеек. Затем в этом массиве конечных элементов с помощью генератора случайных чисел в пакете ANSYS выбираем основные кубические элементы со сторонами размером  $l_e$  и присваиваем материальным модулям этих элементов значения, отвечающие модулям материала включений. Такие элементы–включения создаются  $n_e = \lfloor v_e n_c / k_e^3 \rfloor$  раз, где  $\lfloor \dots \rfloor$  — целая часть числа. У элементов–включений в соответствующих базовых ячейках имеется по три соседствующих по граням конечных элемента, которые могут быть мезоразмерными порами. Эти элементы для  $\kappa_d = 1$  или для  $\kappa_d = 2$  также генератором случайных чисел выбираем среди трех возможных кандидатов, а для  $\kappa_d = 3$  берем все три соседствующих элемента. Далее материальные свойства выбранных элементов заменяем на свойства пор. При этом, как отмечалось выше, для двухфазных композитов, состоящих из микропористой пьезокерамической матрицы с эффективными свойствами и корундовых включений, мезоразмерные поры не формируем.

В итоге генерируется представительный объем трехфазного или двухфазного композита с конечными элементами, обладающими тремя или двумя видами материальных свойств: пьезокерамической матрицы, включений и мезоразмерных пор (у трехфазного композита) и микропористой матрицы и включений (у двухфазного композита). Сформированная структура композита является частично детерминированной и частично стохастической. В этой структуре между собой изолированы как включения, так и мезопоры, то есть получается композит 3-0-0 или 3-0 связности [14].

Далее на рисунках 1, 2 для керамоматричного композита с включениями и мезопорами представлены примеры базовых ячеек и представительных объемов. При этом конечные элементы, отвечающие разным фазам, раскрашены в разные цвета.

Итак, на рисунке 1 приведены примеры отдельных ячеек керамоматричного композита с включением и мезопорами: ячейка с одной мезопорой (Рис. 1а, б), ячейка с двумя мезопорами (Рис. 1в, г). При этом на фрагментах 1а, в ячейки представлены в целом виде, а на 1б, г — разобранные по фазам.

Рисунок 2 содержит два варианта представительного объема композита при  $n_a = 10$ ,  $v_e = 0,05$ ,  $v_p = 0,02$ . На фрагментах 2а, б каждое включение контактирует с одной порой, то есть  $\kappa_d = 1$ , а на 2в, г у каждого включения имеются общие грани с двумя порами, то есть  $\kappa_d = 2$ . На 2а, в показаны представительные объемы целиком, а на 2б, г изображены только элементы со свойствами включений и пор. Как видно, ячейки в представительных объемах на рисунке 2 приведены в меньшем по сравнению с ячейками на рисунке 1 масштабе.

Для композитов с микропористостью расчеты проводились в два этапа. На первом этапе по аналогичной технологии строились представительные объемы двухфазного микропористого пьезокерамического материала на меньшем масштабном уровне без упругих включений. В этом представительном объеме в качестве включений выступали микропоры. Из решений задач гомогенизации определялись эффективные модули микропористого пьезокерамического материала. На втором этапе керамоматричный композит с микро- и мезопористостью исследовался уже как трехфазный композит, в котором первой фазой являлась пьезокерамика с эффективными модулями микропористого материала, второй фазой — упругие включения, а третьей фазой — мезопоры.

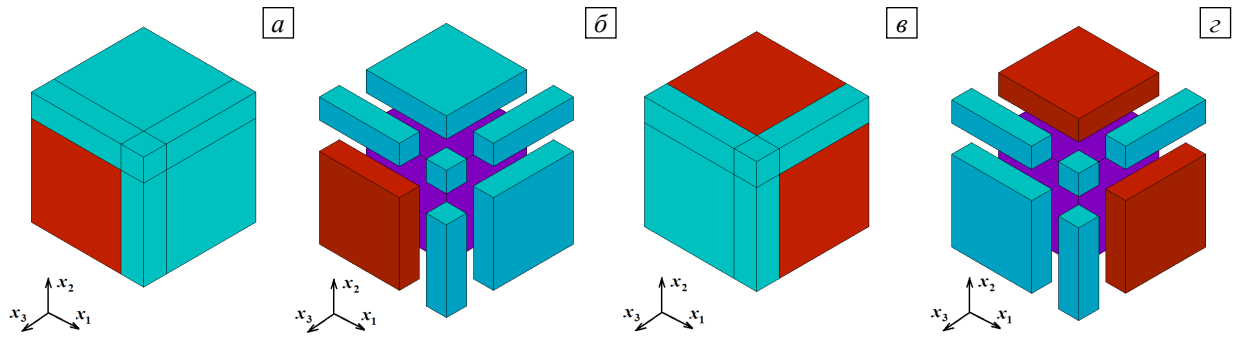


Рис. 1. Примеры базовых ячеек трехфазного композита с одной (а, б) и двумя (в, з) порами

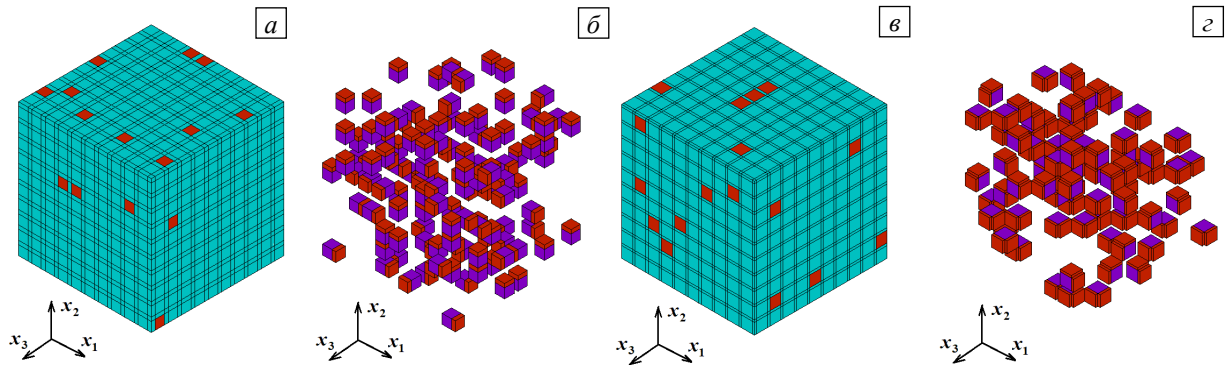


Рис. 2. Примеры представительных объемов: каждое включение контактирует с одной (а, б) и двумя (в, з) порами

#### 4. Численные результаты

В качестве примера рассмотрена задача гомогенизации для корундосодержащих пьезокомпозигов, описанных в [3–5]. Эти композиты состояли из пьезокерамики ЦТС-19, корундовой керамики ВК-94-1 (22ХС), содержащей в своем составе 94,39% корунда  $\alpha\text{-Al}_2\text{O}_3$ , и пор. Для плотной пьезокерамики ЦТС-19, согласно [3–5], принимались следующие значения материальных модулей:  $c_{11}^{E(dc)} = 10,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{12}^{E(dc)} = 6,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{13}^{E(dc)} = 5,4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{33}^{E(dc)} = 9,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{44}^{E(dc)} = 2,4 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $e_{31}^{(dc)} = -4,9$ ;  $e_{33}^{(dc)} = 14,9$ ;  $e_{15}^{(dc)} = 10,8 \text{ Кл/м}^2$ ;  $\varepsilon_{11}^{S(dc)} = 820\varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_{33}^{S(dc)} = 840\varepsilon_0$ . Корундовую керамику ВК-94-1 считали изотропным упругим материалом с модулями [3–5]:  $c_{11}^{(e)} = 43,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $c_{12}^{(e)} = 12,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ;  $\varepsilon^{(e)} = 10\varepsilon_0$ . Представительный объем состоял из  $n_c = 15^3$  базовых ячеек и гексаэдральных 20-узловых пьезоэлектрических конечных элементов SOLID226.

В исследуемом композите учитывались поры микро- и мезоразмеров. В результате аппроксимации экспериментальных данных [3–5] было принято, что общая пористость  $v_p$  приблизительно равна объемной доле включений корунда  $v_e$ :  $v_e = v_p$ . В свою очередь общая пористость  $v_p$  складывалась из объемных долей микропор  $v_{sp}$  и мезопор  $v_{lp}$ :  $v_p = v_{sp} + v_{lp}$ . Для оценки влияния на эффективные модули пор с разными размерами в общей пористости  $v_p$  варьировались объемные доли микропор  $v_{sp}$  и мезопор  $v_{lp}$ . Для композитов с мезопористостью предполагалось, что с каждым включением соседствовало от одной до трех мезопор:  $\kappa_q = 1, 2, 3$ .

