

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.1.3](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.1.3)

УДК 536.2.081.7

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ШАРОВИДНЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

А.А. Черных, А.М. Шмырин

*Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация*

В свете недостатков определения коэффициента теплопроводности композитных материалов встаёт вопрос о создании более совершенных методов расчёта, учитывающих геометрию дисперсных включений и их свойства, то есть методов отыскания теплопроводных параметров композита в целом с учётом свойств его компонентов и их взаимного расположения. В работе получена аналитическая формула для вычисления коэффициента теплопроводности композита, которая содержит отношение коэффициентов теплопроводности основного материала (матрицы) и материала наполнителя. При этом модель основывается на изменении термического сопротивления на границе «матрица–дисперсное включение» и использовании здесь осредненных значений параметров. Рассматривается несколько широко известных моделей, разработанных за последнее время отечественными и зарубежными исследователями, позволяющих вычислять коэффициенты теплопроводности таких композитов. Приводятся результаты для их сравнения с аналитической зависимостью, построенной авторами данной работы. Уточняются интервалы применимости этой зависимости при различных отношениях коэффициентов теплопроводности материалов включения и матрицы. Основная цель проделанных исследований – это попытка восполнить дефицит информации о теплопроводности композитных материалов с шаровидным наполнителем. Так как материалы, применяющиеся в промышленности, содержат по большей части включения с различными геометрическими характеристиками, применяется методика эквивалентных объёмов для сведения многообразных форм включений к требуемому шарообразному виду, что позволяет находить изменение коэффициентов теплопроводности материалов матрицы и наполнителя при различающихся физических параметрах. Представлены зависимости коэффициента теплопроводности композитных материалов от объёмного содержания сферического включения, установленные численно по предложенной модели и взятые у других исследователей. Из их сравнения видно, что при относительно небольших значениях коэффициента теплопроводности материала шаровидного включения и его диаметра результаты довольно хорошо согласуются между собой.

*Ключевые слова:* композит, включения, термическое сопротивление, теплопроводность, тепловой поток, вычислительные эксперименты

## INVESTIGATION OF THE THERMAL CONDUCTIVITY OF COMPOSITE MATERIALS WITH A SPHERICAL FILLER

A.A. Chernykh and A.M. Shmyrin

*Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russian Federation*

In the light of the disadvantages of existing methods for determining the thermal conductivity of composite materials, the major practical issue is the need for creating more advanced calculation methods that take into account the geometry of the dispersed inclusions and their properties, i.e., those capable of evaluating the heat-conducting parameters of the composite with consideration of the properties of its components and their relative positions. In this paper, the analytical formulas, containing the ratio of the thermal conductivity coefficients of the base material and the filler, are derived for calculating the thermal conductivity of composite. The proposed model uses averaging of parameters at the "matrix-dispersed inclusion" phase boundary. We consider several well-known models developed by domestic and foreign researchers in recent years, which allows us to calculate the coefficient of thermal conductivity of such composites. The results of comparison of these models with the analytical dependence obtained in this paper are presented, and its applicability intervals are specified for different ratios of the inclusion thermal conductivity coefficient and the matrix material. The main goal is to fill the lack of information on thermal conductivity of spherical filler composites. The model considered in this paper is based on a change in the thermal resistance at the phase boundary. Since most materials used in industry contain inclusions with different geometric characteristics, then it is necessary to use the equivalent volume method – the reduction of various geometric inclusions to a given spherical one – which makes it possible to determine a change in the thermal conductivity coefficient for different physical and geometric values of the matrix material and filler. Various dependences of the change in the thermal conductivity coefficient of composite materials on the volume content of the spherical inclusion are compared with the numerical and experimental results. The analytical dependence given in this paper is consistent with the experimental and numerical results for relatively small values of the thermal conductivity coefficient and the inclusion diameter.

*Key words:* composite, inclusions, thermal resistance, thermal conductivity, thermal flux, computational experiments

### 1. Введение

Для многих отраслей промышленности представляет интерес исследование материалов, которые содержат различного рода дисперсные включения. Интерес продиктован рядом проблем, имеющих как при определении теплопроводности, так и в методах расчёта. Оптимальным был бы учёт всех факторов: размера дисперсионных включений, их формы, пористости композита, термического сопротивления на границе двух фаз и другого [1–5].

Эффективные характеристики композитных материалов обычно устанавливаются или путём теплофизических измерений, или по аналитическим зависимостям. Впервые аналитические формулы

для вычисления эффективных коэффициентов теплопроводности при различных концентрациях включений и отношениях теплопроводностей были представлены Максвеллом [1], Мередитом [2–4], Релеем [3] и Бруггеманом [3, 4]. Большое количество моделей рассмотрено в работах [5–9].

Другой подход к решению задачи определения эффективных коэффициентов позволяет реализовать численную гомогенизацию. Методы численной гомогенизации условно можно разделить на три класса: 1) методы, использующие теорию осреднения дифференциальных операторов; их основным недостатком является невозможность учёта сложной структуры наполнителя, и поэтому они могут применяться только при равномерном распределении включений; 2) методы на основе конечно-элементных или конечно-разностных дискретизаций исходных дифференциальных операторов; но их использование на практике затруднено из-за катастрофически возрастающей размерности дискретных аналогов реальной задачи и к тому же может приводить к потере точности решения системы линейных алгебраических уравнений и увеличению времени расчётов; 3) многомасштабные конечно-элементные методы — класс методов, отличающихся от классического специальной процедурой построения базисных функций; он позволяет разработать вычислительную схему с высокой степенью параллелизации, что обеспечивает значительное сокращение времени решения дискретной задачи без потери точности вычисления эффективного коэффициента; полученные с их помощью результаты сравниваются затем с опытными данными для различного расположения включений и делается вывод об адекватности/неадекватности модели и устанавливаются границы применимости построенных аналитических формул [6].

В [5] отмечается, что «...в публикациях, посвящённых исследованию гетерогенных структур, частицы наполнителя образуют агрегаты и агломераты, а при наличии нескольких соединений наполнителя — конгломераты. ...На практике согласие известных аналитических формул эффективной теплопроводности и экспериментальных данных, за исключением модельных экспериментов, достигается путём конструирования формул с использованием метода инверсии компонентов и определения эффективной теплопроводности агломератов наполнителя [3]». Такой метод может быть применен и для включений, форма которых отлична от сферической [6, 7].

