

DOI: [10.7242/1999-6691/2020.13.1.1](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.1.1)
УДК 539.4

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ПЛАСТИН С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ

А.П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики имени С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация

Разработана уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких пластин с пространственными структурами армирования. Деформации материалов композиции предполагаются малыми и раскладываются на пластические и вязкоупругие составляющие. Мгновенное пластическое поведение этих материалов описывается теорией течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое деформирование подчиняется определяющим уравнениям линейной модели 5-константного тела. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Возможное слабое сопротивление композитных пластин поперечным сдвигам моделируется в рамках уточненной теории изгиба. Это позволяет с разной степенью точности определять перемещения точек конструкции и напряженно-деформированное состояние в компонентах композиции. В первом приближении из полученных уравнений и граничных условий следуют соотношения, соответствующие традиционной неклассической теории Редди. Численное решение сформулированной начально-краевой задачи разыскивается по явной схеме типа «крест». Исследовано вязкоупругопластическое динамическое деформирование прямоугольных относительно тонких стеклопластиковых пластин под действием нагрузки взрывного типа. Конструкции имеют традиционную плоско-перекрестную (ортогональную) или пространственную структуру армирования. Показано, что даже в случае относительно тонких композитных пластин для проведения адекватных расчетов их динамического вязкоупругопластического поведения теория Редди неприемлема. Продемонстрировано, что величина и форма остаточных прогибов зависят не только от структуры армирования, но и от значений вязкоупругих характеристик материалов композиции. Обнаружено, что после динамического неупругого деформирования композитная пластина может иметь гофрированную остаточную форму со складками, ориентированными в продольном направлении. Показано, что даже в относительно тонкой пластине замена плоско-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру приводит к существенному уменьшению остаточного прогиба и интенсивности остаточных деформаций как в связующем материале, так и в некоторых семействах волокон. В относительно толстых пластинах эффект от такой замены структур армирования проявляется в еще большей степени.

Ключевые слова: гибкие пластины, пространственное армирование, плоско-перекрестное армирование, вязкоупругопластическое деформирование, теория Редди, уточненная теория изгиба, геометрическая нелинейность, нагрузки взрывного типа, численная схема типа «крест»

A REFINED MODEL OF VISCOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE PLATES WITH SPATIAL REINFORCEMENT STRUCTURES

A.P. Yankovskii

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation

A refined model of viscoelastic-plastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures has been developed. Strains of the composition materials are assumed to be small and decomposed into plastic and viscoelastic components. Instant plastic deformation of these materials is described by the flow theory with isotropic hardening. Viscoelastic deformation obeys the equations of a linear model of a five-constant body. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The possible weak resistance of composite plates to lateral shear is modeled in the framework of a refined theory of bending. This allows one to determine the displacements of plate points and the stress-strain state in the components of the composition with varying degrees of accuracy. In a first approximation, from the obtained equations and boundary conditions, we obtain relations corresponding to the traditional nonclassical Reddy theory. A numerical solution to the formulated initial-boundary-value problem is sought according to an explicit “cross-type” scheme. The viscoelastic-plastic dynamic deformation of rectangular, relatively thin fiberglass plates under the influence of an explosive type load is investigated. The plates have a traditional plane-cross (orthogonal) or spatial reinforcement structure. It is shown that even in the case of relatively thin composite plates the Reddy theory is unacceptable for adequate calculations of their dynamic viscoelastic-plastic deformation. It has been demonstrated that the magnitude and shape of the residual deflections depend not only on the reinforcement structure, but also on the magnitude of the viscoelastic characteristics of the materials of the composition components. It was found that, after dynamic inelastic deformation, the composite plate can have a corrugated residual shape with folds oriented in the longitudinal direction. It is shown that even in the case of a relatively thin plate, replacing the planar-cross reinforcement structure with a spatial structure can significantly reduce the amount of residual deflection and the intensity of residual deformation in the binder material and some fiber families. For relatively thick plates, the effect of such a replacement of the reinforcing structures manifests itself much more.

Key words: flexible plates, spatial reinforcement, planar-cross reinforcement, viscoelastic-plastic deformation, Reddy theory, refined theory of bending, geometric nonlinearity, explosive loads, numerical “cross-type” scheme

1. Введение

Композиционные материалы (КМ) все шире применяются в современных инженерных изделиях [1–6], для которых характерно воздействие высокоинтенсивных нагрузок [5, 7], вызывающих неупругое деформирование компонентов композиции. Поэтому актуальной является проблема моделирования пластического поведения армированных тонкостенных КМ-конструкций, подходы к решению которой находятся в настоящее время в состоянии становления [8, 9].

Известно, что плоско-перекрестно армированные пластины обладают плохим сопротивлением поперечному сдвигу и отрыву [5, 6, 10, 11], что проявляется и при их изгибе. Чтобы устранить этот недостаток на практике применяют пространственные структуры армирования [11–14]. Линейно-упругое деформирование КМ с пространственными структурами армирования моделировалось в [15–17]. Упругопластическое поведение гибких армированных пластин с такими структурами исследовалось в [18], а в работе [19] изучалось вязкоупругопластическое деформирование КМ-пластин с плоско-перекрестными структурами армирования. Механическое поведение материалов композиции в [18] описывалось определяющими уравнениями, в которых не учитывались вязкоупругие свойства компонентов композиции [20]. Следовательно, механическая модель, использованная в [18], не позволяет рассчитывать остаточные перемещения и остаточное напряженное состояние компонентов композиции пространственно-армированных пластин при действии кратковременных интенсивных нагрузок взрывного типа. Поэтому актуальна и проблема математического моделирования вязкоупругопластического деформирования гибких пластин с пространственными структурами армирования.

Плохое сопротивление тонкостенных элементов КМ-конструкций поперечному сдвигу, которое проявляется и при некоторых структурах пространственного армирования (например в случае ортогонального 3D-армирования [11, 12, 14, 15]), обычно представляют в рамках неклассической теории Рейсснера–Миндлина [5, 6, 21–24] или теории Редди–Немировского [10, 18, 19, 25]. Кроме того, прибегают и к теориям более высоких порядков [6, 26–29], базирующимся, как правило, на гипотезе ломаной линии [6, 26, 28].

Численные решения нелинейных динамических задач получают на основе явных методов (чаще всего используют схему типа «крест») [18, 19, 22, 29, 30] или неявных методов (например из семейства схем Ньюмарка) [7, 31, 32].

Настоящая работа посвящена моделированию вязкоупругопластического поведения гибких пластин с пространственными структурами армирования при учете их возможного плохого сопротивления поперечным сдвигам в рамках уточненной теории изгиба [29]. Численное решение возникающих при этом динамических задач строится с помощью явной схемы типа «крест».

2. Моделирование вязкоупругопластического деформирования КМ на основе пошагового алгоритма по времени

Как и в работах [19, 33–36], предполагаем, что полные деформации ε_{ij} являются малыми и их можно представить в виде разложения на сжимаемые вязкоупругие — e_{ij} , и несжимаемые мгновенные пластические — p_{ij} , составляющие:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (p_{ii} = 0). \quad (1)$$

Пластическое течение материала ассоциировано с мгновенной поверхностью нагружения материала $f = 0$ [36], которая принимается соответствующей условию текучести Мизеса [19]:

$$f(T, \chi) \equiv T^2 - \tau_s^2(\chi) = 0, \quad (2)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad \chi = \int_0^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}} dt, \quad (3)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{ll}}{3} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4)$$

При этом: σ_{ij} , s_{ij} — компоненты тензора и девиатора напряжений; σ_0 — среднее напряжение; χ — параметр упрочнения (в частности, параметр Одквиста [34, 35]); τ_s — мгновенный предел текучести при чистом сдвиге, который равен значению интенсивности касательных напряжений T при заданном значении параметра упрочнения χ [36]; δ_{ij} — символ Кронекера; точка над символом обозначает производную по времени t . Важно, что в данном разделе, если специально не оговорено, по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 3.

На основании ассоциированного закона пластического течения [33–35] с учетом равенств (2)–(4) имеем (см. соотношения (7)–(9) в [19]):

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{s_{ij}}{2\tau_s^2(\chi)} s_{ml} \dot{\rho}_{ml} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (5)$$

В [36] вязкоупругое деформирование материала моделировалось интегральными определяющими уравнениями. Однако в работе [37] продемонстрировано, что для адекватного описания затухающих колебаний [20] следует использовать не интегральные, а дифференциальные формы определяющих соотношений вязкоупругости [38]. Отвечающие идеально-пластическим (без упрочнения) материалам уравнения приведены в [33], где вязкоупругое деформирование подчиняется соотношениям модели Максвелла–Больцмана [35]. Для пластически упрочняющихся материалов соответствующие уравнения получены в [19]. В данной работе рассмотрим уточненную модель вязкоупругого поведения материала — модель 5-константного тела:

$$\dot{\bar{e}}_{ij} + \alpha \ddot{\bar{e}}_{ij} + \beta \bar{e}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2\eta} + \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (6)$$

$$\dot{\varepsilon}_0 + \alpha_0 \ddot{\varepsilon}_0 + \beta_0 \varepsilon_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{3\eta_0} + \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} + \frac{\sigma_0}{3\mu_0}. \quad (7)$$

Здесь:

$$\bar{e}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = e_0 = \frac{\varepsilon_{ll}}{3} \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (8)$$

\bar{e}_{ij} — компоненты девиатора вязкоупругих деформаций; ε_0 — средняя деформация; $\alpha, \beta, \eta, G, \mu$ ($\alpha_0, \beta_0, \eta_0, K, \mu_0$) — вязкие и упругие характеристики при сдвиге (всестороннем растяжении и сжатии). Величины G и K могут трактоваться как модуль сдвига и объемный модуль упругости, а μ и μ_0 — как коэффициенты линейной вязкости при сдвиге и при объемном растяжении и сжатии.