Проанализируем зависимости от долей включений и пор относительных значений эффективных модулей, которые обозначим как  $r(\dots)$ . Например,  $r(c_{\alpha\beta}^E) = c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}} / c_{\alpha\beta}^{E(dc)}$  — отношение значения эффективного модуля жесткости  $c_{\alpha\beta}^{E\text{eff}}$  к соответствующему значению модуля  $c_{\alpha\beta}^{E(dc)}$  плотной пьезокерамики, и так далее.

Вначале посмотрим на данные вычислений эффективных модулей более простых пограничных вариантов 3-0 связности пьезокомпозигов без упругих включений или без пор. Так, в таблице 1 представлены некоторые результаты расчетов эффективных модулей микропористой пьезокерамики ЦТС-19 в представительных объемах  $V = V^{(dc)} \cup V^{(p)}$  при  $k_e = 0,8$  для различной пористости. В таблице 2

для сравнения приведены результаты расчетов эффективных модулей корундосодержащей керамики ЦТС-19/ВК-94-1 без пор в представительных объемах  $V = V^{(dc)} \cup V^{(e)}$  при  $k_e = 0,8$  для тех же значений объемных долей второй фазы, что и в таблице 1.

Отметим, что для рассматриваемых композитов жесткость гипотетического материала, заполняющего поры, пренебрежимо мала, а материал включений является более жестким, чем материал матрицы. Поэтому в таблице 1 эффективные модули жесткости пористой пьезокерамики убывают с ростом пористости, причем достаточно единообразно. Например, при пористости 30% все относительные модули жесткости уменьшаются до значений 0,54–0,62. Наоборот, эффективные модули жесткости корундосодержащей керамики растут вслед за процентной долей включений, причем различным образом. Например, при доле включений 30% относительные модули  $r(c_{ij}^E)$  увеличиваются до значений 1,55–1,86, а относительные модули  $r(c_{12}^E)$ ,  $r(c_{13}^E)$  лишь до значений 1,16–1,18. При этом наблюдаемые в таблице 2 различия между относительными эффективными модулями жесткости при одинаковых долях включений легко объясняются величиной отношений модулей жесткости корундовых включений ВК-94-1 к соответствующим модулям жесткости пьезокерамической матрицы. Поскольку  $c_{11}^{(e)}/c_{11}^{E(dc)} = 4$ ,  $c_{12}^{(e)}/c_{12}^{E(dc)} = 2,02$ ,  $c_{13}^{(e)}/c_{13}^{E(dc)} = 2,28$ ,  $c_{33}^{(e)}/c_{33}^{E(dc)} = 4,72$ ,  $c_{44}^{(e)}/c_{44}^{E(dc)} = 6,52$ , где  $c_{13}^{(e)} = c_{12}^{(e)}$ ,  $c_{33}^{(e)} = c_{11}^{(e)}$ ,  $c_{44}^{(e)} = (c_{11}^{(e)} - c_{12}^{(e)})/2$ , то  $r(c_{12}^E) \leq r(c_{13}^E) < r(c_{11}^E) < r(c_{33}^E) < r(c_{44}^E)$ . Пьезомодули как для гипотетического материала пор, так и для материала включений равны нулю, а диэлектрические проницаемости этих материалов значительно меньше диэлектрических проницаемостей пьезокерамики.

Таблица 1. Относительные значения эффективных модулей микропористой пьезокерамики ЦТС-19

Пористость (%)	0	5	10	15	20	25	30
$r(c_{11}^E)$	1	0,91	0,83	0,79	0,76	0,72	0,62
$r(c_{12}^E)$	1	0,89	0,80	0,75	0,71	0,67	0,56
$r(c_{13}^E)$	1	0,89	0,79	0,74	0,69	0,65	0,54
$r(c_{33}^E)$	1	0,91	0,83	0,79	0,75	0,71	0,61
$r(c_{44}^E)$	1	0,93	0,85	0,81	0,77	0,72	0,62
$r(e_{31})$	1	0,88	0,77	0,72	0,68	0,63	0,52
$r(e_{33})$	1	0,95	0,89	0,83	0,78	0,72	0,67
$r(e_{15})$	1	0,92	0,85	0,77	0,70	0,63	0,57
$r(\epsilon_{11}^S)$	1	0,95	0,89	0,84	0,79	0,74	0,69
$r(\epsilon_{33}^S)$	1	0,94	0,88	0,82	0,76	0,71	0,65

Таблица 2. Относительные значения эффективных модулей пьезокомпозита ЦТС-19/ВК-94-1 без пор

Доля включений (%)	0	5	10	15	20	25	30
$r(c_{11}^E)$	1	1,08	1,16	1,25	1,34	1,44	1,55
$r(c_{12}^E)$	1	1,03	1,05	1,08	1,11	1,13	1,16
$r(c_{13}^E)$	1	1,03	1,06	1,09	1,12	1,15	1,18
$r(c_{33}^E)$	1	1,11	1,23	1,36	1,49	1,63	1,78
$r(c_{44}^E)$	1	1,13	1,27	1,41	1,56	1,71	1,86
$r(e_{31})$	1	0,97	0,94	0,91	0,87	0,84	0,79
$r(e_{33})$	1	0,94	0,88	0,82	0,76	0,71	0,65
$r(e_{15})$	1	0,96	0,92	0,88	0,84	0,80	0,76
$r(\epsilon_{11}^S)$	1	0,94	0,89	0,83	0,78	0,72	0,67
$r(\epsilon_{33}^S)$	1	0,94	0,88	0,82	0,76	0,71	0,65

Эти характеристики композитов соответствуют результатам из таблиц 1 и 2. Как можно видеть, при одинаковых объемных долях пор и включений у корундовой пьезокерамики без пор эффективные модули упругости  $c_{jj}^{E\text{eff}}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) растут быстрее, чем убывают соответствующие модули жесткости пористой пьезокерамики, но эффективные модули упругости  $c_{12}^{E\text{eff}}$ ,  $c_{13}^{E\text{eff}}$  корундовой пьезокерамики

без пор увеличиваются медленнее в сравнении с уменьшением соответствующих модулей жесткости пористой пьезокерамики. Относительные пьезомодули и диэлектрические проницаемости как корундовой пьезокерамики без пор, так и обычной пористой пьезокерамики убывают.

Теперь проанализируем результаты расчетов эффективных модулей трехфазных пьезокомпозигов с включениями и порами. Для оценки влияния размеров пор проведем сравнение данных расчетов эффективных модулей для пяти видов пористых корундовых пьезокерамик при одинаковых долях  $v_e$  корундовых включений ВК-94-1 и, соответственно, одних и тех же объемных долях  $v_p$  пор. С этой целью рассмотрим рисунки 3–7, которые содержат зависимости относительных эффективных модулей от процентной доли включений  $p_e = 100v_e$  в диапазоне от 0 до 25%. Отметим, что, например, при доле включений в 25% поры составляют те же 25% ( $v_e = v_p$ ), и в таких композитах пьезокерамическая матрица занимает 50% всего объема. Таким образом, большие значения долей включений и пор соответствуют композитам с малыми долями пьезокерамического материала, что, очевидно, не очень хорошо для практических применений подобных материалов.

Номера кривых на всех рисунках 3–7 соответствуют данным для эффективных материальных модулей керамоматричных пьезокомпозигов со следующими типами учитываемой пористости:

1. только микропористость,  $V = V^{(pc)} \cup V^{(e)}$ ;
2. как микропористость, так и мезопористость, когда  $v_{sp} = v_{lp} = v_p/2$  и с каждым включением соседствуют две мезопоры,  $V = V^{(pc)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ ,  $\kappa_d = 2$ ;
3. как микропористость, так и мезопористость, когда  $v_{sp} = v_{lp} = v_p/2$  и с каждым включением соседствуют три мезопоры,  $V = V^{(pc)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ ,  $\kappa_d = 3$ ;
4. только мезопористость, когда с каждым включением соседствуют две мезоразмерных поры,  $V = V^{(dc)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ ,  $\kappa_d = 2$ ;
5. только мезопористость, когда с каждым включением соседствуют три мезоразмерных поры,  $V = V^{(dc)} \cup V^{(e)} \cup V^{(p)}$ ,  $\kappa_d = 3$ .