Задача теплопроводности в гетерогенных материалах математически аналогична задачам электропроводности, диэлектрической проницаемости и магнитной проницаемости [10, 11]. Их изучение восходит к ранним работам Максвелла [1]. Позднее предложено множество моделей, позволяющих прогнозировать эффективную теплопроводность у различных типов композиционных материалов при достаточно высоких значениях коэффициента теплопроводности наполнителя [12]. В большинстве ранних моделей межфазное тепловое сопротивление в композитах не учитывалось. Однако в последующем выяснилось, что термическое сопротивление может оказывать большое влияние на свойства композитов [6, 9, 12–15]. Первые выражения для теплопроводности композиционных материалов были получены путём модификации оригинальной модели Максвелла [13–16].

При прохождении тепла через границу раздела между компонентами композита происходит падение температуры. Это возмущение теплового потока можно назвать термическим сопротивлением и представить как сумму межфазного и граничного термических сопротивлений, последнее из которых возникает из-за различий физических свойств составляющих композит материалов. В случае неучёта термического сопротивления соотношения для расчёта коэффициента теплопроводности композитов дают их приближённые значения [17].

Межфазное тепловое сопротивление возникает по многим причинам, таким как относительная шероховатость поверхности включений, неоднородность распределения наполнителя и плохое химическое или механическое сцепление компонентов [12], что приводит к скачку температуры на границе раздела «включение—основной материал». Такое межфазное тепловое сопротивление снижает теплопроводность композитов. Важным фактором является и то, что теплопроводность матрицы (основного материала) анизотропна, то есть она зависит от направления приложенного теплового потока.

Экспериментальные исследования дисперсных композитов показывают, что добавление проводящих частиц повышает их эффективную теплопроводность [18, 19]. С уменьшением среднего радиуса частиц эффективная теплопроводность уменьшается, а площадь межфазного контакта на единицу объёма включения увеличивается. По-видимому, в таких случаях термическое сопротивление начинает играть значительную роль в общем процессе теплопередачи [20].

Стоит отметить, что Максвелл первым вывел аналитические выражения для эффективной проводимости гетерогенной среды и опубликовал в своей знаменитой работе по электричеству и магнетизму [1]. Он рассмотрел проблему тепловой проводимости включений, вложенных в непрерывную матрицу. Модель Максвелла предполагает отсутствие теплового взаимодействия между дисперсными включениями, то есть тепловым взаимодействием между частицами наполнителя она пренебрегает.

Поскольку теплопроводность композита зависит от теплопроводности составляющих его материалов и их взаимного расположения, то можно оптимизировать это свойство путём структурного проектирования. Компьютерное моделирование стало важным подходом в разработке материалов с различного рода наполнителями, позволяющим уменьшить стоимость и сроки их внедрения в производство. Поэтому создаются программные комплексы проектирования материалов с дисперсными включениями,

обладающих требуемой теплопроводностью, базирующиеся на подборе компонентов, и эти «...комплексы могут быть эффективным инструментом поддержки принятия решений при проектировании конструкций и прогнозировании их свойств» [20, 21].

Значительный прогресс за последние годы и в аналитическом описании таких материалов [4–11, 22]. Стало возможным учитывать разную форму включений и их ориентацию. Однако любая из представленных в названных работах формул использует относительно грубую модель гетерогенной среды, что сказывается на точности вычисления коэффициентов теплопроводности. Экспериментальные методы их определения также имеют ограничения (размер исследуемого образца, контрастность свойств системы «матрица–включение» и другое) [3–6, 9, 18, 19, 22, 23].

Итак, для проектирования и создания композитов с требуемыми характеристиками необходимо понимать и уметь прогнозировать их теплопроводность. Предшествующие многочисленные исследования были сосредоточены на отыскании свойств материалов композитов и основывались на численном моделировании [20–23]. К молекулярно-динамическому моделированию прибегали для прогнозирования теплопроводностей композитов, обладающих наноразмерными неоднородностями [22, 23].

Широкое распространение получили исследования композиционных материалов с наполнителем в виде металлических включений. Такое внимание объясняется недостаточностью информации о теплопроводности дисперсных материалов [3, 12–15]. В работе [3] рассматривались модели Максвелла, Бруггермана, Мередита и Оделевского. При этом в [4] сделан вывод, что при практических расчётах следует отдать предпочтение модели Максвелла.

Приведём формулу Максвелла, которая часто используется для расчёта относительного коэффициента теплопроводности  $\lambda$  в материале с определённой объёмной концентрацией  $\varphi$  шаровых включений [1, 3]:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\left(2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 2\varphi \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)}{\left(2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \varphi \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\right)}, \quad (1)$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — коэффициенты теплопроводности матрицы и дисперсных включений.

Для сферических же включений, из анализа экспериментальных данных при относительно небольших значениях коэффициента теплопроводности их материала и диаметра, Оделевским В.И. [2] предложена следующая эмпирическая формула для вычисления эффективного коэффициента теплопроводности:

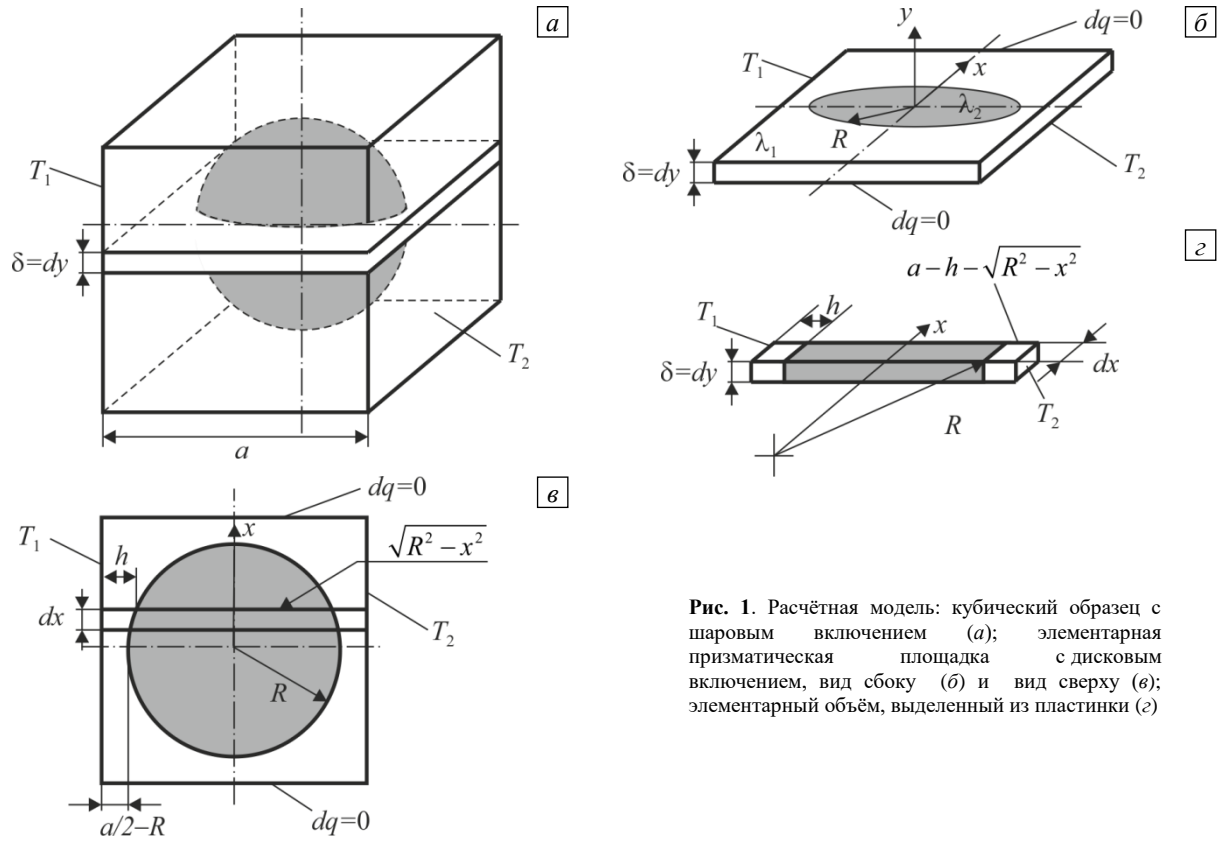
$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = 1 - \frac{\varphi}{1 / \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) - \frac{1 - \varphi}{3}}. \quad (2)$$

## 2. Метод вычисления коэффициента теплопроводности кубического образца с дисперсным включением

Зависимости Максвелла, Мередита и Оделевского учитывают занимаемый дисперсной фазой объём. Но необходимо предложить модель, которая будет удовлетворять всем вышеперечисленным критериям, а именно принимать в расчёт размер дисперсионных включений, их форму, пористость композита, термическое сопротивление на границе двух фаз. Для этого возьмём кубический образец с длиной ребра  $a$ , в котором расположено шаровое включение радиусом  $R$  (Рис. 1а). Коэффициент теплопроводности материала образца (матрицы)  $\lambda_1$ , а  $\lambda_2$  — коэффициент теплопроводности дисперсного шарового включения. Боковые, верхние и нижние грани образца изолированы, чтобы пренебречь потерями. Температура левой плоскости составляет  $T_1$ , правой —  $T_2$ . Выделим из куба элементарную площадку (на рисунке 1а показана ее толщина  $dy$ ), содержащую часть включения в виде диска (см. Рис. 1б). Далее, рассмотрим только область диска, которая ограничена горизонтальным диаметром включения  $2R$  и верхней частью линии окружности. Наконец, выделим ещё один элементарный объём из модели (см. Рис. 1в), который представляет собой призму с границами «основной материал–включение–основной материал» (Рис. 1г). На рисунке 1б представлена связанная с данной моделью декартова система координат с началом в центре включения.

Из закона Фурье для элементарного призматического объёма (Рис. 1в) равенство для дифференциала температуры запишем в форме, в которой фигурирует термическое сопротивление  $R_t$ :

$$dT = qdR_t.$$



**Рис. 1.** Расчётная модель: кубический образец с шаровым включением (а); элементарная призматическая площадка с дисковым включением, вид сбоку (б) и вид сверху (в); элементарный объём, выделенный из пластинки (г)

Тогда плотность теплового потока для элементарного объёма составит:

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_2} + \frac{a - 2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_1}}. \tag{3}$$

Для вычисления теплового потока  $Q$ , приложенного ко всей трёхмерной модели, умножим (3) на  $dx dy$  — площадь боковых элементарных площадок, температуры на которых соответственно, равны  $T_2$  и  $T_1$ :

$$dQ = q dx dy.$$

С учётом (3) это соотношение превратиться в дифференциальное уравнение вида:

$$dQ = \frac{(T_1 - T_2) dx dy}{\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_2} + \frac{a - 2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_1}},$$

после интегрирования которого найдём первообразную функцию теплового потока :

$$Q = \iint \frac{(T_1 - T_2) dx dy}{\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_2} + \frac{a - 2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_1}}.$$

Но так как толщина пластинки известна (примем, что  $dy = \delta$ ), запишем выражение для  $Q$  в виде определённого интеграла:

$$Q = 2\delta \int_0^R \frac{(T_1 - T_2) dx}{\frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_2} + \frac{a - 2\sqrt{R^2 - x^2}}{\lambda_1}}. \tag{4}$$

Взятые в интеграле пределы обусловлены тем, что учитываем две части диска: от  $-R$  до  $R$  (или от 0 до  $R$ , но домножаем на 2). После интегрирования из (4) получим формулу для вычисления коэффициента теплопроводности тонкой пластинки с дисковым включением (Рис. 1б):

$$\lambda = \frac{(a-2R)\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \left[ \pi - \frac{4a\lambda_2}{\sqrt{(a\lambda_2)^2 - (2R(\lambda_1-\lambda_2))^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a\lambda_2 - 2R(\lambda_1-\lambda_2)}{a\lambda_2 + 2R(\lambda_1-\lambda_2)}} \right]. \quad (5)$$