Если принять $\alpha = \alpha_0 = 0, \beta = \beta_0 = 0, \eta = \eta_0 \rightarrow \infty$, то из равенств (6), (7) последуют определяющие соотношения, соответствующие вязкоупругой модели Максвелла–Больцмана [19, 33, 35]. Если $\alpha = \alpha_0 = 0, \eta = \eta_0 \rightarrow \infty, G = K \rightarrow \infty$, то из (6), (7) вытекают определяющие уравнения модели Фойгта–Кельвина [33, 35]. При $\alpha = \alpha_0 = 0, \eta = \eta_0 \rightarrow \infty$ равенства (6), (7) соответствуют модели стандартного вязкоупругого тела [35]. При $\beta = \beta_0 = 0$ соотношения (6), (7) редуцируются в определяющие уравнения, соответствующие 4-константной вязкоупругой модели [35].

Если $\alpha = \alpha_0 = 0$, то соотношения (6), (7) при $\eta < \infty$ и $\eta_0 < \infty$ с учетом выражений (8) содержат вторые производные по t от напряжений и только первые производные от деформаций. Если же $\eta = \eta_0 \rightarrow \infty, \alpha \neq 0$ и $\alpha_0 \neq 0$, то в равенствах (6), (7) присутствуют вторые производные по t от деформаций и только первые производные от напряжений. Следовательно, в этих случаях на упругонаследственные деформации накладывается вязкое течение [38], причем упругонаследственная составляющая характеризует ограниченную ползучесть материала, а вязкое течение — неограниченную ползучесть [38].

При активном нагружении за пределом текучести и чистом сдвиге, когда $\tau = \tau_s(\chi)$ (см. соотношения (13), (14) в [19]), выполняется равенство:

$$\dot{\tau} = \tau_\chi \dot{\chi}, \quad (9)$$

где (см. формулы (12), (15) в [19])

$$\tau_\chi \equiv \frac{d\tau_s}{d\chi} = \frac{d\tau_s}{d\gamma_p} \equiv \bar{G}, \quad \chi = \int_0^t \dot{\gamma}_p dt = \int_0^{\gamma_p} d\gamma_p = \gamma_p, \quad \dot{\chi} = \dot{\gamma}_p, \quad (10)$$

γ_p — пластическая часть полной угловой деформации γ , τ — касательное напряжение при чистом сдвиге, $\tau_\chi \equiv \bar{G} = \tau_\chi(\chi) = \tau_\chi(\gamma_p)$ — касательный модуль на диаграмме $\tau : \gamma_p$ (для простоты предполагается, что деформации γ_p и γ положительны).

Однако приращение касательного напряжения τ вызывает приращение вязкоупругой составляющей угловой деформации γ_e , где $\gamma_e = \gamma - \gamma_p$, поэтому, согласно соотношению (6), в случае чистого сдвига с учетом равенств (4) и (8) получаем:

$$\frac{\dot{\gamma}_e}{2} + \alpha \frac{\ddot{\gamma}_e}{2} + \beta \frac{\gamma_e}{2} = \frac{\ddot{\tau}}{2\eta} + \frac{\dot{\tau}}{2G} + \frac{\tau}{2\eta}.$$

Отсюда, при представлении полных деформаций в виде (1), следует:

$$\dot{\tau} = G(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_p) + \alpha G(\ddot{\gamma} - \ddot{\gamma}_p) + \beta G(\gamma - \gamma_p) - \frac{G}{\eta} \ddot{\tau} - \frac{G}{\eta} \tau. \quad (11)$$

Используя (9), видоизменим в (11) левую часть. После элементарных преобразований будем иметь

$$\dot{\gamma}_p = \frac{1}{1+g} \left(\dot{\gamma} + \alpha \ddot{\gamma} + \beta \gamma - \alpha \ddot{\gamma}_p - \beta \gamma_p - \frac{\ddot{\tau}}{\eta} - \frac{\tau}{\mu} \right), \quad (12)$$

где (см. (10))

$$g \equiv \frac{\bar{G}}{G} = \frac{\tau_\chi(\chi)}{G} = g(\chi). \quad (13)$$

Умножая обе части равенства (12) на τ , придем к энергетическому соотношению:

$$\tau \dot{\gamma}_p = \frac{1}{1+g} \left(\tau \dot{\gamma} + \alpha \tau \ddot{\gamma} + \beta \tau \gamma - \alpha \tau \ddot{\gamma}_p - \beta \tau \gamma_p - \frac{\tau \ddot{\tau}}{\eta} - \frac{1}{\mu} \tau^2 \right), \quad (14)$$

в котором в случае чистого сдвига $\tau \dot{\gamma}_p = W_p$ есть мощность пластических деформаций, а $\tau \dot{\gamma} = W$ — мощность деформаций формоизменения. При $\alpha = \beta = 0$ и $\eta = \mu \rightarrow \infty$ уравнение (14) вырождается в энергетическое равенство теории Прандтля–Рейсса–Хилла (упругопластичность с изотропным упрочнением): $W_p = \kappa W$, где $\kappa = (1 + g(\chi))^{-1}$ [30]. Далее, как и в теории Прандтля–Рейсса–Хилла, считаем, что энергетическое соотношение, аналогичное (14), справедливо при любых видах напряженно-деформированного состояния. Следовательно, при выполнении равенств (3), (4), (6) и (8), получим обобщение энергетического соотношения из работы [19] (см. там (20))

$$s_{ml} \dot{P}_{ml} = \frac{1}{1+g} \left(s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} + \alpha s_{ml} (\ddot{\epsilon}_{ml} - \ddot{p}_{ml}) + \beta s_{ml} (\epsilon_{ml} - p_{ml}) - \frac{s_{ml} \ddot{s}_{ml}}{2\eta} - \frac{s_{ml} s_{ml}}{2\mu} \right). \quad (15)$$

Как уже отмечалось во вводной части, для численного интегрирования рассматриваемой задачи применяем метод шагов по времени [7, 18, 19, 22, 29–32], то есть решение будем разыскивать в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\Delta = \text{const} > 0$ — шаг по времени. При этом уравнения движения КМ-пластины, как и в [18, 19, 29], предполагаем интегрировать на 3-точечном шаблоне по времени (t_{n-1}, t_n, t_{n+1}) по явной численной схеме типа «крест», имеющей второй порядок точности по Δ [22]. Чтобы в конечном итоге привести определяющие соотношения для материала к форме, аналогичной той, что получена в [19] (см. там равенства (34)), далее для некоторой функции $f(t)$ используем формулу трапеций (по аналогии с [19]), которая также имеет второй порядок точности по Δ :

$$f - f^{n-1} = \frac{\Delta}{2} \left(\dot{f} + \dot{f}^{n-1} \right), \quad (16)$$

где

$$f \equiv f(t_n), \quad \dot{f} \equiv \dot{f}(t_n). \quad (17)$$

Из соотношения (16) следуют два равенства:

$$f = \frac{\Delta}{2} \dot{f} + f, \quad (18)$$

$$\dot{f} = \frac{2}{\Delta} f - \frac{2}{\Delta} f, \quad (19)$$

где

$$f \equiv f + \frac{\Delta}{2} \dot{f}. \quad (20)$$

В рассматриваемый момент времени t_n в правой части формулы (15) выразим производную $\dot{p}_{ml} = (\dot{p}_{ml})^g$ согласно равенству (19), а пластическую деформацию p_{ml} — согласно (18) с учетом (20). Тогда при обозначениях, аналогичных (17), после преобразований будем иметь:

$$s_{ml} \dot{p}_{ml} = z \left[s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} + \alpha s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} + \beta s_{ml} \epsilon_{ml} - \frac{1}{2\eta} s_{ml} \ddot{s}_{ml} - \frac{1}{2\mu} s_{ml} s_{ml} + \left(\frac{2\alpha}{\Delta} \dot{p}_{ml} - \beta p_{ml} \right) s_{ml} \right], \quad (21)$$

где

$$z \equiv \left(\zeta + g \right)^{-1}, \quad \zeta \equiv 1 + \frac{2\alpha}{\Delta} + \frac{\beta\Delta}{2} = \text{const}. \quad (22)$$

Подставляя (21) в правую часть соотношения (5), используя формулу (18) для полной деформации ϵ_{ml} и выражение (19) для производной $\dot{\epsilon}_{ml} = (\dot{\epsilon}_{ml})^g$, а также принимая во внимание (22), получим:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{1}{2} T^{n-2} z \left[\zeta s_{ml} \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{1}{2\eta} s_{ml} \ddot{\epsilon}_{ml} - \frac{1}{\mu} T^2 + \left(\beta \left(\epsilon_{ml} - p_{ml} \right) - \frac{2\alpha}{\Delta} \left(\dot{\epsilon}_{ml} - \dot{p}_{ml} \right) \right) s_{ml} \right] s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (23)$$

Применим соотношение (18) к функции \bar{e}_{ij} , а (19) — к производной $\dot{\bar{e}}_{ij} = (\dot{\bar{e}}_{ij})^g$. После подстановки результата в (6) и элементарных преобразований с учетом (22) будем иметь:

$$\dot{\bar{e}}_{ij} = \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{1}{\eta} \ddot{s}_{ij} + \frac{1}{G} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{\mu} s_{ij} + 2\beta \bar{e}_{ij} + \frac{4\alpha}{\Delta} \dot{\bar{e}}_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (24)$$