Таким образом, на рисунках 3–7 результатам расчетов эффективных модулей разных композитов соответствуют: кривые 1 — микропористой корундосодержащей керамике; кривые 2 — композиту со смешанной пористостью при  $\kappa_d = 2$ ; кривые 3 — композиту со смешанной пористостью при  $\kappa_d = 3$ ; кривые 4 — мезопористому композиту при  $\kappa_d = 2$ ; кривые 5 — мезопористому композиту при  $\kappa_d = 3$ .

Свойства убывания или возрастания модулей при увеличении долей включений и пор аналогичны приведенным выше при анализе результатов из таблиц 1 и 2 для двухфазных композитов. Но теперь можно сравнить между собой кривые 1–5, соответствующие композитам с разным типом пористости.

Как видно из рисунков 3–7, при различном учитываемом типе пористости композитов зависимости от долей включений их характеристик несколько отличаются. Композиты без микроразмерной пористости (кривые 4 и 5, Рис. 3, 4, 5а) являются наиболее жесткими, композиты без мезоразмерной пористости, то есть с только микроразмерной пористостью (кривые 1, Рис. 3, 4, 5а) имеют жесткость, среднюю по отношению к материалам с только мезоразмерной пористостью и со смешанной микро- и мезопористостью. Поскольку на рисунках 3, 4, 5а кривые 2 лежат выше кривых 3, а кривые 4 — выше кривых 5, то можно сделать вывод, что увеличение  $\kappa_d$  — числа мезоразмерных пор, понижает жесткость. Такое взаимоположение кривых можно объяснить тем, что у композитов с одинаковой общей пористостью (при  $\kappa_d = 2$  или  $\kappa_d = 3$ ) площадь контакта включений с керамической матрицей уменьшается при увеличении числа мезопор в отдельной ячейке от  $\kappa_d = 2$  до  $\kappa_d = 3$ , что делает композит менее жестким.

Относительные пьезомодули —  $r(e_{31})$ ,  $r(e_{33})$ ,  $r(e_{15})$ , и диэлектрические проницаемости —  $r(\epsilon_{11}^S)$ ,  $r(\epsilon_{33}^S)$ , монотонно убывают с увеличением долей включений и пор и в меньшей степени зависят от типа пористости. Относительные величины пьезомодулей  $r(e_{33})$ ,  $r(e_{15})$  и диэлектрических проницаемостей  $r(\epsilon_{11}^S)$ ,  $r(\epsilon_{33}^S)$  максимальны у композитов без мезоразмерных пор (кривые 1, Рис. 5б, 6, 7) и минимальны у композитов без микроразмерных пор (кривые 4 и 5, Рис. 5б, 6, 7). Иное поведение наблюдается у относительного пьезомодуля  $r(e_{31})$ , но все отвечающие ему кривые 1–5, как и у  $r(e_{15})$ , достаточно близки между собой даже при больших долях включений, то есть тип пористости для  $r(e_{15})$  и  $r(e_{31})$  менее существенен, чем для относительных модулей  $r(e_{33})$ ,  $r(\epsilon_{11}^S)$  и  $r(\epsilon_{33}^S)$ .

Из рисунков 3–7 также видно, что тип пористости и размеры пор в наибольшей степени влияют на величину эффективных модулей при больших объемных долях включений и пор.



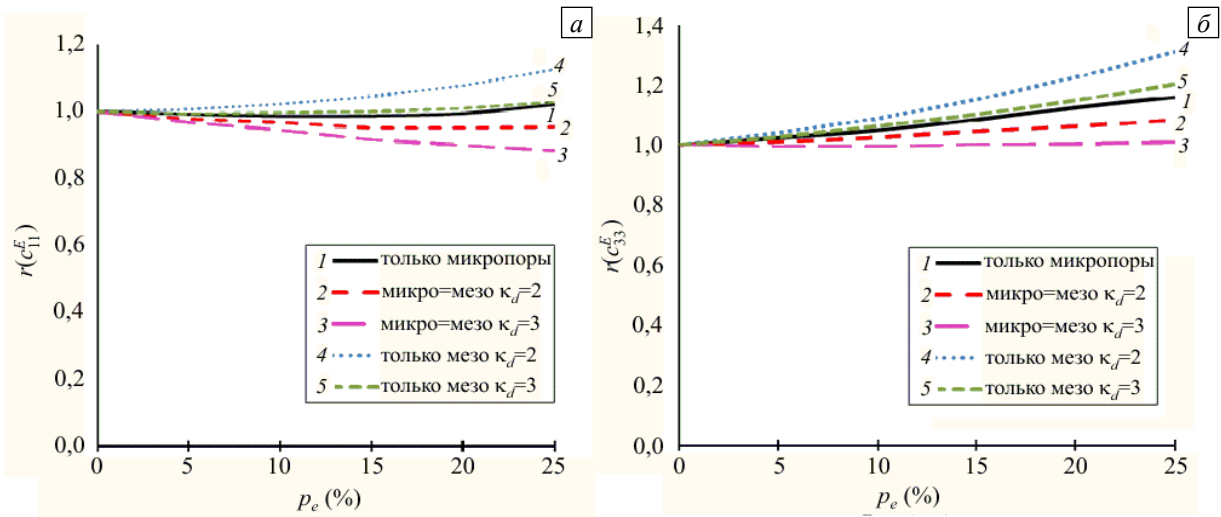


Рис. 3. Зависимости от объема включений относительных модулей жесткости  $r(c_{11}^E)$  (а) и  $r(c_{33}^E)$  (б)

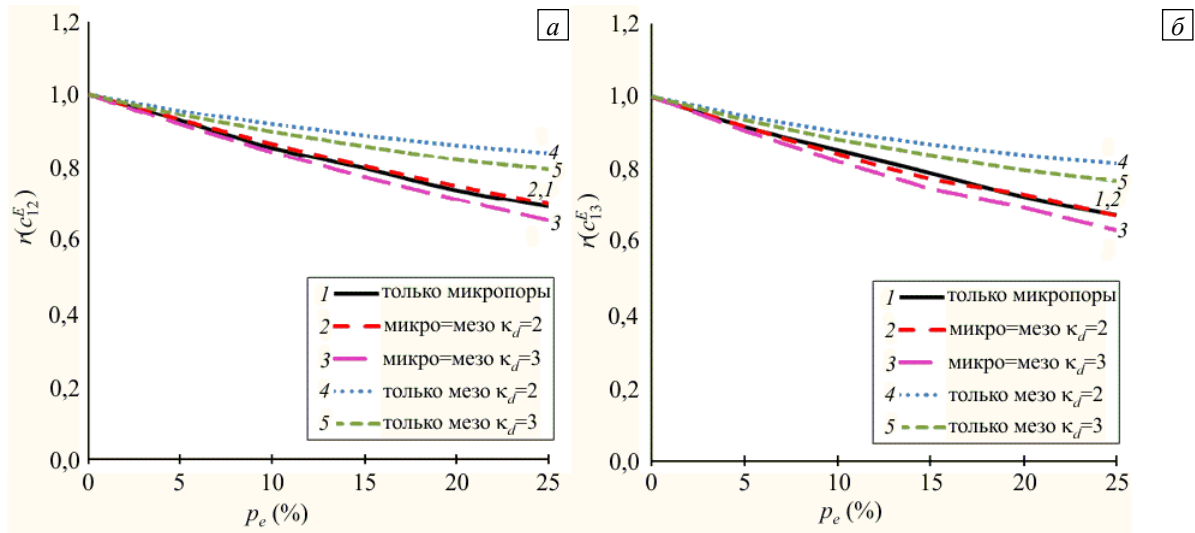


Рис. 4. Зависимости от объема включений относительных модулей жесткости  $r(c_{12}^E)$  (а) и  $r(c_{13}^E)$  (б)