Запишем (5) при условии, что диаметр  $d = 2R$ , тогда

$$\lambda = \frac{(a-d)\lambda_1}{a} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \left[ \pi - \frac{4a\lambda_2}{\sqrt{(a\lambda_2)^2 - (d(\lambda_1-\lambda_2))^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a\lambda_2 - d(\lambda_1-\lambda_2)}{a\lambda_2 + d(\lambda_1-\lambda_2)}} \right]. \quad (6)$$

Для полной картины запишем соотношение (6) с учётом объёмной концентрации, в которой вклад от дискового включения составляет  $\varphi = \pi d^2 / (4a^2)$ :

$$\lambda = \left( 1 - \sqrt{\frac{4\varphi}{\pi}} \right) \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right)} \left[ \pi - \frac{4}{\sqrt{1 - \sqrt{\frac{4\varphi}{\pi}} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{4\varphi}{\pi}} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right)}{1 + \sqrt{\frac{4\varphi}{\pi}} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right)}} \right]. \quad (7)$$

Применимость формулы (6) ограничена условием  $\lambda_2/\lambda_1 < 0,4$ . При значениях отношения коэффициентов теплопроводности материалов компонентов композита, меньших 0,4, получаются мнимые значения относительного коэффициента теплопроводности. Поэтому требуется на основе численных и теоретических данных построить универсальные соотношения, которые позволят расширить интервал значений  $\lambda_2/\lambda_1$ . Подчеркнем, что соотношения (6) и (7) применимы лишь для тонких призматических образцов с дисковым включением (Рис. 1б).

Так как кубический образец на рисунке 1а по сути состоит из элементарных площадок, подобных приведённой на рисунке 1б, то необходимо просуммировать их от  $-R$  до  $R$  и учесть объёмы куба, которые не содержат включение. Тогда формула для вычисления относительного коэффициента теплопроводности кубического образца с дисперсным шаровым включением будет иметь следующий вид:

$$\lambda = \left( 1 - \frac{d}{a} \right) \lambda_1 + 2 \sum_0^d \frac{\delta \left( 1 - \frac{d}{a} \right) \lambda_1}{a} + \sum_0^d \frac{\lambda_1 \lambda_2 \delta}{a(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \left[ \pi - \frac{4\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2)^2 - \left( \frac{d}{a} (\lambda_1 - \lambda_2) \right)^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\lambda_2 - \frac{d}{a} (\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_2 + \frac{d}{a} (\lambda_1 - \lambda_2)}} \right], \quad (8)$$

С математической точки зрения соотношение (8) следует интегрировать в пределах от 0 до  $d$ . Но при этом оно получилось бы длинным и громоздким, им было бы трудно пользоваться в практических расчетах. Поэтому, для удобства, прибегают к эмпирическим соотношениям для расчёта коэффициента теплопроводности. Так, в работе [4] вместо (6) предложено несколько возможных эмпирических формул. Для уравнения (8), включающего объёмную концентрацию дисперсных включений, подобные эмпирические выражения выводятся достаточно просто, по аналогии с формулами для (6).

### 3. Численное исследование

С помощью программного комплекса ANSYS Fluent были вычислены распределения тепловых потоков и температурных полей в кубическом образце с шаровым включением (Рис. 1а) и плоской пластинке с дисковым включением (Рис. 1б). Физические условия кубического образца и пластинки полагались аналогичными: коэффициент теплопроводности материала матрицы составлял  $\lambda_1 = 50$  Вт/(м К), коэффициент теплопроводности материала дисперсного включения  $\lambda_2$  варьировался в интервале  $0,4 < \lambda_2/\lambda_1 < 16$ ; боковые стенки считались изолированными, а на плоскостях, с которых распространялся тепловой поток, имели место температуры: на левой —  $T_1 = 1000$  К, на правой —  $T_2 = 300$  К.

Сначала рассматривались плоские образцы постоянной толщины  $\delta/a = 0,02$  при различной геометрии включения:  $d/a = 0,2; 0,5; 0,75$ . После получения численным путём значений распределений тепловых полей по всей длине плоского образца производилось их сравнение с результатами, установленными по аналитической зависимости (8). На рисунке 2 приведены картины распределения плотности удельного теплового потока (Рис. 2а) и температурное поле (Рис. 2б) на поверхности плоского образца с дисковым включением при  $\lambda_2/\lambda_1 = 0,5$  и  $d/a = 0,5$ .

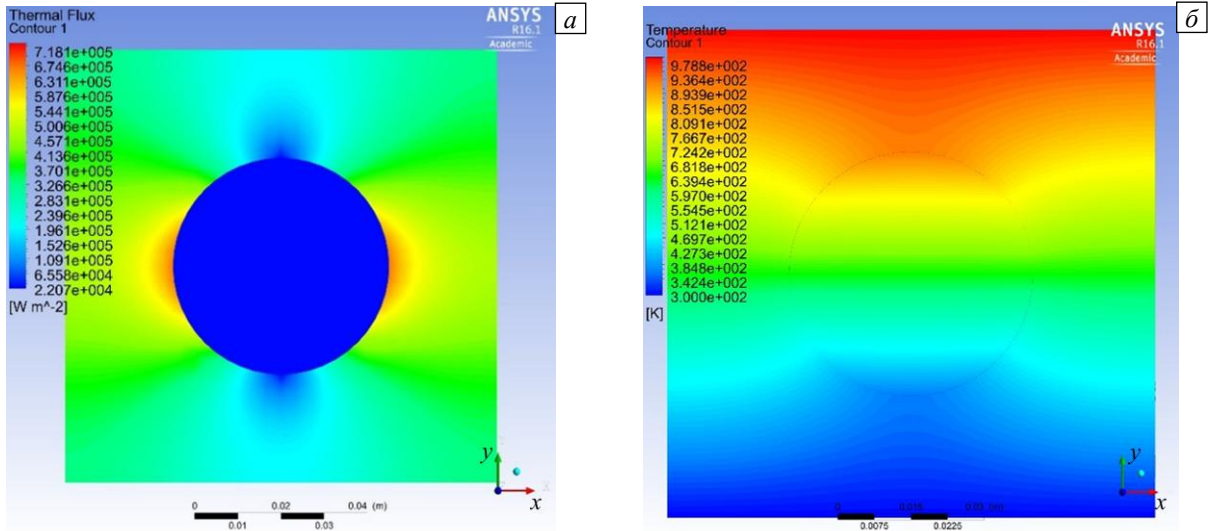


Рис. 2. Распределение плотности удельного теплового потока (а) и температурного поля (б) по всей поверхности пластинки при  $d/a = 0,5$  и  $\lambda_2/\lambda_1 = 0,5$