Прибавим к обеим частям равенства (23) производную $\dot{\bar{e}}_{ij}$, затем примем в расчет в его левой части разложение $\dot{\bar{e}}_{ij} = \dot{\bar{e}}_{ij} + \dot{p}_{ij}$ (см. (1), (8)), а в правой части — (24). В результате придем к уравнению:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_{ij} = & \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{1}{\eta} \ddot{s}_{ij} + \frac{1}{G} \dot{s}_{ij} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\zeta} - z \right) s_{ij} + \frac{1}{2} T^{n-2} z s_{ij} s_{ml} \left[\zeta \dot{\epsilon}_{ml} - \frac{1}{2\eta} \ddot{\epsilon}_{ml} + \right. \\ & \left. + \left(\beta \left(\epsilon_{ml} - p_{ml} \right) - \frac{2\alpha}{\Delta} \left(\dot{\epsilon}_{ml} - \dot{p}_{ml} \right) \right) \right] - \frac{1}{\zeta} \left(\beta \bar{e}_{ij} - \frac{2\alpha}{\Delta} \dot{\bar{e}}_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Введем в обе его части слагаемое $\delta_{ij} \dot{\epsilon}_0$, учтем выражения (8) и разложение $\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\bar{e}}_{ij} + \delta_{ij} \dot{\epsilon}_0$, тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & \delta_{ij} \dot{\epsilon}_0 + \frac{1}{2\zeta} \left(\frac{1}{\eta} \ddot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{G} \dot{\sigma}_{ij} \right) + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{1}{\zeta} - z \right) \sigma_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{2\zeta} \left(\frac{1}{\eta} \ddot{\sigma}_0 + \frac{1}{G} \dot{\sigma}_0 \right) - \frac{\delta_{ij}}{2\mu} \left(\frac{1}{\zeta} - z \right) \sigma_0 + \frac{1}{2} T^{n-2} z s_{ij} s_{ml} \left[\zeta \dot{\epsilon}_{ml} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\eta} \ddot{\sigma}_{ml} + \beta \left(\epsilon_{ml} - p_{ml} \right) - \frac{2\alpha}{\Delta} \left(\dot{\epsilon}_{ml} - \dot{p}_{ml} \right) \right] - \frac{1}{\zeta} \left(\beta \bar{e}_{ij} - \frac{2\alpha}{\Delta} \dot{\bar{e}}_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя соотношение (7), исключим из равенства (25) производную $\dot{\varepsilon}_0^n$, причем функцию ε_0^n , которая при этом появится, представим в виде (18), а производную $\dot{\varepsilon}_0^n = (\dot{\varepsilon}_0^n)^s$ — в виде (19). Тогда для k -го компонента композиции в текущий момент времени t_n получим определяющие уравнения, которые, как и в [18, 19], целесообразно представить в матричной форме:

$$\mathbf{A}_k^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n = \mathbf{Z}_k^n \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \mathbf{W}_k^n \ddot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \mathbf{V}_k^n \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \mathbf{q}_k^n \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N). \quad (26)$$

Здесь и далее:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^T, \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^T, \\ \mathbf{p}_k &= \{p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}, p_4^{(k)}, p_5^{(k)}, p_6^{(k)}\}^T \equiv \{p_{11}^{(k)}, p_{22}^{(k)}, p_{33}^{(k)}, 2p_{23}^{(k)}, 2p_{31}^{(k)}, 2p_{12}^{(k)}\}^T, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_k &= \{\bar{\varepsilon}_1^{(k)}, \bar{\varepsilon}_2^{(k)}, \bar{\varepsilon}_3^{(k)}, \bar{\varepsilon}_4^{(k)}, \bar{\varepsilon}_5^{(k)}, \bar{\varepsilon}_6^{(k)}\}^T \equiv \{\bar{\varepsilon}_{11}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{22}^{(k)}, \bar{\varepsilon}_{33}^{(k)}, 2\bar{\varepsilon}_{23}^{(k)}, 2\bar{\varepsilon}_{31}^{(k)}, 2\bar{\varepsilon}_{12}^{(k)}\}^T; \end{aligned} \quad (27)$$

\mathbf{A}_k^n , \mathbf{Z}_k^n , \mathbf{W}_k^n , \mathbf{V}_k^n — 6×6 -матрицы, и $\mathbf{q}_k^n = \{q_i^{(k)}\}$ — 6-компонентный вектор-столбец, которые вычисляются так:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k^n &= \bar{\mathbf{A}}_k^n - \zeta_k^n \mathbf{Y}_k^n, \quad \mathbf{W}_k^n = \bar{\mathbf{W}}_k^n - \frac{1}{2\eta^{(k)}} \mathbf{Y}_k^n, \\ \mathbf{q}_k^n &= \mathbf{Y}_k^n \left[\beta^{(k)} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_k^n - \mathbf{p}_k^n \right) - \frac{2\alpha^{(k)}}{\Delta} \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n - \dot{\mathbf{p}}_k^n \right) \right] - \left(\frac{\beta^{(k)}}{\zeta_k^n} \mathbf{e}_k^n - \frac{2\alpha^{(k)}}{\zeta_k^n \Delta} \dot{\mathbf{e}}_k^n \right) \mathbf{J} + \left(\frac{2\alpha^{(k)}}{\Delta} \dot{\varepsilon}_0^{(k)} - \beta^{(k)} \varepsilon_0^{(k)} \right) \mathbf{i}, \\ \mathbf{i} &= \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T; \end{aligned} \quad (28)$$

$\bar{\mathbf{A}}_k^n = (\bar{a}_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Y}_k^n = (y_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Z}_k^n = (z_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{W}}_k^n = (\bar{w}_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{V}_k^n = (v_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{J} = (J_{ij})$ — 6×6 -матрицы, имеющие следующие выражения для ненулевых элементов:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{ij}^{(k)} &= \delta_{ij} + \frac{\zeta_k^n - 1}{3}, \quad \bar{a}_{ll}^{(k)} = \frac{1}{2}, \quad z_{ij}^{(k)} = \frac{\delta_{ij}}{2G^{(k)} \zeta_k^n} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K^{(k)}} - \frac{1}{2G^{(k)} \zeta_k^n} \right), \quad z_{ll}^{(k)} = \frac{1}{2G^{(k)} \zeta_k^n}, \\ \bar{w}_{ij}^{(k)} &= \frac{\delta_{ij}}{2\eta^{(k)} \zeta_k^n} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\eta_0^{(k)}} - \frac{1}{2\eta^{(k)} \zeta_k^n} \right), \quad \bar{w}_{ll}^{(k)} = \frac{1}{2\eta^{(k)} \zeta_k^n}, \\ v_{ij}^{(k)} &= \frac{1}{2\mu^{(k)}} \left(\frac{1}{\zeta_k^n} - z_k^n c^{(k)} \right) \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{9\mu_0^{(k)}}, \quad v_{ll}^{(k)} = \frac{1}{2\mu^{(k)}} \left(\frac{1}{\zeta_k^n} - z_k^n c^{(k)} \right), \\ J_{ii} &= 1, \quad J_{ll} = \frac{1}{2} \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad l = \overline{4, 6}), \quad y_{rm}^{(k)} = \frac{1}{2} T_k^{n-2} z_k^n s_r^n s_m^n c^{(k)} \quad (r, m = \overline{1, 6}), \\ 2T_k^{n2} &= \sum_{j=1}^3 s_j^{(k)} s_j^{(k)} + 2 \sum_{j=4}^6 s_j^{(k)} s_j^{(k)}, \quad z_k^n = \zeta_k^n + g_k^n, \quad \zeta_k^n = 1 + \frac{2\alpha^{(k)}}{\Delta} + \frac{\beta^{(k)} \Delta}{2}, \quad g_k^n = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \\ c^{(k)} &= \begin{cases} 0 & \text{при } T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ и } \mathbf{s}_k^T \cdot \dot{\mathbf{s}}_k \leq 0, \\ 1 & \text{при } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ и } \mathbf{s}_k^T \cdot \dot{\mathbf{s}}_k > 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

$c^{(k)}$ — параметр переключения такой, что $c^{(k)} = 0$ в случаях вязкоупругого деформирования, разгрузки или нейтрального нагружения и $c^{(k)} = 1$ в при активном вязкоупругопластическом деформировании (выражение для параметра $c^{(k)}$ построено на основании соотношений (24)–(28) из [19]); N — количество семейств арматуры; индекс k — номер компонента композиции, причем $k = 0$ соответствует связующему,

а $k = 1, 2, \dots, N$ — волокнам k -го семейства; индекс Т символизирует операцию транспонирования. Остальные величины в (28), (29) при отбрасывании индекса k имеют тот же смысл, что и ранее. В равенствах (29) по повторяющимся индексам i, l суммирование не производится. Соотношения (27) определяют соответствия между шестью элементами $f_i^{(k)}$ ($i = \overline{1, 6}$) некоторого вектор-столбца \mathbf{f}_k и компонентами симметричного тензора второго ранга $f_{jl}^{(k)}$ ($j, l = \overline{1, 3}$).