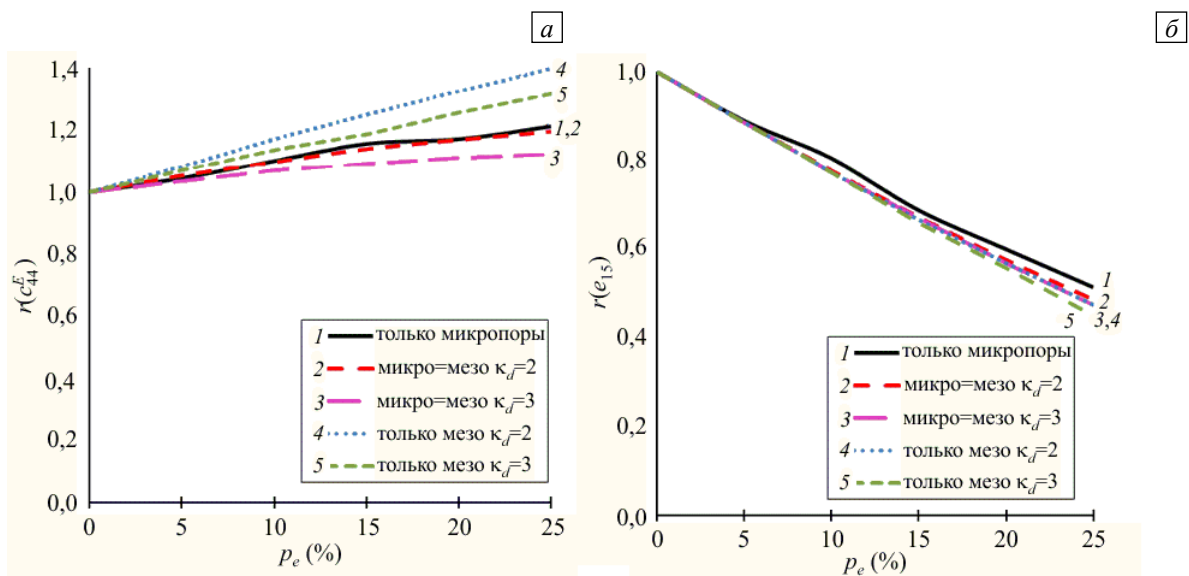


Рис. 5. Зависимости от объема включений относительных модуля жесткости  $r(c_{44}^E)$  (а) и пьезомодуля  $r(e_{15})$  (б)

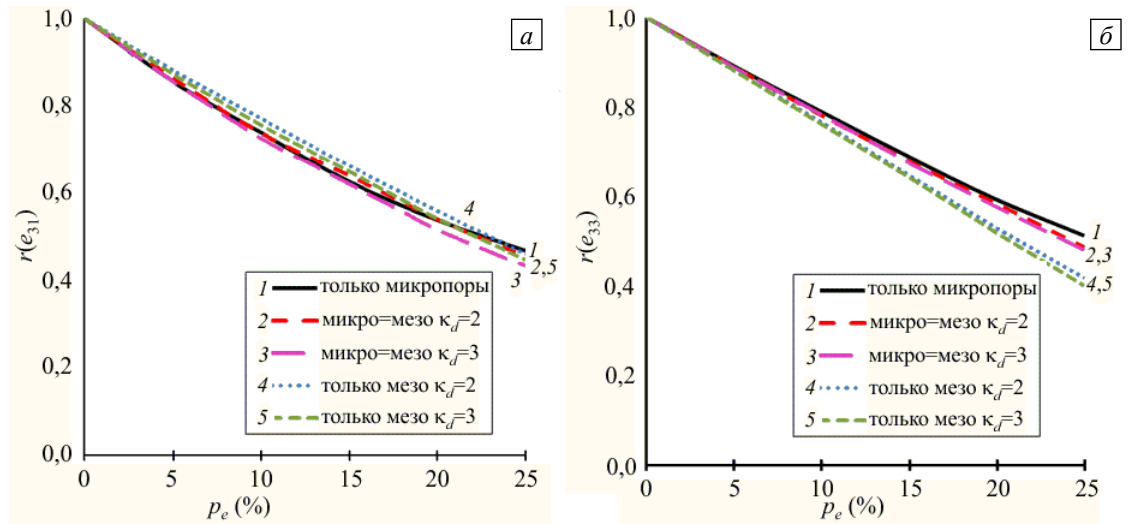


Рис. 6. Зависимости от объема включений относительных пьезомодулей  $r(e_{31})$  (а) и  $r(e_{33})$  (б)

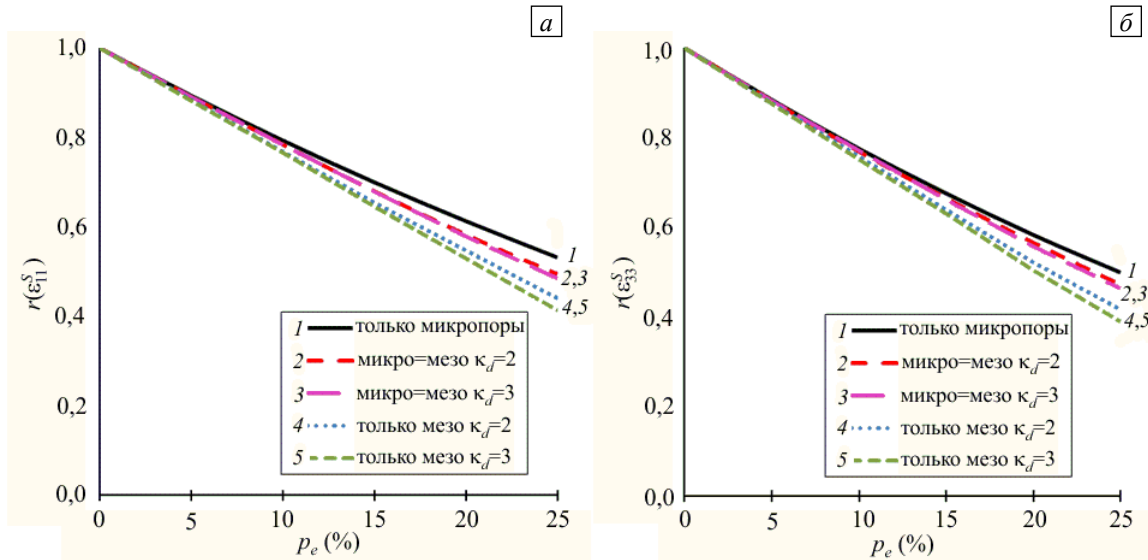


Рис. 7. Зависимости от объема включений относительных диэлектрических проницаемостей  $r(\epsilon_{11}^s)$  (а) и  $r(\epsilon_{33}^s)$  (б)

Сравнение эффективных модулей при различных типах пористости также можно провести при других условиях, а именно зафиксировать объемную долю включений  $v_e$  и в общей доле пористости  $v_p = v_e$  менять доли мезопористости  $v_{lp}$  и микропористости  $v_{sp} = v_p - v_{lp}$ . На рисунках 8 и 9 показаны зависимости от мезопористости  $p_p = 100v_{lp}$  некоторых из характерных относительных эффективных модулей при  $p_e = 20\%$ . Здесь сплошные кривые — это результаты для композитов с  $\kappa_d = 2$ , а штриховые кривые — для композитов с  $\kappa_d = 3$ .

Отметим, что при  $p_{lp} = 0$  значения относительных модулей на рисунках 8, 9 равны соответствующим значениям на кривых 1 рисунков 3б, 4б, 6а и 7б при  $p_e = 20\%$ ; значения модулей при  $p_{lp} = 10\%$  совпадают со значениями на кривых 2 и 3 рисунков 3б, 4б, 6а и 7б при  $p_e = 20\%$ ; значения модулей при  $p_{lp} = 20\%$  равны значениям на кривых 4 и 5 рисунков 3б, 4б, 6а и 7б при  $p_e = 20\%$ .

Из анализа рисунков 8, 9 так же, как и из рисунков 3–7, можно сделать выводы: 1) композиты с меньшими площадями контакта включений с пьезокерамической матрицей ( $\kappa_d = 3$ ) оказываются менее жесткими по сравнению с композитами с большими площадями контакта включений с пьезокерамикой ( $\kappa_d = 2$ ); 2) значения эффективных пьезомодулей и диэлектрических проницаемостей в меньшей степени зависят от типа пористости; 3) эффективные модули жесткости с ростом мезопористости  $p_{lp}$  убывают в диапазоне от 0 до 6%, но возрастают в диапазоне от 6 до 20%. (см. Рис. 8).