Распределения плотности удельного теплового потока для кубического образца с шаровым включением (трёхмерная модель, Рис. 1а) при двух значениях (0,2 и 15) отношения  $\lambda_2/\lambda_1$  и при  $d/a = 0,24; 0,5; 0,72$  приведены на рисунке 3а. Номера линий соответствуют сечениям (см. левый верхний угол), в которых авторами данной работы в пакете ANSYS Fluent проводились численные эксперименты по отысканию удельного теплового потока.

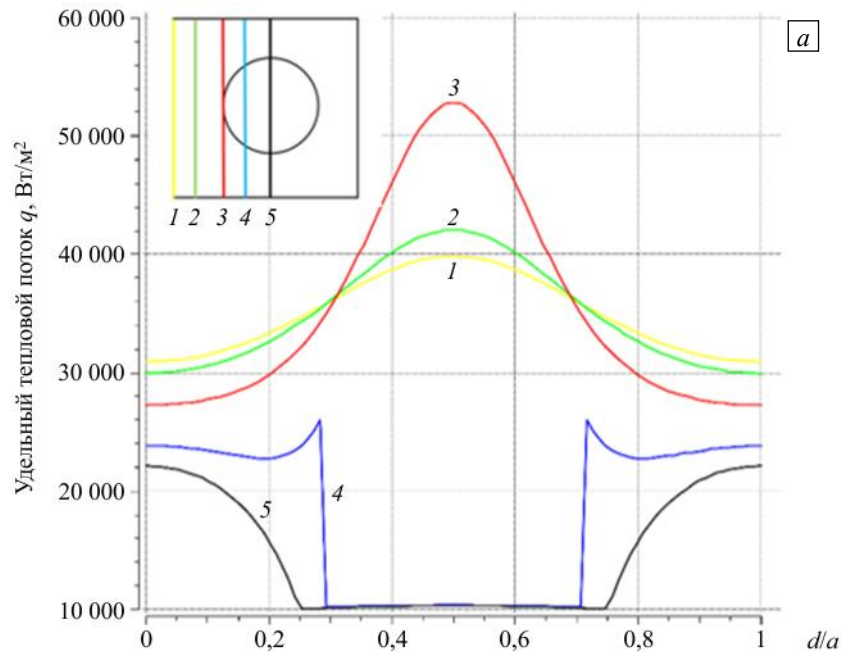


Рис. 3. Распределение плотности теплового потока по всей высоте образца в разных сечениях при  $d/a = 0,24; 0,72$  и отношении  $\lambda_2/\lambda_1 = 0,2$  (а),  $\lambda_2/\lambda_1 = 15$  (б)

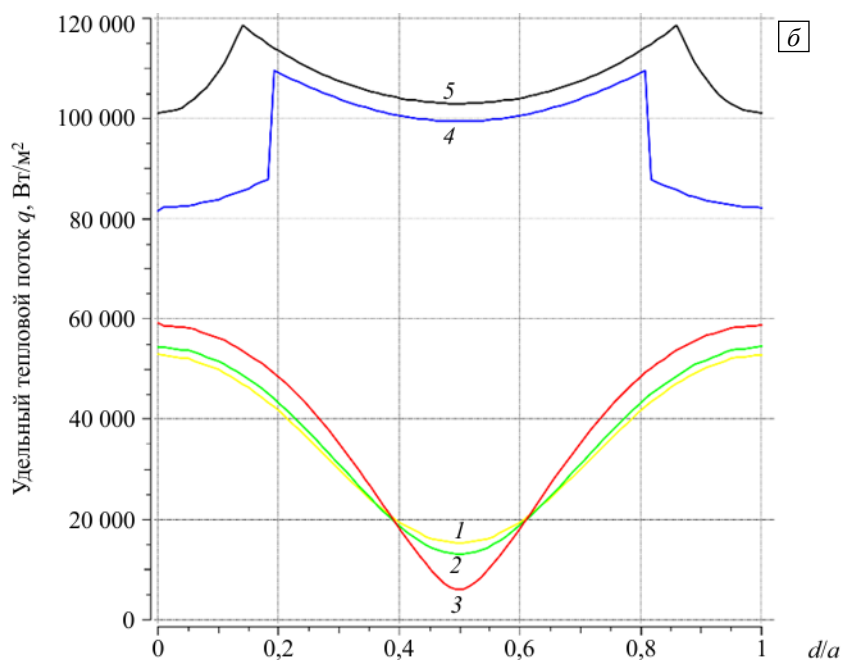


Рис. 3. Продолжение

Затем известные из расчёта в отдельных точках сечений числовые значения распределения удельного теплового потока аппроксимировались в Microsoft Excel с помощью степенных функций. В результате получались линии тренда, геометрически отображающие средние значения анализируемых показателей в соответствующем сечении. Далее, исходя из них, можно найти среднее значение удельного теплового потока  $q$  для элементарного плоского объёма, а по нему — тепловой поток  $Q$ , приложенный ко всей трёхмерной модели.

### 3. Обработка данных численного эксперимента

На основании данных как численного эксперимента, так и рассчитанных по аналитическим зависимостям были построены распределения удельных тепловых потоков, которые приведены на рисунке 3. Они определены в разных сечениях по высоте образца. Для отыскания значения коэффициента теплопроводности в целом для кубического образца с шаровым включением осуществлялись следующие действия: сначала с помощью Microsoft Excel находилась усреднённая зависимость распределения удельного теплового потока в образце, затем среднее значение удельного теплового потока умножалось на высоту образца и делилось на разность действующих температур. После этого при разных значениях отношения  $d/a$  получались точки, изображенные на рисунке 4. Здесь приведены результаты лишь для двух значений отношения  $\lambda_2/\lambda_1$ : 10 (Рис. 4а) и 0,5 (Рис. 4б).