Чтобы преобразовать уравнение (26) к виду, который в последующем будет удобен для использования численной схемы типа «крест», применим к вектор-функции $\boldsymbol{\sigma}_k$ соотношение (18) и к производной $\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_k = (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k)^s$ выражение (19). После этого, с учетом (20), в данный момент времени t_n окончательно получим:

$$\ddot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n = \mathbf{B}_k^n \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n + \ddot{\mathbf{p}}_k^n \quad (k = 0, 1, 2, \dots, N), \quad (30)$$

где

$$\mathbf{B}_k^n = \bar{\mathbf{Z}}_k^{n-1} \mathbf{A}_k^n, \quad \ddot{\mathbf{p}}_k^n = \bar{\mathbf{Z}}_k^{n-1} \ddot{\mathbf{q}}_k^n, \quad \bar{\mathbf{Z}}_k^n = \mathbf{Z}_k^n + \frac{2}{\Delta} \mathbf{W}_k^n + \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^n, \quad \ddot{\mathbf{q}}_k^n = \frac{2}{\Delta} \mathbf{W}_k^n \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1/2} - \mathbf{V}_k^n \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2} - \mathbf{q}_k^n, \quad (31)$$

$\bar{\mathbf{Z}}_k^{n-1}$ — матрица, обратная 6×6 -матрице $\bar{\mathbf{Z}}_k^n$, \mathbf{p}_k^n , \mathbf{q}_k^n — 6-компонентные вектор-столбцы, \mathbf{B}_k^n — 6×6 -матрица.

Как и в [19], при $t = t_n$ матрицы \mathbf{A}_k , \mathbf{W}_k , \mathbf{V}_k , $\bar{\mathbf{Z}}_k$, $\bar{\mathbf{Z}}_k^{-1}$ и вектор-столбцы \mathbf{q}_k , $\bar{\mathbf{q}}_k$ (см. соотношения (26), (28)–(30)) предполагаются линеаризованными по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости [39]. Следовательно, согласно (31), линеаризованными являются 6×6 -матрица \mathbf{B}_k^n и 6-компонентный вектор-столбец $\ddot{\mathbf{p}}_k^n$.

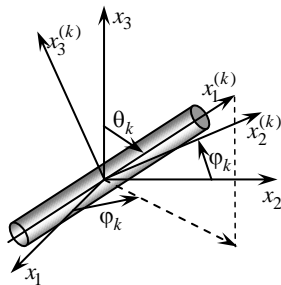


Рис. 1. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства

Линеаризованные равенства (30) формально соответствуют соотношениям Дюамеля–Неймана для анизотропного тела [25, 40], причем элементы вектор-столбца $\ddot{\mathbf{p}}_k$ можно трактовать как уже известные на итерации при $t = t_n$ скорости температурных напряжений. Следовательно, используя структурную модель из [17] и соотношения (30), (31), в момент времени t_n можем записать искомые определяющие уравнения для рассматриваемого пространственно-армированного КМ.

Для этого с каждым k -м семейством арматуры свяжем локальную ортогональную систему координат $x_i^{(k)}$ так, чтобы ось $x_1^{(k)}$ совпадала с направлением траектории волокна, а оси $x_2^{(k)}$ и $x_3^{(k)}$ были перпендикулярны этой траектории (Рис. 1). Направление армирования волокнами k -го семейства можно задать углами сферической системы координат θ_k и φ_k . Тогда направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = 1, 2, 3$) будут вычисляться так:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, & l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, \\ l_{23}^{(k)} &= 0, & l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k \quad (1 \leq k \leq N). \end{aligned} \quad (32)$$

Переход от глобальной — x_i , к локальной — $x_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$), системе координат сопровождается следующими преобразованиями вектор-столбцов (см. (27)):

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{G}_k \boldsymbol{\sigma}_k \quad (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 g_{ij}^{(k)} \sigma_j^{(k)}), \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{Q}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k \quad (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i^{(k)} = \sum_{j=1}^6 q_{ij}^{(k)} \varepsilon_j^{(k)}, \quad i = \overline{1, 6}).$$

Волной сверху обозначены величины, которые определяются в локальной системе $x_i^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$), а $\mathbf{G}_k = (g_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{Q}_k = (q_{ij}^{(k)})$ — 6×6 -матрицы с элементами (см. (32)):

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = I_{11}^{(k)} I_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = I_{12}^{(k)} I_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2I_{12}^{(k)} I_{11}^{(k)}, \quad \dots \\ 2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2I_{21}^{(k)} I_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = I_{11}^{(k)} I_{22}^{(k)} + I_{12}^{(k)} I_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (33)$$

Не представленные в (33) элементы матриц \mathbf{G}_k , \mathbf{Q}_k приведены в [40] (см. Табл. (21.40) и (21.44)).

Повторяя далее рассуждения из работы [17], для момента времени t_n получим матричное определяющее уравнение, которое характеризует текущее вязкоупругопластическое состояние КМ с пространственной структурой армирования:

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{B} \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \mathbf{p}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \equiv (\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \quad \mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{E}_k, \\ \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k \quad (1 \leq k \leq N), \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k; \end{aligned} \quad (35)$$

$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\sigma}}}$, $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ — 6-компонентные вектор-столбцы скоростей осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции, по структуре аналогичные (27); ω_0 — относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции; ω_k — плотность армирования волокнами k -го семейства; \mathbf{I} — единичная 6×6 -матрица; \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k — 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} — матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , $\boldsymbol{\zeta}_k$ — 6-компонентные вектор-столбцы. Элементы матриц $\mathbf{C}_k = (c_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{D}_k = (d_{ij}^{(k)})$ и компоненты вектор-столбцов $\boldsymbol{\zeta}_k = \{\zeta_i^{(k)}\}$ при учете соотношений (30)–(33) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \\ \zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (\bar{p}_l^{(0)} - \bar{p}_l^{(k)}) \quad (i = \overline{2, 6}, \quad j = \overline{1, 6}), \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (36)$$

где $b_{lj}^{(k)}$ и $\bar{p}_l^{(k)}$ — элементы матрицы \mathbf{B}_k и вектора $\bar{\mathbf{p}}_k$ в (30). В равенствах (35), (36) для упрощения опущен верхний индекс n .

Как и в [17], при выводе соотношений (34), (35) попутно получаем линеаризованные матричные равенства

$$\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k = \mathbf{E}_k \overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (37)$$

На итерации в текущий момент времени t_n первое соотношение (37) выражает скорости деформаций связующего материала $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0$ через $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ — скорости осредненных деформаций КМ, а второе равенство (37) определяет скорости деформаций арматуры k -го семейства $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_k$ через $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_0$ — скорости деформаций связующей матрицы, то есть в конечном итоге опять же через $\overset{n}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}$.

Согласно (35) и (36), на рассматриваемой при $t = t_n$ итерации матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k и вектор-столбцы \mathbf{p} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k в соотношениях (34) и (37) с учетом (33) уже известны.

3. Уточненная модель изгибного поведения КМ-пластин

Как и в [29], для описания возможного (например при ортогональном 3D-армировании [11, 12, 14, 15]) слабого сопротивления КМ-пластины поперечному сдвигу используем более точную, чем в рамках кинематической модели Редди [10, 18, 19, 25, 40], теорию изгибного деформирования, и учитываем при этом геометрическую нелинейность в приближении Кармана. В работе [29] продемонстрировано, что при неупругом деформировании материалов компонентов композиции явную численную схему типа «крест» удастся разработать только для частных (однако имеющих практическую важность) видов как нагружения КМ-конструкции, так и структур ее пространственного армирования, а именно:

– если на лицевых поверхностях тонкостенной конструкции можно пренебречь распределенными касательными внешними силами;
 – если арматура некоторого k -го семейства уложена наклонно, то есть $0 < \theta_k < \pi/2$, $1 \leq k \leq N$ (см. Рис. 1), но при этом обязательно должно быть l -е семейство волокон с параметрами укладки $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k$, $\omega_l = \omega_k$ ($1 \leq l \leq N$, $l \neq k$), причем материал арматуры обоих семейств один и тот же.

З а м е ч а н и е. Структуры пространственного армирования с указанными свойствами часто встречаются в инженерных приложениях [11, 12, 14, 15]. В частности, к ним относится ортогональная 3D-структура [11, 12], а также структура армирования, изображенная на рисунке 2а. Естественно, все сказанное выше относится и к более общему случаю — вязкоупругопластическому деформированию материалов компонентов композиции. На основании этого считаем далее: касательные силы на лицевых плоскостях КМ-пластины пренебрежимо малы; пространственная структура армирования обладает описанным выше свойством.

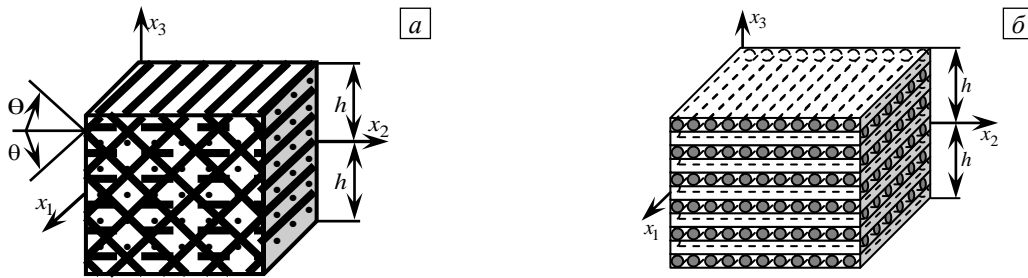


Рис. 2. Элемент КМ-пластины с пространственной 4D-структурой армирования (а) и с ортогональной плоской 2D-структурой (б)

Согласно результатам работы [29], для пластины толщиной $2h$ в декартовой системе координат x_i (см. Рис. 2) осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек U_i в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируются так:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (38)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (i, j = 1, 2),$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2), \quad (39)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}.$$

Здесь: u_i — перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в тангенциальных направлениях x_i ; w — прогиб; t_0 — начальный момент времени t ; ∂_i — оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i = 1, 2$); M — целое число, определяющее количество слагаемых, которые удерживаются в частичных суммах по степеням поперечной координаты x_3 ; Ω — область, занимаемая пластиной в плане. При $M = 0$ равенства (38), (39) редуцируются в кинематические гипотезы теории Редди [10, 18, 19, 25, 40].