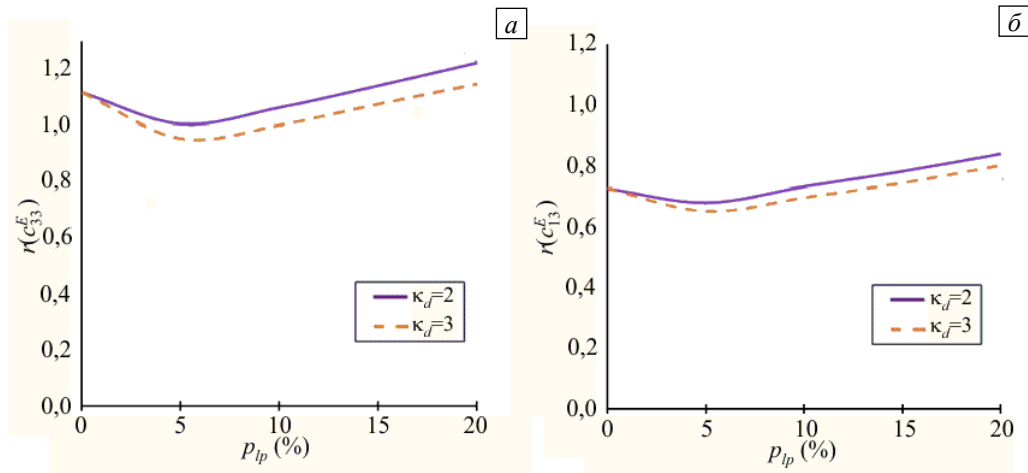


Рис. 8. Зависимости от мезопористости относительных модулей жесткости  $r(c_{33}^E)$  (а) и  $r(c_{13}^E)$  (б)

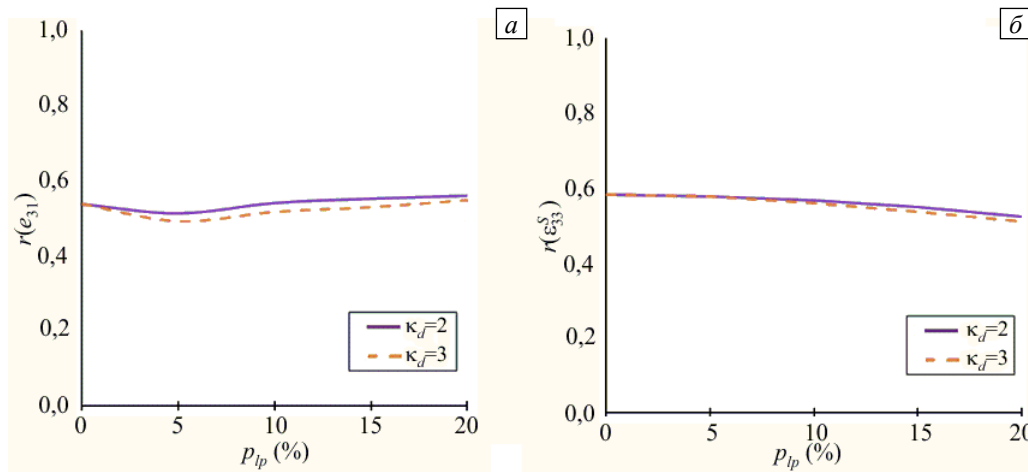


Рис. 9. Зависимости от мезопористости относительных пьезомодуля  $r(e_{31})$  (а) и диэлектрической проницаемости  $r(\epsilon_{33}^S)$  (б)

Последний вывод сложен для объяснения, поскольку, как следует из описания в разделе 2 структуры представительных объемов, рост объемной доли мезопор  $v_p = p_{ip}/100$  при фиксированной доле включений  $v_e$  уменьшает для базовой ячейки со стороной  $l_c$  множитель  $k_e = \kappa_d v_e / (\kappa_d v_e + v_p)$ , размер включений  $l_e = k_e l_c$  и длину мезопоры  $l_p = l_e$ , что приводит к увеличению ширины мезопоры  $h_p = (1 - k_e) l_c$  и росту общего числа включений  $n_e = \lceil v_e n_c / k_e^3 \rceil$  в представительном объеме, состоящем из  $n_c$  базовых ячеек. Поэтому вполне возможно, что для других структур представительных объемов зависимости, отмеченные при анализе кривых на рисунке 8, могут не наблюдаться.

Полученные данные подтверждают выводы авторов работ [3–5] об эффективности использования корундосодержащей керамики в качестве активного материала для сенсоров. Действительно, исследуемый композит в диапазоне долей включений и пористости от 0 до 25% имеет, по сравнению со сплошной пьезокерамикой, повышенные модули жесткости  $c_{ij}^{E\text{eff}}$  и почти постоянные как показатели анизотропии  $d_{33}^{\text{eff}} / |d_{31}^{\text{eff}}|$ , так и коэффициенты пьезочувствительности  $g_{33}^{\text{eff}}$ ,  $g_{31}^{\text{eff}}$ ,  $g_{15}^{\text{eff}}$ . Здесь коэффициенты  $d_{ia}^{\text{eff}}$ ,  $g_{ia}^{\text{eff}}$  матриц пьезомодулей  $\mathbf{d}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{g}^{\text{eff}}$  определяются по формулам:  $\mathbf{g}^{\text{eff}} = (\boldsymbol{\varepsilon}^{T\text{eff}})^{-1} \cdot \mathbf{d}^{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{d}^{\text{eff}} = \mathbf{e}^{\text{eff}} \cdot (\mathbf{c}^{E\text{eff}})^{-1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^{T\text{eff}} = \boldsymbol{\varepsilon}^{S\text{eff}} + \mathbf{d}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{e}^{\text{eff}T}$ .

В завершение раздела обсудим проблемы точности вычислений эффективных модулей. Как отмечалось выше, расчеты проводились для представительных объемов с числом базовых ячеек  $n_a$ , равным 15. В таких объемах всего содержалось  $n_c = n_a^3 = 3375$  ячеек,  $8n_c = 27000$  конечных элементов, 29791 узлов и  $N = 97556$  активных степеней свободы. При этом в  $N$  не учитываются степени свободы в расположенных на границе представительного объема  $\Gamma$  узлах, в которых значения перемещений и потенциала, согласно (4), являются заданными. Со значением этого числа совпадает размерность

системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При  $n_a = 20$  размерность СЛАУ возрастает до  $N = 237276$ , а при  $n_a = 25$  — до  $N = 470596$ . Поскольку получение полного набора эффективных модулей для одного варианта композита, в соответствии с задачами I–V, требует 5-кратного решения СЛАУ размерностью  $N$ , то расчеты с  $n_a = 20$  и большим числом базовых ячеек достаточно затратны. К тому же, максимальная относительная разность значений наиболее сильно изменяющегося эффективного модуля  $c_{44}^{eff}$ , вычисленного при  $p_e = 25\%$ ,  $v_{sp} = v_{lp}$ ,  $\kappa_d = 2$ , составляет: 2% для представительных объемов с  $n_a = 10$  и  $n_a = 15$ ; 1% для объемов с  $n_a = 15$  и  $n_a = 20$ ; 0,6% для объемов с  $n_a = 20$  и  $n_a = 25$ .

Кроме того, были проведены оценки погрешности вследствие случайности выбора в представительных объемах элементов–включений и элементов–пор. Для этого программа, используемая для расчета, при одинаковых входных данных выполнялись несколько раз. В результате работы генератора случайных чисел пакета ANSYS получались представительные объемы с различным расположением включений и пор. Так, для  $n_a = 15$ ,  $p_e = 25\%$ ,  $v_{sp} = v_{lp}$ ,  $\kappa_d = 2$  при пяти запусках программы максимальная относительная погрешность вычисления однотипных модулей не превосходила 1%.

Наконец, в процессе расчетов проверялось, имеет ли сформированная гомогенная среда гексагональную анизотропию. Так, при  $n_a = 15$ ,  $p_e = 25\%$ ,  $v_{sp} = v_{lp}$ ,  $\kappa_d = 2$  было установлено, что величины одних и тех же модулей жесткости и пьезомодулей  $e_{31}^{eff}$ ,  $e_{33}^{eff}$ , найденные из решений задач I–V, отличались с относительной погрешностью 2,5%, а равенство пьезомодулей  $e_{15}^{eff}$ , рассчитанных в задачах III и IV, с максимальной относительной погрешностью 5%.

Таким образом, можно заключить, что при представительном объеме с 15 элементами вдоль одной из осей достигается достаточно хороший баланс между точностью и быстротой компьютерных вычислений.