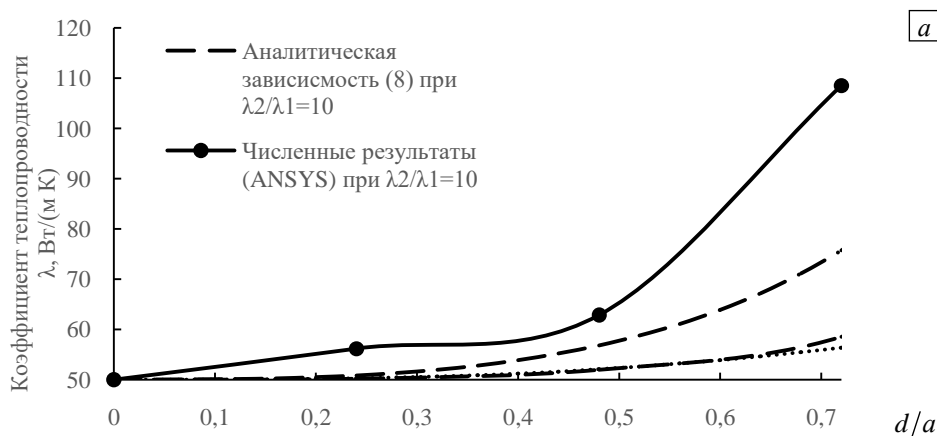


Рис. 4. Графики изменения коэффициента теплопроводности в зависимости от величины  $d/a$  при различных значениях  $\lambda_2/\lambda_1$ : 10 (а) и 0,5 (б); для сравнения с численными результатами представлены кривые, рассчитанные по аналитической зависимости (8), эмпирическим формулам Максвелла и Оделевского

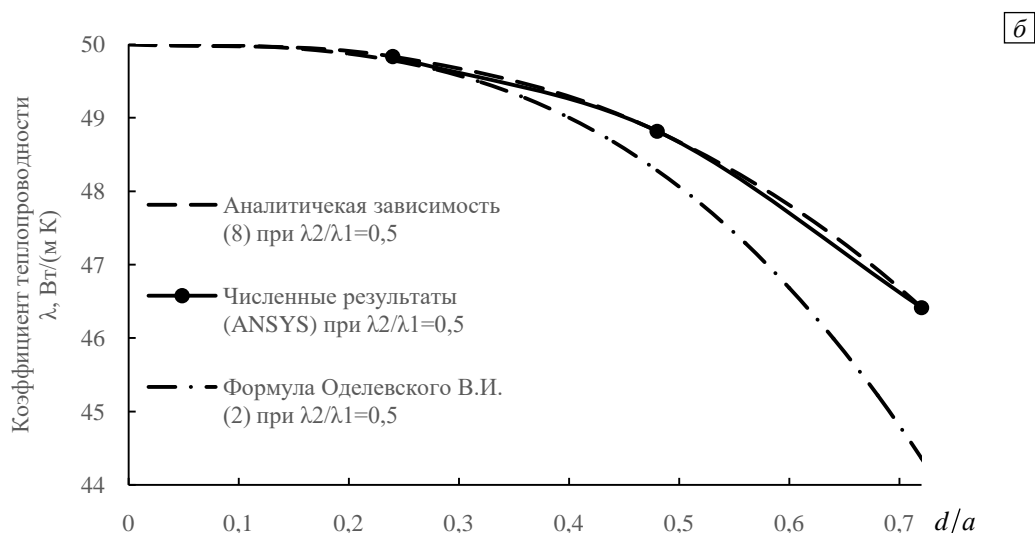


Рис. 4. Продолжение

Результаты проведенного численного исследования сравнивались со значениями, найденными по формуле (8), и с зависимостями, описываемыми известными из раздела 1 формулами Оделевского (2) и Максвелла (1). На рис. 4б зависимость Максвелла не приводится, так как она практически сливается с кривой по формуле (8).

Как сказано в [3], эмпирическая формула Оделевского, построенная на основе вычислительных экспериментов для образцов с малой концентрацией шаровых включений, может использоваться на практике и для композитов с большой концентрацией наполнителя, но при относительно небольших значениях коэффициента теплопроводности материала включений и их диаметров. Из рисунка 4 видно, что отвечающие ей кривые достаточно хорошо согласуются с другими кривыми при небольших значениях отношений  $d/a$  и  $\lambda_2/\lambda_1$ , но с ростом их величины результаты численного моделирования перестают укладываться в общую картину. Этот факт требует более детального рассмотрения. Так как данные для композитных материалов с шаровыми включениями при достаточно больших значениях ( $d/a > 0,5$  и  $\lambda_2/\lambda_1 > 10$ ) отсутствуют, то необходимо разработать метод, который бы учитывал изменение относительных параметров  $\lambda_2/\lambda_1$ ,  $d/a$  при достаточно больших значениях коэффициента теплопроводности включения и его диаметра.

Итак, при небольших значениях  $\lambda_2/\lambda_1$  и  $d/a$  данные, вычисленные по аналитической зависимости (8) и по предложенной в данной работе формуле, неплохо согласуются с результатами по формуле Оделевского (Рис. 4а). Если  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ , то авторская аналитическая зависимость и формула Оделевского дают близкие, практически совпадающие, кривые. При  $d/a < 0,5$  и  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  результаты, рассчитанные как по аналитической зависимости, так и по формуле Оделевского, близки к полученным численно. При  $d/a > 0,5$  и  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  наблюдается несовпадение авторских кривых ни с отвечающими формуле Оделевского, ни с вычисленными в пакете ANSYS Fluent, ни с рассчитанными по аналитической зависимости (8).