В соотношениях (38), (39) неизвестными являются функции w , u_i , $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2$, $0 \leq m \leq M$), которые зависят от времени t и двух пространственных координат x_1, x_2 .

Так как исследуется механическое поведение КМ-пластины, являющейся гибкой тонкостенной системой, нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать линейно по координате x_3 [21]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad (40)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ — напряжения на лицевых (нижней «-» и верхней «+») плоскостях, которые известны из силовых граничных условий.

Линеаризованное матричное соотношение (34) представляет собой систему шести алгебраических уравнений. Из третьего уравнения этой системы, на основании условий соответствия, аналогичных (27), при $t = t_n$ определяем:

$$\dot{\varepsilon}_{33}^n \equiv \dot{\varepsilon}_3^n = \left(b_{33}^n \right)^{-1} \left(\dot{\sigma}_3^n - p_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\varepsilon}_i^n \right), \quad (41)$$

где b_{3i} ($i = \overline{1, 6}$) и p_3 — компоненты матрицы \mathbf{B} и вектор-столбца \mathbf{p} в равенстве (34); производная $\dot{\sigma}_3$ известна из выражения (40) после его дифференцирования по времени. Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части (41) получаются путем дифференцирования по t соотношений (38), то есть выражаются через функции w , \dot{w} , \dot{u}_l , $\dot{\varepsilon}_{j3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) и их частные производные по переменным x_i ($l = 1, 2$).

Для завершения формулировки задачи деформирования гибких армированных пластин к соотношениям (38)–(41) необходимо добавить двумерные уравнения движения и соответствующие им граничные и начальные условия (см. в [29] равенства (20), (22), (23) и (25)).

4. Метод расчета

Как отмечалось в разделе 2, численное решение рассматриваемой задачи строим на базе метода шагов по времени. В связи с этим предполагаем, что в моменты времени t_m известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_s^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv u_s^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ \varepsilon_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ p_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv p_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{p}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{p}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{p}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{p}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \varepsilon_0^{(k)} - p_{ij}^{(k)}, \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\bar{\varepsilon}}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \varepsilon_0^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \varepsilon_0^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}^{(k)}, \quad \dot{\varepsilon}_0^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\varepsilon}_0^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\varepsilon}_0^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\varepsilon}_0^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) &\equiv \dot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \ddot{\sigma}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) \equiv \ddot{\sigma}_{ij}^{(k)}(t_{n-1}, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (42)$$

$$(i, j = \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad m = n - 1, n, \quad 0 \leq k \leq N), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h.$$

Производные по времени t , за исключением случаев, когда в разделе 2 использовалось соотношение (19) с учетом (20), аппроксимируем центральными конечными разностями на 3-точечном шаблоне [18, 19, 22, 29]. Это позволяет разработать явную схему численного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи. Заменяя вторые производные по t от кинематических переменных в двумерных уравнениях движения их конечно-разностными аналогами, при обозначениях, подобных (42), получим [29]:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{(l)} - 2u_i^{(l)} + u_i^{(l)} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w, \\ \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w - 2w + w \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \\ &(i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (43)$$

где при учете (39) и (40)

$$\rho \equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3,$$

$$IM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) \equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right] \quad (44)$$

$$(i, j = \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1).$$

При этом: ρ_0, ρ_k — объемная плотность материалов связующей матрицы и арматуры k -го семейства; $u_s^{(l)}$ — введенные для удобства функции. Массовые нагрузки в равенствах (43) во внимание не приняты.

Согласно (42) и (44), правые части в уравнениях (43) известны в текущий дискретный момент времени t_n . Используя необходимые граничные условия (см. в [29] выражения (22) и (23)), из (43) по явной схеме определяем значения функций w и $u_i^{(l)}$ ($1 \leq l \leq M+1$) в следующий момент времени — t_{n+1} . Далее, по формуле (30) из [29] вычисляем функции u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, \quad 0 \leq m \leq M$), затем на основании выражений (38) находим осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . В предыдущий по отношению к t_n момент времени — t_{n-1} , деформации ε_{ij}^{n-1} предполагаются известными (см. (38) с учетом (42)), поэтому, осуществив численное дифференцирование по t и приняв во внимание соотношение (41), можем установить все скорости осредненных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$ (или $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$) в каждой точке КМ-пластины при $t = t_n$.

После этого по формулам (37) с учетом (27), (35) и (36) вычисляем скорости деформаций компонентов композиции $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$, а по формулам (30) с учетом (31) — скорости напряжений $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n$. Применяя соотношение (19) при учете (20), (23) к функциям $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$, $\dot{p}_{ij}^{(k)}$ и $\dot{\sigma}_{ij}^{(k)}$, отыскиваем значения вторых производных $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$, $\ddot{p}_{ij}^{(k)}$, $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$, $\ddot{\varepsilon}_0^{(k)}$ и $\ddot{\sigma}_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N$). Таким образом, все функции, указанные в (42), становятся известными в следующий за текущим момент времени (при замене индекса n на индекс $n+1$). Дальнейшее решение рассматриваемой задачи численно строится совершенно так же, как и в [18, 19, 29].

При проведении практических расчетов с вычислительной точки зрения, как и в [18, 19, 29, 30], в качестве меры упрочнения k -го компонента композиции целесообразно использовать не параметр Одвишта (см. (3)), а величину $\chi^{(k)} = \max\{T_k^p, T_k^m\}$ ($0 \leq k \leq N$), где T_k^p — значение интенсивности касательных напряжений T_k (см. (29)) на мгновенной диаграмме деформирования, при котором материал k -го компонента композиции впервые начинает деформироваться пластически; T_k^m — максимальное значение T_k , достигнутое за всю предыдущую историю деформирования этого компонента в выделенном представительном элементе композиции.

Для начала расчетов по разработанной явной численной схеме необходимо предварительно определить значения функций w и $u_i^{(l)}$, $m = 0, 1$ (см. левые части уравнений (43)). При этом $w^0, u_i^{(l)0}$ задаются начальными условиями (см. (25) в [29]), а w^1 и $u_i^{(l)1}$ ($i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1$) можно вычислить по формуле Тейлора, исходя из начальных условий и двумерных уравнений движения в начальный момент времени t_0 (см. (20) в [29]).

В силу сделанных предположений (42) в исследуемой задаче, кроме традиционных начальных условий при $t = t_0$, следует задать ускорения деформаций — $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)0}, \ddot{p}_{ij}^{(k)0}$, и напряжений — $\ddot{\sigma}_{ij}^{(k)0}$, в компонентах композиции $\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}^{(k)0}$. Если до начального момента времени t_0 КМ-пластина покоилась, находясь в естественном состоянии, то $\ddot{\varepsilon}_{ij}^{(k)0}(\mathbf{r}) = \ddot{p}_{ij}^{(k)0}(\mathbf{r}) \equiv 0$ и $\ddot{\sigma}_{ij}^{(k)0}(\mathbf{r}) \equiv 0$ ($i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq k \leq N$).

В случае, когда область Ω , которую занимает конструкция в плане, прямоугольная, заменяя в (43) производные $\partial_i(g)$ их конечно-разностными аналогами, получим в конечном итоге явную схему типа «крест» [18, 19, 22, 29]. При Ω неканонической формы для дискретизации равенств (43) по пространственным переменным x_i ($i = 1, 2$) целесообразно применить вариационно-разностный подход, использованный в [22]. Необходимые условия устойчивости схемы типа «крест» вытекают из критерия устойчивости Куранта, и для тонкостенных однородных конструкций приведены в [22]. Если эти условия выполняются для каждого компонента композиции, то они с запасом выполняются и для КМ-пластины.

5. Обсуждение результатов расчетов

В отличие от работы [19] исследуем динамическое поведение относительно тонкой удлиненной прямоугольной пластины ($\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b; a = 3b, b = 50 \text{ см}, 2h = 2 \text{ см}; h/b = 1/50$). По всей кромке конструкция жестко закреплена и до начального момента времени $t = t_0 = 0$ покоится. Со стороны нижней лицевой плоскости пластина нагружается давлением $p(t)$, вызванным приходом воздушной взрывной волны (см. выражения (70) и (71) в [19]). На основании экспериментальных данных из [31] в расчетах примем $p_{\max} = 3 \text{ МПа}$, $t_{\max} = 0,1 \text{ мс}$ и $t_{\min} = 2 \text{ мс}$, где p_{\max} — максимальное значение $p(t)$, достигаемое при $t = t_{\max}$; t_{\min} — момент времени, при превышении которого текущее давление $p(t)$ можно считать пренебрежимо малым по сравнению с p_{\max} .

Исследуемая конструкция была изготовлена из эпоксисвязующего и усилена стекловолокнами. Диаграмма мгновенного упругопластического деформирования материала k -го компонента композиции на стадии активного нагружения аппроксимировалась билинейной зависимостью при растяжении–сжатии (см. соотношения (72) в [19]). Для конкретности принято, что вязкоупругое деформирование компонентов композиции описывается определяющими соотношениями модели Максвелла–Больцмана [33], причем объемная вязкость не учитывается, то есть в равенствах (6), (7) полагается: $\alpha^{(k)} = \alpha_0^{(k)} = 0$, $\beta^{(k)} = \beta_0^{(k)} = 0$, $\eta^{(k)} = \eta_0^{(k)} \rightarrow \infty$ и $\mu_0^{(k)} \rightarrow \infty$ ($0 \leq k \leq N$). Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции приведены в таблице, где E , E_s — мгновенные модули упругости первого рода и линейного упрочнения; ν — коэффициент Пуассона; $\sigma_s^{(k)}$ — условный предел текучести.