## 5. Заключение

Представленный подход позволяет провести численно сравнительный анализ свойств двухфазных и трехфазных смесевых пьезокомпозитов, состоящих из пьезокерамической матрицы, включений и пор. Разные варианты разработанных алгоритмов формирования представительных объемов предназначены для моделирования пьезокомпозитов следующей структуры:

- с упругими включениями и порами, сравнимыми по размерам с включениями (мезопорами);
- с упругими включениями и порами, значительно меньшими по размерам, чем включения (с микропорами);
- с упругими включениями и порами различных размеров (со смешанной микро- и мезопористостью).

И хотя выбранная форма представительного объема с гексаэдральными 20-узловыми конечными элементами не может точно описать реальные структуры смесевых пьезокомпозитов [1–12, 37, 38], однако она позволяет с достаточной для практики точностью определять эффективные модули, что для двухфазных пьезокомпозитов отмечалось в [16, 21, 22, 27, 28].

Численные результаты для пористой корундовой пьезокерамики, полученные в данной работе и в [33], свидетельствуют, что размеры пор наиболее существенно влияют на эффективные модули жесткости и в меньшей степени сказываются на эффективных пьезомодулях и диэлектрических проницаемостях.

Уточнение результатов численного моделирования может быть достигнуто при более сложных структурах представительных объемов (на нерегулярных сетках конечных элементов), при учете неплотногo прилегания включений и пьезокерамической матрицы, наличии трещин [39], неоднородной поляризации пьезокерамики в окрестности включений и пор [40–44].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 16-58-48009).

## Литература

1. Liu Y.G., Jia D.C., Zhou Y. Microstructure and mechanical properties of a lithium tantalate-dispersed-alumina ceramic composite // *Ceram. Int.* 2002. Vol. 28. P. 111-114. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(01\)00065-7](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(01)00065-7)
2. Yang B., Chen X.M. Alumina ceramics toughened by a piezoelectric secondary phase // *J. Eur. Ceram. Soc.* 2000. Vol. 20. P. 1687-1690. [https://doi.org/10.1016/S0955-2219\(00\)00049-2](https://doi.org/10.1016/S0955-2219(00)00049-2)
3. Borzov P.A., Filippov S.E., Topolov V.Yu., Brill O.E., Panich A.E. Elastic properties and frequency characteristics of a piezo-active 3–0-type corundum-containing composite // *Adv. Compos. Hybrid Mater.* 2018. Vol. 1. P. 558-566. <https://doi.org/10.1007/s42114-018-0039-0>
4. Borzov P.A., Filippov S.E., Topolov V.Yu., Brill O.E., Panich A.E. Piezoelectric properties and related parameters of a novel 3–0-type composite // *Funct. Mater. Lett.* 2018. Vol. 11. P. 1850082. <https://doi.org/10.1142/S1793604718500820>

5. Borzov P.A., Topolov V.Yu., Bowen C.R. Relations between the piezoelectric performance and quality factors in a corundum-containing composite // *Mater. Chem. Phys.* 2019. Vol. 233. P. 194-202. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2019.05.019>
6. Hwang H.J., Sekino T., Ota K., Niihara K. Perovskite type BaTiO<sub>3</sub> ceramics containing particulate SiC: Part I. Structure variation and phase transformation // *J. Mater. Sci.* 1996. Vol. 31. P. 4617-4624. <https://doi.org/10.1007/BF00366360>
7. Hwang H.J., Niihara K. Perovskite type BaTiO<sub>3</sub> ceramics containing particulate SiC: Part II Microstructure and mechanical properties // *J. Mater. Sci.* 1998. Vol. 33. P. 549-558. <https://doi.org/10.1023/A:1004365006839>
8. Malič B., Kosec M., Kosmač T. Mechanical and electrical properties of PZT-ZrO<sub>2</sub> composites // *Ferroelectrics*. 1992. Vol. 129. P. 147-155. <https://doi.org/10.1080/00150199208016985>
9. Rybyanets A.N., Rybyanets A.A. Ceramic piezocomposites: Modeling, technology, and characterization // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 2011. Vol. 58. P. 1757-1773. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2011.2013>
10. Rybyanets A.N., Konstantinov G.M., Naumenko A.A., Shvetsova N.A., Makar'ev D.I., Lugovaya M.A. Elastic, dielectric, and piezoelectric properties of ceramic lead zirconate titanate/ $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites // *Phys. Solid. State*. 2015. Vol. 57. P. 527-530. <https://doi.org/10.1134/S1063783415030270>
11. Thommerel E., Madigou V., Villain S., Musso J., Valmalette J.-C., Gavarri J.-R. Microstructure modifications and modulated piezoelectric responses in PLZT/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites // *Mat. Sci. Eng. B*. 2003. Vol. 97. P. 74-82. [https://doi.org/10.1016/S0921-5107\(02\)00407-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5107(02)00407-5)
12. Xiang P.-H., Dong X.-L., Chen H., Zhang Z., Guo J.-K. Mechanical and electrical properties of small amount of oxides reinforced PZT ceramics // *Ceram. Int.* 2003. Vol. 29. P. 499-503. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(02\)00193-1](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(02)00193-1)
13. *IEEE Standard on piezoelectricity*. ANSI-IEEE Std. 176-1987. New York: IEEE, 1988. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>
14. Newnham R.E., Skinner D.P., Cross L.E. Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites // *Mater. Res. Bull.* 1978. Vol. 13. P. 525-536. [https://doi.org/10.1016/0025-5408\(78\)90161-7](https://doi.org/10.1016/0025-5408(78)90161-7)
15. Banno H. Effects of porosity on dielectric, elastic, and electromechanical properties of Pb(Zr,Ti)O<sub>3</sub> ceramics with open pores: A theoretical approach // *Jpn. J. Appl. Phys.* 1993. Vol. 32. P. 4214-4217. <https://doi.org/10.1143/JJAP.32.4214>
16. Bowen C.R., Kara H. Pore anisotropy in 3-3 piezoelectric composites // *Mater. Chem. Phys.* 2002. Vol. 75. P. 45-49. [https://doi.org/10.1016/S0254-0584\(02\)00028-7](https://doi.org/10.1016/S0254-0584(02)00028-7)
17. Dunn M.L., Taya M. Electromechanical properties of porous piezoelectric ceramics // *J. Am. Ceram. Soc.* 1993. Vol. 76. P. 1697-1706. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1993.tb06637.x>
18. Dunn M.L., Taya M. Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites // *Int. J. Solid. Struct.* 1993. Vol. 30. P. 161-175. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90058-F](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90058-F)
19. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element modelling of ceramomatrix piezocomposites by using effective moduli method with different variants of boundary conditions // *Mater. Phys. Mech.* 2019. Vol. 42. P. 1-13. [https://doi.org/10.18720/MPM.4212019\\_1](https://doi.org/10.18720/MPM.4212019_1)
20. Iyer S., Alkhalder M., Venkatesh T.A. On the relationships between cellular structure, deformation modes and electromechanical properties of piezoelectric cellular solids // *Int. J. Solid. Struct.* 2016. Vol. 80. P. 73-83. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.10.024>
21. Iyer S., Venkatesh T.A. Electromechanical response of (3-0) porous piezoelectric materials: Effects of porosity shape // *J. Appl. Phys.* 2011. Vol. 110. 034109. <https://doi.org/10.1063/1.3622509>
22. Iyer S., Venkatesh T.A. Electromechanical response of (3-0, 3-1) particulate, fibrous, and porous piezoelectric composites with anisotropic constituents: A model based on the homogenization method // *Int. J. Solid. Struct.* 2014. Vol. 51. P. 1221-1234. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.008>
23. Kudimova A., Mikhayluts I., Nadolin D., Nasedkin A., Nasedkina A., Oganesyana P., Soloviev A. Computer design of porous and ceramic piezocomposites in the finite element package ACELAN // *Procedia Structural Integrity*. 2017. Vol. 6. P. 301-308. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2017.11.046>
24. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Oganesyana P.A., Soloviev A.N. Finite element homogenization models of bulk mixed piezocomposites with granular elastic inclusions in ACELAN package // *Mater. Phys. Mech.* 2018. Vol. 37. P. 25-33. [https://doi.org/10.18720/MPM.3712018\\_4](https://doi.org/10.18720/MPM.3712018_4)
25. Levassort F., Lethiecq M., Desmare R., Tran-Huu-Hue L.P. Effective electroelastic moduli of 3-3(3-0) piezocomposites // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. 1999. Vol. 46. P. 1028-1034. <https://doi.org/10.1109/58.775670>
26. Martinez-Ayuso G., Friswell M.I., Adhikari S., Khodaparast H.H., Berger H. Homogenization of porous piezoelectric materials // *Int. J. Solid. Struct.* 2017. Vol. 113-114. P. 218-229. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.03.003>
27. Nasedkin A.V., Shevtsova M.S. Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity // *Ferroelectrics and superconductors: Properties and applications* / Ed. I.A. Parinov. New York: Nova Science Publ., 2011. P. 231-254.
28. Nguyen B.V., Challagulla K.S., Venkatesh T.A., Hadjiloizi D.A., Georgiades A.V. Effects of porosity distribution and porosity volume fraction on the electromechanical properties of 3-3 piezoelectric foams // *Smart Mater. Struct.* 2016. Vol. 25. 125028. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/12/125028>
29. Odegard G.M. Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites // *Acta Mater.* 2004. Vol. 52. P. 5315-5330. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.07.037>
30. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозигов. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. 480 с.
31. Perry A., Bowen C.R., Mahon S.W. Finite element modelling of 3-3 piezocomposites // *Scripta Materialia*. 1999. Vol. 41. P. 1001-1007. [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(99\)00249-3](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(99)00249-3)
32. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Леценко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наукова Думка, 1989. 208 с.