В заключение можно сказать, что при высоких значениях отношений физических ( $\lambda_2/\lambda_1$ ) и геометрических ( $d/a$ ) параметров модели ни численный, ни аналитический подход не дают однозначных результатов. Но при этом формулы Максвелла и Оделевского, в отличие от зависимости (6) и (8), не учитывают влияние термического сопротивления на границе фаз «матрица–включение», что не совсем достоверно отображает процесс теплопередачи в таких дисперсных материалах. Следовательно, необходимо более подробно исследовать области больших значений  $d/a$  и  $\lambda_2/\lambda_1$ .

#### 4. Выводы

Предложена простая модель определения коэффициента теплопроводности призматических образцов с дисковым включением и кубических образцов с шаровым включением. Построены соответствующие формулы для аналитического вычисления коэффициента теплопроводности, которые учитывают отношение теплопроводностей наполнителя и основного материала, а также диаметр включения. Проведено сравнение результатов, установленных по авторской формуле, с численными (полученными в пакете ANSYS Fluent) и рассчитанными по другим часто применяемым зависимостям (формулам Максвелла и Оделевского).



Выявлены недостатки — неоднозначность данных, при определении коэффициента теплопроводности композитов с дисперсным наполнителем при достаточно больших относительных значениях физических и геометрических параметров матрицы и включения, что говорит о необходимости дальнейшего совершенствования методов расчёта.

Результаты, приведённые в данной работе, могут быть использованы при проектировании различных теплозащитных композиционных материалов в авиастроении, машиностроении, металлургии и другом.

## Литература

1. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. Oxford University Press, 1873. 500 p.
2. Meredith R.E., Tobias C.W. Conductivities in emulsions // J. Electrochem. Soc. 1961. Vol. 108. P. 286-290. <https://doi.org/10.1149/1.2428064>
3. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. Справочная книга. Л.: Энергия, 1974. 264 с.
4. Этов М.И., Терехов В.И., Низовцев М.И., Шурина Э.Л., Иткина Н.Б., Уколов Е.С. Эффективная теплопроводность дисперсных материалов с контрастными включениями // ТВТ. 2015. Т. 53, № 1. С. 48-53. <https://doi.org/10.7868/S0040364415010044>
5. Михеев В.А., Сулаберидзе В.Ш., Мушенко В.Д. Исследование теплопроводности композиционных материалов на основе силикона с наполнителями // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 7. С. 167-172. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2015-58-7-571-575>
6. Sharapov A.I., Korshikov V.D., Chernykh A.A., Peshkova A.V. A method of researching the thermal conductivity coefficient of dispersion composite materials // Journal of Chemical Technology and Metallurgy. 2020. Vol. 55, Iss. 1. P. 148-155. <https://dl.uctm.edu/journal/web/j2020-1>
7. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой // Мат. моделир. и числ. методы. 2014. № 4. С. 3-17.
8. Ngo I.-L., Jeon S., Byon C. Thermal conductivity of transparent and flexible polymers containing fillers: A literature review // Int. J. Heat Mass Tran. 2016. Vol. 98. P. 219-226. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.082>
9. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Двусторонние оценки термического сопротивления неоднородного твердого тела // ТВТ. 2013. Т. 51, № 4. С. 578-585. <https://doi.org/10.7868/S0040364413040248>
10. Alshaer W.G., Nada S.A., Rady M.A., Del Barrio E.P., Sommier A. Thermal management of electronic devices using carbon foam and PCM/nano-composite // Int. J. Therm. Sci. 2015. Vol. 89. P. 79-86. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.10.012>
11. Khedari J., Suttisonk B., Pratinthong N., Hirunlabh J. New lightweight composite construction materials with low thermal conductivity // Cement Concr. Compos. 2001. Vol. 23. P. 65-70. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(00\)00072-X](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(00)00072-X)
12. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites // Carbon. 2002. Vol. 40. P. 359-362. [https://doi.org/10.1016/S0008-6223\(01\)00112-9](https://doi.org/10.1016/S0008-6223(01)00112-9)
13. Hamilton R.L., Crosser O.K. Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems // Ind. Eng. Chem. Fundamen. 1962. Vol. 1, no. 3. P. 187-191. <https://doi.org/10.1021/i160003a005>
14. Progelhot R.C., Throne J.L., Ructsch R.R. Methods for predicting the thermal conductivity of composite systems: A review // Polymer Eng. Sci. 1976. Vol. 16. P. 615-625. <https://doi.org/10.1002/pen.760160905>
15. Weinan E., Engquist B. Multiscale modeling and computation // Notices Americ. Math. Soc. 2003. Vol. 50. P. 1062-1070. <http://www.ams.org/notices/200309/fea-engquist.pdf>
16. Weinan E., Engquist B., Li X., Ren W., Vanden-Eijnden E. The heterogeneous multiscale method: A review // Commun. Comput. Phys. 2007. Vol. 2, no. 3. P. 367-450.
17. Шарпов А.И., Черных А.А., Ярцев А.Г., Пеикова А.В. Распространение теплового потока через материалы с шаровой полостью // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2019. Т. 9, № 1(30). С. 49-55.
18. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Влияние взаимного расположения шаровых включений на теплопроводность композита // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. 2014. № 5(56). С. 94-108.
19. Жиров С.Г., Коптелов А.А., Милехин Ю.М. Теплопроводность гетерогенных материалов. Ч. 2. Метод расчета теплопроводности гетерогенных материалов с взаимопроникающими компонентами // Прикладная физика. 2005. № 4. С. 39-44.
20. Xu Y., Kinugawa J., Yagi K. Development of thermal conductivity prediction system for composites // Mater. Trans. 2003. Vol. 44. P. 629-632. <https://doi.org/10.2320/matertrans.44.629>
21. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. American Mathem. Society, 2011. 392 p.
22. Bouguerra A., Laurent J.P., Goual M.S., Queneudec M. The measurement of the thermal conductivity of solid aggregates using the transient plane source technique // J. Phys. D: Appl. Phys. 1997. Vol. 30. P. 2900-2904. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/30/20/018>
23. Vadasz P. Heat conduction in nanofluid suspensions // J. Heat Tran. 2006. Vol. 128. P. 465-477. <https://doi.org/10.1115/1.2175149>