Физико-механические характеристики компонентов композиции пластины [41, 42]

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	μ , МПа·с
Эпоксисвязующее	1210	0,33	20	2,8	1,114	50
Стекловолокно	2520	0,237	4500	86,8	6,230	200

Рассмотрены две однородных структуры: I) традиционное плоско-перекрестное 2D-армирование ($N = 2$) по направлениям x_1 и x_2 (Рис. 2б) с плотностями $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ соответственно; II) пространственное 4D-армирование ($N = 4$), когда первые два семейства волокон по-прежнему укладываются в направлениях x_1 и x_2 с интенсивностями $\omega_1 = 0,05$ и $\omega_2 = 0,3$, а третье и четвертое семейства волокон укладываются наклонно с плотностями армирования $\omega_3 = \omega_4 = 0,025$. В последнем случае углы сферической системы координат (см. (32) и Рис. 1), задающие направления армирования, имеют следующие значения: $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (то есть на рисунке 2а угол $\theta = \pi/4$). В обеих структурах армирования общий расход волокон одинаков.

С целью исследования влияния вязкости материалов компонентов композиции на особенности динамического поведения и форму остаточного прогиба пластин расчеты осуществлены для разных значений коэффициентов вязкости при чистом сдвиге:

$$\mu_*^{(k)} = i\mu^{(k)} \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad (45)$$

где значения $\mu^{(k)}$ приведены в таблице, а множитель i принимает значения 1, 3 и 6. Ниже обсуждаются результаты условных расчетов.

На рисунке 3 изображены поперечные колебания центральной точки ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$) пластины со структурой армирования I (см. Рис. 2б) при значениях множителя i в формуле (45), соответственно, 1, 3, 6. Аналогичное качественное поведение имеет место и у зависимостей $w_0(t)$ для пластин со структурой армирования II (см. Рис. 2а).

Характер кривых на рисунке 3 свидетельствует о том, что с увеличением значений $\mu_*^{(k)}$ поперечные осцилляции КМ-пластины затухают все медленнее. Кроме того, видно, что амплитуды колебаний в окрестности начального момента времени по величине почти на порядок (а в некоторых случаях даже на два порядка) больше остаточного прогиба, что не наблюдается при пластическом деформировании однородных тонкостенных элементов конструкций [22]. Причина этого заключается в следующем: высокопрочные волокна (см. Табл.) при интенсивном деформировании запасают упругую энергию в таком большом количестве, что после снятия динамической нагрузки арматура, в конечном итоге, стремится

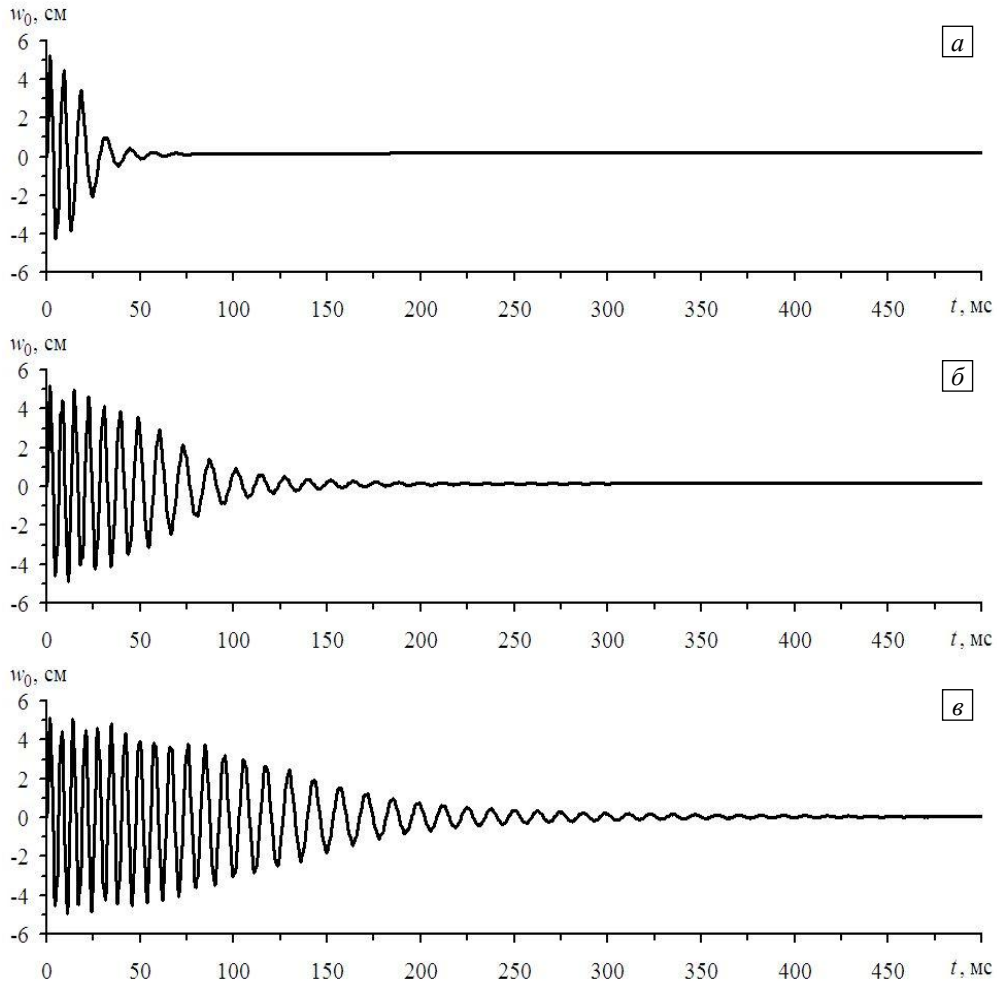


Рис. 3. Осцилляции центральной точки пластины со структурой армирования I при вязкости компонентов композиции (45), где множитель i принимает значения: 1 (а), 3 (б), 6 (в)

вернуть КМ-конструкцию в исходное состояние (и это ей практически удастся), даже несмотря на то, что низкопрочное эпоксисвязующее испытывает при этом значительные знакопеременные пластические деформации.

Изменение значений $\mu_*^{(k)}$ приводит не только к изменению скорости затухания осцилляций КМ-пластин, но и сказывается на форме их остаточных прогибов. Так, на рисунке 4 представлены эпюры

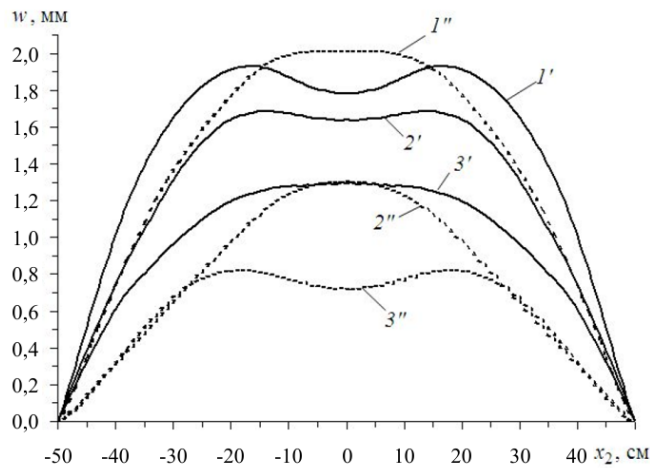


Рис. 4. Эпюры остаточных прогибов в центральных сечениях прямоугольных КМ-пластин с разными структурами армирования

остаточных прогибов рассматриваемых конструкций в их центральных поперечных сечениях $x_1 = 0$. Сплошные кривые $1'$, $2'$ и $3'$ рассчитаны для пластин с традиционной структурой армирования I, а штриховые кривые $1''$, $2''$ и $3''$ — для конструкций с пространственной структурой II, соответственно, при значениях множителя $i = 1, 3, 6$ в (45). Поведение кривых демонстрирует, что в зависимости от типа структуры армирования и величины значений вязкости компонентов композиции остаточный прогиб КМ-пластины может иметь обычно наблюдаемый \cap -образный (кривые $1''$, $2''$ и $3''$) и необычный М-образный (кривые $1'$, $2'$ и $3'$) вид. В последнем случае конструкции имеют складчатую остаточную форму, которая не наблюдается при вязкоупругопластическом деформировании

пластин из однородных материалов. Кроме того, сравнение кривых $2'$, $2''$ и $3'$, $3''$ свидетельствует о том, что даже в случаях относительно тонких КМ-пластин замена традиционной плоско-перекрестной структуры армирования I (кривые $2'$ и $3'$) на пространственную структуру II (кривые $2''$ и $3''$) приводит к существенному уменьшению максимальной величины остаточного прогиба конструкции.

Все кривые на рисунках 3 и 4 определены по уточненной теории изгиба пластин при $M = 7$ (см. (38), (39)). Аналогичные расчеты, проведенные по теории Редди ($M = 0$), показали, что получающиеся при этом зависимости $w_0(t)$ и $w(x_2)$ визуально практически не отличаются от изображенных, поэтому они не приведены. Так, максимальный остаточный прогиб, рассчитанный при $i = 6$ (см. (45)) по теории Редди для КМ-пластины со структурой армирования II, всего на 1,5% меньше аналогичной величины, вычисленной по уточненной теории (см. кривую $3''$ на Рис. 4).