34. Kudimova A., Nasedkin A. Analysis of porosity influence on the effective moduli of ceramic matrix PZT composite using the simplified finite element model // J. Adv. Dielectr. 2019. Vol. 9. 1950043. <https://doi.org/10.1142/S2010135X19500437>
34. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element study of ceramic matrix piezocomposites with mechanical interface properties by the effective moduli method with different types of boundary conditions // Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials / Ed. M. Sumbatyan. Springer, 2019. P. 163-179. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_12)
35. Iovane G., Nasedkin A.V. Numerical modelling of two-phase piezocomposites with interface mechanical anisotropic effects // Dynamical processes in generalized continua and structures / Eds. H. Altenbach, A. Belyaev, V. Eremeyev, A. Krivtsov, A. Porubov. Springer, 2019. P. 293-304. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1_16)
36. Наседкин А.В., Корниевский А.С. Конечно-элементное моделирование эффективных свойств анизотропных упругих материалов со случайной наноразмерной пористостью // Вычисл. мех. сплош. сред. 2017. Т. 10, № 4. С. 375-387. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.29>
37. Eichhorn F., Biggemann J., Kellermann S., Kawai A., Kato K., Kakimoto K., Fey T. Influence of cell size on mechanical and piezoelectric properties of PZT and LNK ceramic foams // Adv. Eng. Mater. 2017. Vol. 19. 1700420. <https://doi.org/10.1002/adem.201700420>
38. Kumar B.P., Rawal B., Rajan K.M. Characterization of high porous PZT piezoelectric ceramics by different techniques // Def. Sci. J. 2018. Vol. 68. P. 500-504. <https://doi.org/10.14429/dsj.68.12315>
39. Tajima K.-I., Hwang H.J., Sando M., Niihara K. Electric-field-induced crack growth behavior in PZT/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites // J. Am. Ceram. Soc. 2000. Vol. 83. P. 651-653. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.2000.tb01248.x>
40. Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganessian P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package // Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials / Ed. M. Sumbatyan. Springer, 2019. P. 13-131. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_8)
41. Lewis R.W.C., Dent A.C.E., Stevens R., Bowen C.R. Microstructural modelling of the polarization and properties of porous ferroelectrics // Smart Mater. Struct. 2011. Vol. 20. 085002. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/8/085002>
42. Martínez-Ayuso G., Friswell M.L., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R. Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization // Acta Mater. 2019. Vol. 173. P. 332-341. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.04.021>
43. Nan C.-W., Weng G.J. Influence of polarization orientation on the effective properties of piezoelectric composites // J. Appl. Phys. 2000. Vol. 88. P. 416-423. <https://doi.org/10.1063/1.373675>
44. Zhang Y., Roscow J., Lewis R., Khanbareh H., Topolov V.Yu., Xie M., Bowen C.R. Understanding the effect of porosity on the polarisation-field response of ferroelectric materials // Acta Mater. 2018. Vol. 154. P. 100-112. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2018.05.007>

## References

1. Liu Y.G., Jia D.C., Zhou Y. Microstructure and mechanical properties of a lithium tantalate-dispersed-alumina ceramic composite. *Ceram. Int.*, 2002, vol. 28, pp. 111-114. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(01\)00065-7](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(01)00065-7)
2. Yang B., Chen X.M. Alumina ceramics toughened by a piezoelectric secondary phase. *J. Eur. Ceram. Soc.*, 2000, vol. 20, pp. 1687-1690. [https://doi.org/10.1016/S0955-2219\(00\)00049-2](https://doi.org/10.1016/S0955-2219(00)00049-2)
3. Borzov P.A., Filippov S.E., Topolov V.Yu., Brill O.E., Panich A.E. Elastic properties and frequency characteristics of a piezo-active 3-0-type corundum-containing composite. *Adv. Compos. Hybrid Mater.*, 2018, vol. 1, pp. 558-566. <https://doi.org/10.1007/s42114-018-0039-0>
4. Borzov P.A., Filippov S.E., Topolov V.Yu., Brill O.E., Panich A.E. Piezoelectric properties and related parameters of a novel 3-0-type composite. *Funct. Mater. Lett.*, 2018, vol. 11, 1850082. <https://doi.org/10.1142/S1793604718500820>
5. Borzov P.A., Topolov V.Yu., Bowen C.R. Relations between the piezoelectric performance and quality factors in a corundum-containing composite. *Mater. Chem. Phys.*, 2019, vol. 233, pp. 194-202. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2019.05.019>
6. Hwang H.J., Sekino T., Ota K., Niihara K. Perovskite type BaTiO<sub>3</sub> ceramics containing particulate SiC: Part I. Structure variation and phase transformation. *J. Mater. Sci.*, 1996, vol. 31, pp. 4617-4624. <https://doi.org/10.1007/BF00366360>
7. Hwang H.J., Niihara K. Perovskite type BaTiO<sub>3</sub> ceramics containing particulate SiC: Part II Microstructure and mechanical properties. *J. Mater. Sci.*, 1998, vol. 33, pp. 549-558. <https://doi.org/10.1023/A:1004365006839>
8. Malič B., Kosec M., Kosmač T. Mechanical and electrical properties of PZT-ZrO<sub>2</sub> composites. *Ferroelectrics*, 1992, vol. 129, pp. 147-155. <https://doi.org/10.1080/00150199208016985>
9. Rybyanets A.N., Rybyanets A.A. Ceramic piezocomposites: Modeling, technology, and characterization. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, 2011, vol. 58, pp. 1757-1773. <https://doi.org/10.1109/TUFFC.2011.2013>
10. Rybyanets A.N., Konstantinov G.M., Naumenko A.A., Shvetsova N.A., Makar'ev D.I., Lugovaya M.A. Elastic, dielectric, and piezoelectric properties of ceramic lead zirconate titanate/ $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites. *Phys. Solid. State*, 2015, vol. 57, pp. 527-530. <https://doi.org/10.1134/S1063783415030270>
11. Thommerel E., Madigou V., Villain S., Musso J., Valmalette J.-C., Gavarrri J.-R. Microstructure modifications and modulated piezoelectric responses in PLZT/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites. *Mat. Sci. Eng. B*, 2003, vol. 97. pp. 74-82. [https://doi.org/10.1016/S0921-5107\(02\)00407-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5107(02)00407-5)
12. Xiang P.-H., Dong X.-L., Chen H., Zhang Z., Guo J.-K. Mechanical and electrical properties of small amount of oxides reinforced PZT ceramics. *Ceram. Int.*, 2003, vol. 29, pp. 499-503. [https://doi.org/10.1016/S0272-8842\(02\)00193-1](https://doi.org/10.1016/S0272-8842(02)00193-1)
13. *IEEE Standard on piezoelectricity*. ANSI-IEEE Std. 176-1987. New York: IEEE, 1988. <https://doi.org/10.1109/IEEESTD.1988.79638>