## References

1. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. Oxford University Press, 1873. 500 p.
2. Meredith R.E., Tobias C.W. Conductivities in emulsions. J. Electrochem. Soc., 1961, vol. 108, pp. 286-290. <https://doi.org/10.1149/1.2428064>

3. Dul'nev G.N., Zarichnyak Yu.P. *Teploprovodnost' smesey i kompozitsionnykh materialov. Spravochnaya kniga* [Thermal conductivity of mixtures and composite materials. Reference book]. Leningrad, Energiya, 1974. 264 p.
4. Epov M.I., Terekhov V.I., Nizovtsev M.I., Shurina E.L., Itkina N.B., Ukolov E.S. Effective thermal conductivity of dispersed materials with contrast inclusions. *High Temp.*, 2015, vol. 53, pp. 45-50. <https://doi.org/10.1134/S0018151X15010046>
5. Mikheev V.A., Sulaberidze V.Sh., Mushenko V.D. Investigation of thermal conductivity of composite materials based on silicone with fillers. *Izv. vuzov. Priborostroyeniye – Journal of Instrument Engineering*, 2015, vol. 58, no. 7, pp. 167-172. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2015-58-7-571-575>
6. Sharapov A.I., Korshikov V.D., Chernykh A.A., Peshkova A.V. A method of researching the thermal conductivity coefficient of dispersion composite materials. *Journal of Chemical Technology and Metallurgy*, 2020, vol. 55, iss. 1, pp. 148-155. <https://dl.uctm.edu/journal/web/j2020-1>
7. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'yeva I.Yu. Effektivnaya teploprovodnost' kompozita v sluchaye otkloneniya formy vklucheniya ot sharovoy [The effective thermal conductivity of the composite in the case of deviations of the shape of the inclusions from the ball]. *Mat. modelir. i chisl. metody – Mathematical Modeling and Computational Methods*, 2014, no. 4, pp. 3-17.
8. Ngo I.-L., Jeon S., Byon C. Thermal conductivity of transparent and flexible polymers containing fillers: A literature review. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2016, vol. 98, pp. 219-226. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.02.082>
9. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Two-sided estimates for thermal resistance of an inhomogeneous solid body. *High Temp.*, 2013, vol. 51, pp. 519-525. <https://doi.org/10.1134/S0018151X1304024X>
10. Alshaer W.G., Nada S.A., Rady M.A., Del Barrio E.P., Sommier A. Thermal management of electronic devices using carbon foam and PCM/nano-composite. *Int. J. Therm. Sci.*, 2015, vol. 89, pp. 79-86. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2014.10.012>
11. Khedari J., Suttisonk B., Pratinthong N., Hirunlabh J. New lightweight composite construction materials with low thermal conductivity. *Cement Concr. Compos.*, 2001, vol. 23, pp. 65-70. [https://doi.org/10.1016/S0958-9465\(00\)00072-X](https://doi.org/10.1016/S0958-9465(00)00072-X)
12. Chen Y.-M., Ting J.-M. Ultra high thermal conductivity polymer composites. *Carbon*, 2002, vol. 40, pp. 359-362. [https://doi.org/10.1016/S0008-6223\(01\)00112-9](https://doi.org/10.1016/S0008-6223(01)00112-9)
13. Hamilton R.L., Crosser O.K. Thermal conductivity of heterogeneous two-component systems. *Ind. Eng. Chem. Fundamen.*, 1962, vol. 1, no. 3, pp. 187-191. <https://doi.org/10.1021/i160003a005>
14. Progelhot R.C., Throne J.L., Ructsch R.R. Methods for predicting the thermal conductivity of composite systems: A review. *Polymer Eng. Sci.*, 1976, vol. 16, pp. 615-625. <https://doi.org/10.1002/pen.760160905>
15. Weinan E., Engquist B. Multiscale modeling and computation. *Notices Americ. Math. Soc.*, 2003, vol. 50, pp. 1062-1070. <http://www.ams.org/notices/200309/fea-engquist.pdf>
16. Weinan E., Engquist B., Li X., Ren W., Vanden-Eijnden E. The heterogeneous multiscale method: A review. *Commun. Comput. Phys.*, 2007, vol. 2, no. 3, pp. 367-450.
17. Sharapov A.I., Chernykh A.A., Yartsev A.G., Peshkova A.V. Distribution of heat flow through a material with a spherical cavity. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii*, 2019, vol. 9, no. 1(30), pp. 49-55.
18. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Saveleva I. Yu. Influence of the mutual arrangement of spherical inclusions on the thermal conductivity of the composite. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Estestvennyye nauki – Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Natural Sciences*, 2014, no. 5(56), pp. 94-108.
19. Zhirov S.G., Koptelov A.A., Milekhin Yu.M. Thermal conductivity of heterogeneous materials Part II. A computational method of thermal conductivity for heterogeneous materials with interpenetrative components. *Prikladnaya fizika – Applied physics*, 2005, no. 4, pp. 39-44.
20. Xu Y., Kinugawa J., Yagi K. Development of thermal conductivity prediction system for composites. *Mater. Trans.*, 2003, vol. 44, pp. 629-632. <https://doi.org/10.2320/matertrans.44.629>
21. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolau G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. American Mathem. Society, 2011. 392 p.
22. Bouguerra A., Laurent J.P., Goual M.S., Queneudec M. The measurement of the thermal conductivity of solid aggregates using the transient plane source technique. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1997, vol. 30, pp. 2900-2904. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/30/20/018>
23. Vadasz P. Heat conduction in nanofluid suspensions. *J. Heat Tran.*, 2006, vol. 128, pp. 465-477. <https://doi.org/10.1115/1.2175149>

Поступила в редакцию 03.02.2020; после доработки 01.03.2020; принята к опубликованию 05.03.2020

---

Сведения об авторах

Черных Антон Алексеевич, асп., Липецкий государственный технический университет (ЛГТУ), Липецк, 398600, ул. Московская, д. 30; e-mail: antonchernux@yandex.ru

Шмырин Анатолий Михайлович, д.т.н, проф., ЛГТУ; e-mail: amsh46@mail.ru