На рисунках 5 и 6 изображены осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций $\varepsilon_m^{(k)}$ ($\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a$, $|x_2| \leq b$ и $|x_3| \leq h$) связующего материала ($k = 0$; кривые $1'$, $1''$) и арматуры второго семейства ($k = 2$; кривые $2'$, $2''$), рассчитанные при $i = 6$ в формуле (45) по разным теориям для пластины со структурой армирования II (Рис. 5) и по уточненной теории для пластин с разными структурами армирования (Рис. 6).

Кривые $1'$ и $2'$ на рисунке 5 получены по уточной теории изгиба при $M = 7$, а кривые $1''$ и $2''$ — по теории Редди (кривые $2'$ и $2''$ не изображены, чтобы не загромождать рисунок 5а). Сравнение максимумов кривых $1'$ и $1''$ (Рис. 5а) при $t = 5$ мс показывает, что наибольшее значение $\varepsilon_m^{(0)}$, рассчитанное по теории Редди (сплошная кривая $1''$), на 14,4% меньше аналогичной величины, найденной по уточненной теории (штриховая кривая $1'$). Сопоставление же ординат точек кривых $1'$, $1''$ и $2'$, $2''$ (Рис. 5б) при $t = 500$ мс свидетельствует о том, что расчет по теории Редди дает заниженные максимальные значения интенсивности остаточных деформаций связующего (см. кривые $1'$, $1''$) примерно на 7%, а арматуры второго семейства (см. кривые $2'$, $2''$) — на 13,5% по сравнению со значениями, отвечающими уточненной теории. Следовательно, даже для относительно тонкой КМ-пластины со структурой армирования II расчет по традиционной неклассической теории Редди не гарантирует определения деформированного состояния компонентов композиции с точностью 10% по сравнению с расчетом по уточной теории (как по максимальным, так и по остаточным деформациям).

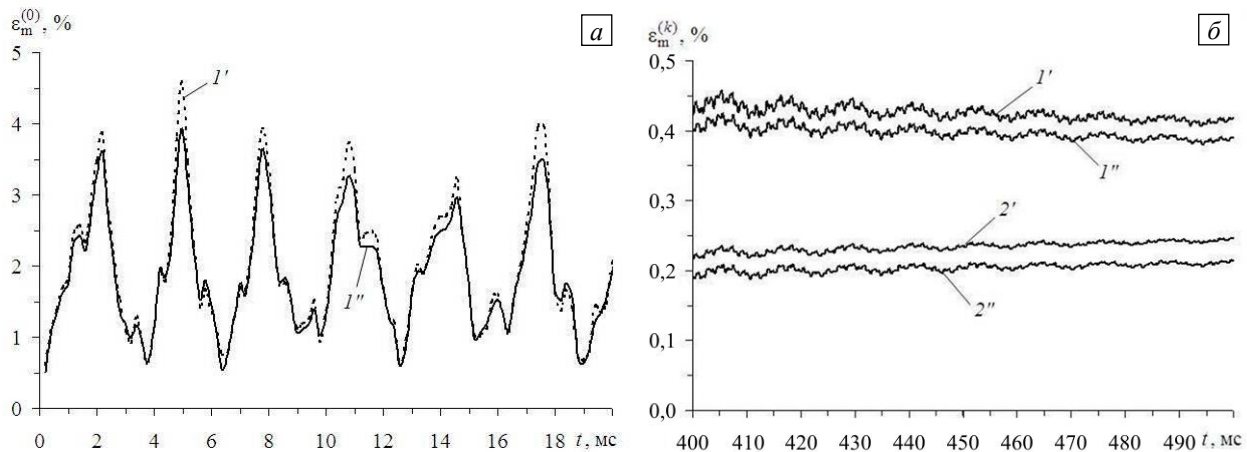


Рис. 5. Осцилляции максимальных значений интенсивностей деформаций компонентов композиции пластины со структурой армирования II, рассчитанные по разным теориям вблизи моментов времени, мс: $t = 0$ (а); $t = 500$ (б)

На рисунке 6 кривые $1'$ и $2'$ получены при тех же условиях, что и на рисунке 5, а кривые $1''$ и $2''$ рассчитаны по уточненной теории ($M = 7$) для КМ-пластины со структурой армирования I (кривые $2'$ и $2''$ не изображены на рисунке 6а, чтобы не загромождать его). Из сравнения максимумов кривых $1'$ и $1''$ (см. Рис. 6а, соответственно, вблизи t , равном 5 и 2 мс) следует, что при замене плоско-перекрестной структуры армирования I (сплошная кривая $1''$) на пространственную структуру II (штриховая кривая $1'$) максимальное значение $\varepsilon_m^{(0)}$ в относительно тонкой КМ-пластине незначительно, но увеличивается (на 2,2%). Однако сопоставление ординат точек кривых $1'$, $1''$ и $2'$, $2''$ (см. Рис. 6б при $t = 500$ мс) показывает, что такая замена структур армирования позволяет примерно на 55% снизить остаточные деформации связующего материала (см. кривые $1'$, $1''$) и почти на 40% уменьшить аналогичные величины в арматуре второго семейства (см. кривые $2'$, $2''$), которая из всех семейств волокон в процессе осцилляции

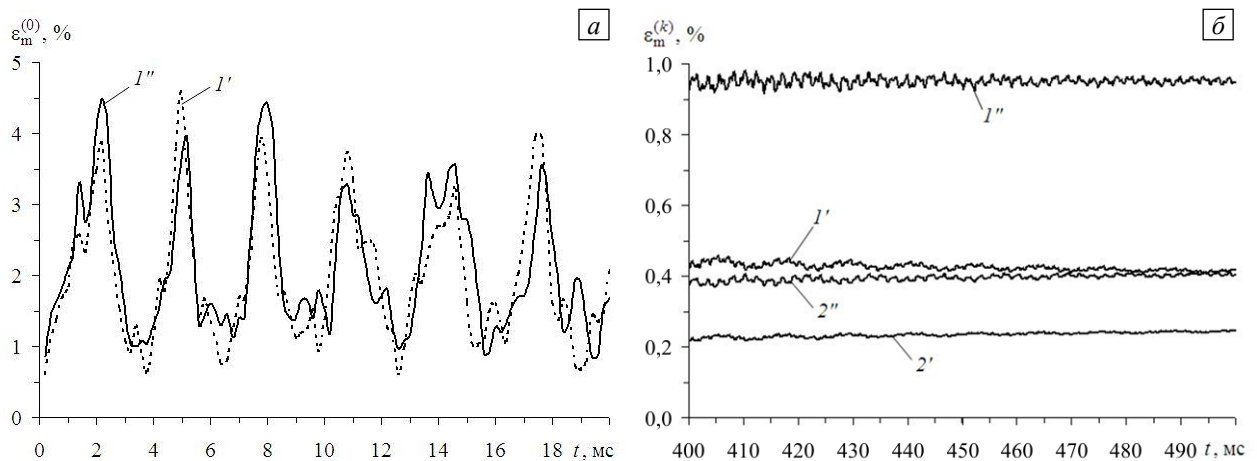


Рис. 6. Осцилляции максимальных значений интенсивностей деформаций компонентов композиций пластин с разными структурами армирования, рассчитанные по уточненной теории вблизи моментов времени, мс: $t = 0$ (а); $t = 500$ (б)

конструкции испытывает наибольшее деформирование. Таким образом, если множитель i в формуле (45) имеет значение 6, то замена в КМ-пластине структуры армирования вида I на структуру II приводит к тому, что существенно убывают как максимальный остаточный прогиб (см. кривые $3'$ и $3''$, Рис. 4), так и интенсивности остаточных деформаций связующего и арматуры второго семейства (см. Рис. 6б). Дополнительные расчеты показали, что аналогичный вывод справедлив и в случае, когда $i = 3$ (см. (45)).

Приведенные выше результаты получены для довольно тонких КМ-пластин (с относительной толщиной 1/50). Вычислительные эксперименты свидетельствуют, что с увеличением относительной толщины конструкций эффект от замены традиционной плоско-перекрестной структуры армирования I (Рис. 2б) на пространственную структуру II (Рис. 2а) резко возрастает. Кроме того, с ростом относительной толщины КМ-пластин увеличивается и разность решений, отвечающих теории Редди и уточненной теории.

6. Заключение

Разработанная численно-аналитическая модель вязкоупругопластического изгибного деформирования КМ-пластин с пространственными структурами армирования позволяет более точно, чем традиционная неклассическая теория Редди, учитывать возможное слабое сопротивление таких конструкций поперечным сдвигам и, как следствие этого, более точно рассчитывать остаточные перемещения и остаточные деформированные состояния компонентов композиции при их интенсивном кратковременном нагружении.

Выполненные расчеты показали, что даже для относительно тонких КМ-пластин теория Редди не гарантирует определения интенсивности остаточных деформаций в компонентах композиции с точностью до 10% по сравнению с установленной по уточненной теории.

Продемонстрировано, что величина и форма остаточных прогибов зависят не только от структуры армирования, но и от значений вязкоупругих характеристик материалов композиции. Так, после динамического воздействия взрывного типа тонкая удлиненная КМ-пластина может приобретать нетрадиционную остаточную форму гофрированного вида, при этом складки ориентированы в продольном направлении. Такая остаточная форма не характерна для однородных пластин, динамически деформируемых в поперечном направлении.

Обнаружено, что даже в относительно тонкой пластине из стеклопластиковой композиции замена традиционной плоско-перекрестной структуры армирования (Рис. 2б) на пространственную структуру (Рис. 2а) с сохранением общего расхода материала волокон позволяет существенно уменьшить (причем в разы) величину остаточного прогиба и наибольшее значение интенсивности остаточных деформаций связующего материала и арматуры некоторых семейств.

Высокопрочные армирующие волокна при деформировании запасают упругую энергию в столь большом количестве, что после снятия внешней динамической нагрузки арматура стремится вернуть тонкостенную КМ-конструкцию в исходное положение (и это ей практически удастся), даже несмотря на то, что низкопрочное связующее испытывает при этом значительные знакопеременные пластические деформации. Отсюда следует тот факт, что амплитуды поперечных осцилляций тонких КМ-пластин в окрестности начального момента времени при нагрузках взрывного типа почти на порядок (в некоторых случаях даже на два порядка) больше величины остаточного прогиба (в то время как интенсивность остаточных деформаций компонентов композиции может достигать значений порядка 1%). Такое поведение не характерно для пластически деформируемых однородных тонкостенных элементов конструкций при их интенсивном кратковременном нагружении. Автор надеется, что полученные им

нетривиальные результаты явятся стимулом для проведения соответствующих экспериментальных исследований.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 — Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

Литература

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. 2001. Vol. 53. P. 21-42. [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6)
2. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction // Progr. Aero. Sci. 2005. Vol. 41. P. 143-151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>
3. Gibson R.F. Principles of composite material mechanics / 4th ed. CRC Press, 2016. 700 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite // Front. Mech. Eng. 2013. Vol. 8. P. 187-200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Vasiliev V.V., Morozov E. Advanced mechanics of composite materials and structural elements. Elsevier, 2013. 832 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>
7. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Int. J. Non Lin. Mech. 2011. Vol. 46. P. 807-817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>
8. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review // Int. J. Impact Eng. 2014. Vol. 67. P. 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
9. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Compos. Struct. 2010. Vol. 93. P. 14-31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
10. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd Ed. CRC Press, 2004. 831 p.
11. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
12. Жигун И.Г., Душин М.И., Поляков В.А., Якушин В.А. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 2. Экспериментальное изучение // Механика полимеров. 1973. № 6. С. 1011-1018. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00856974>)
13. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites // SAMPE J. 2001. Vol. 37. No. 3. P. 3-17.
14. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mech. Compos. Mater. 2009. Vol. 45. P. 165-174. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>
15. Тарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г. Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик // Механика полимеров. 1973. № 5. С. 853-860. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00856271>)
16. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов. 1982. № 1. С. 14-22.
17. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // Механика композитных материалов. 2010. Т. 46, № 5. С. 663-678. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x>)
18. Янковский А.П. Упругопластическое деформирование гибких пластин с пространственными структурами армирования // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 6. С. 112-122. <https://doi.org/10.15372/PMTF20180611>
19. Янковский А.П. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 1. С. 80-97. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8>
20. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Егоров А.Г. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // Механика композитных материалов. 2014. Т. 50, № 2. С. 185-198. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9400-8>)
21. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
22. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
23. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates // J. Appl. Mech. 1945. Vol. 12, No. 2. P. 69-77.
24. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // J. Appl. Phys. 1951. Vol. 22, No. 3. P. 316-323.
25. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
26. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // Изв. АН. МТТ. 1994. № 2. С. 33-42.
27. Whitney J.M., Sun C.T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // J. Sound Vib. 1973. Vol. 30. P. 85-97. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5)
28. Пиккуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 535 с.
29. Янковский А.П. Моделирование упругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 3. С. 335-354. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.25>

30. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.
31. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.* 1987. Vol. 26. No. 1-2. P. 1-15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X)
32. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Butterworth-Heinemann, 2000. Vol. 1. The basis. 707 p.
33. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
34. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
35. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
36. Нагди П.М., Мерч С.А. О механическом поведении вязко-упруго-пластических тел // *Прикл. механика: Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е.* 1963. Т. 30, № 3. С. 3-12. (English version <https://doi.org/10.1115/1.3636556>)
37. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Егоров А.Г., Каюмов Р.А. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 3. Идентификация характеристик внутреннего демпфирования // *Механика композитных материалов.* 2014. Т. 50, № 5. С. 883-902. (English version <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9451-x>)
38. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. Изд. 3-е. М.: ЛЕНАНД, 2019. 752 с.
39. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
40. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Соппротивление жестких полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1972. 498 с.
41. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
42. Справочник по композитным материалам / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 1. 448 с.

References

1. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, pp. 21-42. [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6)
2. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction. *Progr. Aero. Sci.*, 2005, vol. 41, pp. 143-151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>
3. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics* / 4th ed. CRC Press, 2016. 700 p. <https://doi.org/10.1201/b19626>
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite. *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, pp. 187-200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>
5. Solomonov Yu.S., Georgiyevskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnyye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. Moscow, Fizmatlit, 2014, 408 p.
6. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Elsevier, 2013. 832 p. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-07135-1>
7. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807-817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>
8. Morinière F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review. *Int. J. Impact Eng.*, 2014, vol. 67, pp. 27-38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>
9. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Compos. Struct.*, 2010, vol. 93, pp. 14-31. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
10. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2nd Ed. CRC Press, 2004. 831 p.
11. Tarnopol'skiy Yu.M., Zhigun I.G., Polyakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnyye materialy: Spravochnik* [Spatially reinforced composite materials: Reference Book]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1987, 224 p.
12. Zhigun I.G., Dushin M.I., Polyakov V.A., Yakushin V.A. Composites reinforced with a system of three straight mutually orthogonal fibers. 2. Experimental study. *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, pp. 895-900. <https://doi.org/10.1007/BF00856974>
13. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. A new generation of 3D woven fabric performs and composites. *SAMPE J.*, 2001, vol. 37, no. 3, pp. 3-17.
14. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites. *Mech. Compos. Mater.*, 2009, vol. 45, pp. 165-174. <https://doi.org/10.1007/s11029-009-9072-y>
15. Tarnopol'skiy Yu.M., Polyakov V.A., Zhigun I.G. Composite materials reinforced with a system of three straight, mutually orthogonal fibers. I. Calculation of the elastic characteristics. *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, pp. 754-759. <https://doi.org/10.1007/BF00856271>
16. Kregers A.F., Teters G.A. Strukturnaya model' deformirovaniya anizotropnykh, prostranstvenno armirovannykh kompozitov [Structural model of deformation of anisotropic, spatially reinforced composites]. *Mekhanika kompozitnykh materialov – Mechanics of Composite Materials*, 1982, no. 1, pp. 14-22.
17. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 451-460. <https://doi.org/10.1007/s11029-010-9162-x>
18. Yankovskii A.P. Elastic-plastic deformation of flexible plates with spatial reinforcement structures. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, pp. 1058-1066. <https://doi.org/10.1134/S0021894418060111>
19. Yankovskii A.P. Modelirovanie vyazkoupругoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin s uchetom slabogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu [Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates

- with account of weak resistance to transverse shear]. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 1, pp. 80-97. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8>
20. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, pp. 127-136. <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9400-8>
 21. Bogdanovich A.E. *Nelineynyye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne, 1987. 295 p.
 22. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod State University, 2002. 400 p.
 23. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, no. 2, pp. 69-77.
 24. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *J. Appl. Phys.*, 1951, vol. 22, no. 3, pp. 316-323.
 25. Andreev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotoryye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
 26. Kulikov G.M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells. *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27-35.
 27. Whitney J.M., Sun C.T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, pp. 85-97. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5)
 28. Pikul' V.V. *Mekhanika obolochek* [Mechanics of shells]. Vladivostok, Dal'nauka, 2009. 535 p.
 29. Yankovskii A.P. Modelirovaniye uprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh plogikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Modeling of elastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial reinforcement structures]. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 335-354. <http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.25>
 30. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogul'skiy I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoye resheniye dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [Numerical solution of dynamic problems of elastoplastic deformation of solids]. Novosibirsk: Siberian university, 2002. 352 p.
 31. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, no. 1-2, pp. 1-15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X)
 32. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method*. Butterworth-Heinemann, 2000. Vol. 1. The basis. 707 p.
 33. Flugge S. (ed.) *Handbuch der Physik. Band VI: Elastizitat und Plastizitat* [Handbook of Physics. Vol. 6: Elasticity and Plasticity]. Springer-Verlag, 1958. 642 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43081-1>
 34. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. *Mekhanika plasticheskikh sred* [Mechanics of plastic mediums]. Moscow, Mir, 1979. 302 p.
 35. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Bases of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969. 420 p.
 36. Naghdi P.M., Murch S.A. On the mechanical behavior of viscoelastic/plastic solids. *J. Appl. Mech.*, 1963, vol. 30, no. 3, pp. 321-328. <https://doi.org/10.1115/1.3636556>
 37. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G., Kayumov R.A. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 3. Identification of the characteristics of internal damping. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, pp. 633-646. <https://doi.org/10.1007/s11029-014-9451-x>
 38. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksiy* [Creep of structural elements] / 3th ed. Moscow, LENAND, 2019, 752 p.
 39. Khazhinskiy G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov* [Model of deformation and fracture of metals]. Moscow, Nauchnyy mir, 2011. 231 p.
 40. Malmeyster A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivleniye zhestkikh polimernykh materialov* [Resistance of rigid polymeric materials]. Riga, Zinatne, 1972, 498 p.
 41. Karpinos D.M. (ed.) *Kompozitsionnyye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 p.
 42. Lubin G. (ed.) *Handbook of composites*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.

Поступила в редакцию 19.12.2019; после доработки 24.12.2019; принята к опубликованию 24.12.2019