15. Newnham R.E., Skinner D.P., Cross L.E. Connectivity and piezoelectric-pyroelectric composites. *Mater. Res. Bull.*, 1978, vol. 13, pp. 525-536. [https://doi.org/10.1016/0025-5408\(78\)90161-7](https://doi.org/10.1016/0025-5408(78)90161-7)
15. Banno H. Effects of porosity on dielectric, elastic, and electromechanical properties of  $\text{Pb}(\text{Zr,Ti})\text{O}_3$  ceramics with open pores: A theoretical approach. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 1993, vol. 32, pp. 4214-4217. <https://doi.org/10.1143/JJAP.32.4214>
16. Bowen C.R., Kara H. Pore anisotropy in 3–3 piezoelectric composites. *Mater. Chem. Phys.*, 2002, vol. 75, pp. 45-49. [https://doi.org/10.1016/S0254-0584\(02\)00028-7](https://doi.org/10.1016/S0254-0584(02)00028-7)
17. Dunn M.L., Taya M. Electromechanical properties of porous piezoelectric ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1993, vol. 76, pp. 1697-1706. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1993.tb06637.x>
18. Dunn M.L., Taya M. Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites. *Int. J. Solid. Struct.*, 1993, vol. 30, pp. 161-175. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(93\)90058-F](https://doi.org/10.1016/0020-7683(93)90058-F)
19. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element modelling of ceramomatrix piezocomposites by using effective moduli method with different variants of boundary conditions. *Mater. Phys. Mech.*, 2019, vol. 42, pp. 1-13. [https://doi.org/10.18720/MPM.4212019\\_1](https://doi.org/10.18720/MPM.4212019_1)
20. Iyer S., Alkxhader M., Venkatesh T.A. On the relationships between cellular structure, deformation modes and electromechanical properties of piezoelectric cellular solids. *Int. J. Solid. Struct.*, 2016, vol. 80, pp. 73-83. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.10.024>
21. Iyer S., Venkatesh T.A. Electromechanical response of (3–0) porous piezoelectric materials: Effects of porosity shape. *J. Appl. Phys.*, 2011, vol. 110, 034109. <https://doi.org/10.1063/1.3622509>
22. Iyer S., Venkatesh T.A. Electromechanical response of (3–0, 3–1) particulate, fibrous, and porous piezoelectric composites with anisotropic constituents: A model based on the homogenization method. *Int. J. Solid. Struct.*, 2014, vol. 51, pp. 1221-1234. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.12.008>
23. Kudimova A., Mikhayluts I., Nadolin D., Nasedkin A., Nasedkina A., Oganessian P., Soloviev A. Computer design of porous and ceramic piezocomposites in the finite element package ACELAN. *Procedia Structural Integrity*, 2017, vol. 6, pp. 301-308. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2017.11.046>
24. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Oganessian P.A., Soloviev A.N. Finite element homogenization models of bulk mixed piezocomposites with granular elastic inclusions in ACELAN package. *Mater. Phys. Mech.*, 2018, vol. 37, pp. 25-33. [https://doi.org/10.18720/MPM.3712018\\_4](https://doi.org/10.18720/MPM.3712018_4)
25. Levassort F., Lethiecq M., Desmare R., Tran-Huu-Hue L.P. Effective electroelastic moduli of 3-3(3-0) piezocomposites. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control.*, 1999, vol. 46, pp. 1028-1034. <https://doi.org/10.1109/58.775670>
26. Martinez-Ayuso G., Friswell M.I., Adhikari S., Khodaparast H.H., Berger H. Homogenization of porous piezoelectric materials. *Int. J. Solid. Struct.*, 2017, vol. 113-114, pp. 218-229. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.03.003>
27. Nasedkin A.V., Shevtsova M.S. Improved finite element approaches for modeling of porous piezocomposite materials with different connectivity. *Ferroelectrics and superconductors: Properties and applications*, ed. I.A. Parinov. New York: Nova Science Publ., 2011. P. 231-254.
28. Nguyen B.V., Challagulla K.S., Venkatesh T.A., Hadjiloizi D.A., Georgiades A.V. Effects of porosity distribution and porosity volume fraction on the electromechanical properties of 3–3 piezoelectric foams. *Smart Mater. Struct.*, 2016, vol. 25, 125028. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/25/12/125028>
29. Odegard G.M. Constitutive modeling of piezoelectric polymer composites. *Acta Mater.*, 2004, vol. 52, pp. 5315–5330. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2004.07.037>
30. Pan'kov A.A. *Statisticheskaya mekhanika p'yezokompozitov* [Statistical mechanics of piezocomposites]. Perm, Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta, 2009. 480 p.
31. Perry A., Bowen C.R., Mahon S.W. Finite element modelling of 3-3 piezocomposites. *Scripta Materialia*, 1999, vol. 41, pp. 1001-1007. [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(99\)00249-3](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(99)00249-3)
32. Khoroshchn L.P., Maslov B.P., Leshchenko P.V. *Prognozirovaniye effektivnykh svoystv p'yezoaktivnykh kompozitnykh materialov* [Prediction of the effective properties of piezoelectric composite materials]. Kiev, Naukova Dumka, 1989. 208 p.
33. Kudimova A., Nasedkin A. Analysis of porosity influence on the effective moduli of ceramic matrix PZT composite using the simplified finite element model. *J. Adv. Dielectr.*, 2019, vol. 9, 1950043. <https://doi.org/10.1142/S2010135X19500437>
34. Iovane G., Nasedkin A.V. Finite element study of ceramic matrix piezocomposites with mechanical interface properties by the effective moduli method with different types of boundary conditions. *Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials*, ed. M. Sumbatyan. Springer, 2019. P. 163-179. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_12)
35. Iovane G., Nasedkin A.V. Numerical modelling of two-phase piezocomposites with interface mechanical anisotropic effects. *Dynamical processes in generalized continua and structures*, eds. H. Altenbach, A. Belyaev, V. Eremeyev, A. Krivtsov, A. Porubov. Springer, 2019. P. 293-304. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-11665-1_16)
36. Nasedkin A.V., Kornievsky A.S. Finite element modeling of effective properties of elastic materials with random nanosized porosities. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2017, vol. 10, no. 4, pp. 375-387. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.29>
37. Eichhorn F., Biggemann J., Kellermann S., Kawai A., Kato K., Kakimoto K., Fey T. Influence of cell size on mechanical and piezoelectric properties of PZT and LNKN ceramic foams. *Adv. Eng. Mater.*, 2017, vol. 19, 1700420. <https://doi.org/doi/10.1002/adem.201700420>
38. Kumar B.P., Rawal B., Rajan K.M. Characterization of high porous PZT piezoelectric ceramics by different techniques. *Def. Sci. J.*, 2018, vol. 68, pp. 500-504. <https://doi.org/10.14429/dsj.68.12315>

39. Tajima K.-I., Hwang H.J., Sando M., Niihara K. Electric-field-induced crack growth behavior in PZT/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composites. *J. Am. Ceram. Soc.*, 2000, vol. 83, pp. 651-653. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.2000.tb01248.x>
40. Gerasimenko T.E., Kurbatova N.V., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganesyana P.A., Skaliukh A.S., Soloviev A.N. Homogenization of piezoelectric composites with internal structure and inhomogeneous polarization in ACELAN-COMPOS finite element package. *Wave dynamics, mechanics and physics of microstructured metamaterials*, ed. M. Sumbatyan. Springer, 2019. P. 13-131. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17470-5_8)
41. Lewis R.W.C., Dent A.C.E., Stevens R., Bowen C.R. Microstructural modelling of the polarization and properties of porous ferroelectrics. *Smart Mater. Struct.*, 2011, vol. 20, 085002. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/20/8/085002>
42. Martínez-Ayuso G., Friswell M.I., Khodaparast H.H., Roscow J.I., Bowen C.R. Electric field distribution in porous piezoelectric materials during polarization. *Acta Mater.*, 2019, vol. 173, pp. 332-341. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.04.021>
43. Nan C.-W., Weng G.J. Influence of polarization orientation on the effective properties of piezoelectric composites. *J. Appl. Phys.*, 2000, vol. 88, pp. 416-423. <https://doi.org/10.1063/1.373675>
44. Zhang Y., Roscow J., Lewis R., Khanbareh H., Topolov V.Yu., Xie M., Bowen C.R. Understanding the effect of porosity on the polarisation-field response of ferroelectric materials. *Acta Mater.*, 2018, vol. 154, pp. 100-112. <https://doi.org/doi:10.1016/j.actamat.2018.05.007>

Поступила в редакцию 05.03.2020; после доработки 18.03.2020; принята к опубликованию 19.03.2020

---

Сведения об авторах

Кудимова Анна Богдановна, асп., Южный федеральный университет (ЮФУ), 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, д. 8а; e-mail: kudianna@list.ru

Наседкин Андрей Викторович, дфмн, проф., зав. каф., ЮФУ; e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru