

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.4.38](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.38)

УДК 534.1

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗИ УГЛОВЫХ И ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИБРОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

И.Н. Шардаков, И.О. Глот, А.П. Шестаков, К.В. Собянин, Д.В. Губский

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Современные радиотехнические комплексы, электронно-вычислительная аппаратура и навигационное оборудование, размещаемые на подвижных объектах (летательных аппаратах, кораблях, автомобилях и другом), в процессе эксплуатации могут испытывать значительные импульсные и вибрационные механические воздействия – удары, вибрации, линейные перегрузки, акустические шумы. Эти воздействия способны исказить параметры электрических сигналов, вносить дополнительные погрешности в показания приборов и даже приводить к разрушению элементов аппаратуры. Поэтому возникает необходимость в минимизации нежелательных движений этих устройств. Одним из эффективных способов решения проблемы является организация их пассивной виброзащиты, связанной с использованием инерционных, упругих, диссипативных и других пассивных элементов. В данной статье объектом исследования служит блок электронных устройств, закрепленный с помощью системы из четырех демпферов на несущей конструкции, которая подвергается поступательному вибрационному воздействию по трем взаимно ортогональным направлениям. Вследствие этого в демпфируемом блоке возбуждаются угловые колебания. Математическое моделирование реакции блока на внешние силовые факторы осуществляется в рамках классической теории динамики твердого тела. Выполнена серия численных экспериментов по определению отклика кинематических характеристик демпфируемого блока на внешнее периодическое воздействие при различных значениях коэффициентов жесткости и коэффициентов диссипации демпферов и разном положении центра масс системы. Показано, что отклонение центра масс от положения центра жесткости, а также изменение жесткостных и диссипативных характеристик демпферов в пределах статистического разброса их значений вызывают значительное увеличение угловых колебаний демпфируемого блока.

*Ключевые слова:* пассивная виброзащита, математическая модель, вибрационные испытания, центр жесткости, центр масс, угловые колебания, демпферы, коэффициент жесткости, коэффициент диссипации

## PARAMETRIC ANALYSIS OF INTERACTION BETWEEN ANGULAR AND TRANSLATIONAL VIBRATIONS OF VIBRATION-SENSITIVE SYSTEMS

*I.N. Shardakov, I.O. Glot, A.P. Shestakov, K.V. Sobyenin and D.V. Gubskiy*

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

Modern radio-TV complexes, electronic equipment and navigation systems placed on moving objects (aircrafts, ships, cars and others) are subjected to pulse and vibrational mechanical loads, which may distort the device characteristics and even destroy them. Therefore, there is a need to minimize unwanted movements of these devices. The effective way to solve this problem is the organization of passive vibration isolation of a device. This article explores the mechanical vibrations of a block of shock-sensitive electronic devices fixed on a rigid platform of a supporting structure. The block is isolated from the external structure using 4 dampers. The platform is subjected to translational vibrations in three mutually orthogonal directions. As a result, angular oscillations occur in the insulated block. Mathematical modeling of the block response to external disturbances is carried out in the framework of the classical theory of rigid body dynamics. A series of numerical experiments was performed to simulate the response of the insulated block to an external periodic action. In the simulation, the stiffness and energy dissipation coefficients of dampers as well as the positions of the center of mass are varied. It is shown that the deviation of the position of the center of mass relative to the center of rigidity, as well as a change in the stiffness and energy dissipation coefficients of dampers within the spread around their mean values causes a significant increase in the angular oscillations of the insulated block.

*Key words:* passive vibration isolation, mathematical model, vibration tests, center of stiffness, center of mass, angular vibrations, dampers, stiffness coefficient, energy dissipation coefficient

### 1. Введение

В настоящее время для использования на движущихся объектах разрабатываются и изготавливаются электронные устройства различного назначения: блоки управления, навигационная аппаратура, измерительные устройства, датчики и другое. Очень часто в процессе эксплуатации эти устройства подвергаются значительным импульсным и вибрационным механическим воздействиям — ударам, вибрациям, линейным перегрузкам, акустическим шумам. Воздействия недопустимым образом искажают технические характеристики аппаратуры, вносят дополнительные погрешности в показания приборов, а иногда приводят и к их механическому разрушению. Наиболее распространенным конструктивным оформлением подобных устройств является объединение электронных элементов в единый блок, который закрепляется на корпусе конструкции через амортизаторы. В случае, когда блок чувствительного оборудования существенно более жесткий, чем амортизаторы, его можно условно считать твердым телом. Такое тело имеет 6 степеней свободы: 3 трансляционных (поступательных) и 3 угловых. Взаимосвязь трансляционных и угловых мод колебаний наиболее сильно проявляется в случае, когда реализуются связанные формы колебаний, объединяющие в себе угловое и поступательное движения [1].

Таким образом, для многих электронных устройств встает вопрос об ограничении их кинематических величин, а именно перемещений, углов поворота и соответствующих им скоростей и ускорений. Для большого числа электронных устройств самым актуальным является ограничение на угловые кинематические характеристики [2–5]. Эта проблема особенно значима для современных навигационных устройств, таких, например, как волоконно-оптические гироскопы, основанные на эффекте Саньяка [6–9].

Один из эффективных способов решения проблемы заключается в применении пассивной виброзащиты [10–14]. Для организации эффективной виброзащиты по отношению к конкретному электронному блоку необходимо знать: как распределить демпфирующие устройства в пространстве, чтобы минимизировать контролируемые кинематические параметры; как соотнести направления осей реакций демпферов с положением центра масс жесткого блока, чтобы сделать взаимосвязь угловых и поступательных колебаний минимальной и другое. Ответы на эти вопросы могут быть получены на основе математического моделирования динамического поведения блока чувствительных элементов и последующего анализа результатов численного решения.

В данной статье объектом исследования является твердотельный блок электронной аппаратуры, закрепленный с помощью системы из четырех демпферов на жесткой платформе. Платформа, установленная на несущей конструкции, подвергается поступательному вибрационному воздействию по трем взаимно ортогональным направлениям. Исследуется вибрационный отклик блока на эти возмущения. Моделирование выполнено в рамках общей теории движения твердого тела. Численная реализация осуществлена с использованием программного средства MATLAB.

## 2. Математическая модель

Принципиальная схема пассивной виброизоляции электронных устройств показана на рисунке 1а. Защищаемый от вибраций блок 1 крепится к жесткой платформе 2, которая в свою очередь устанавливается на несущей конструкции. Присоединение блока к платформе осуществляется через посредство четырех демпферов А, В, С, D, имеющих жесткости, значительно меньшие, чем жесткость виброизолируемого блока. Через поступательные движения платформы 2 устройству сообщается движение в трех взаимно перпендикулярных направлениях.

Вследствие значительно меньшей жесткости демпферов блок можно считать абсолютно твердым телом, а демпфирующую часть — набором невесомых элементов, обладающих упругими и диссипативными свойствами. Расчетная модель устройства показана на рисунке 1б. Демпфируемая часть представляется как точечная масса 1 с заданными характеристиками: положением центра масс, совпадающим с началом координат; направлением главных осей и главных моментов инерции. Точечная масса связана с демпферами А, В, С и D с помощью невесомых жестких стержней, которые направлены вдоль осевых линий демпферов. Демпферы расположены таким образом, что их осевые линии 3 пересекаются в одной точке, и эта точка называется центром жесткости системы. Демпферы моделируются шарнирами с 6-ю степенями свободы. Жесткостные и диссипативные свойства демпферов задаются двумя соответствующими коэффициентами для каждой степени свободы. Демпферы крепятся при помощи жестких вертикальных стержней 4 к жесткой невесомой платформе 2. На платформе можно задавать перемещения, скорости или ускорения, воспроизводящие различные режимы нагружения объекта.

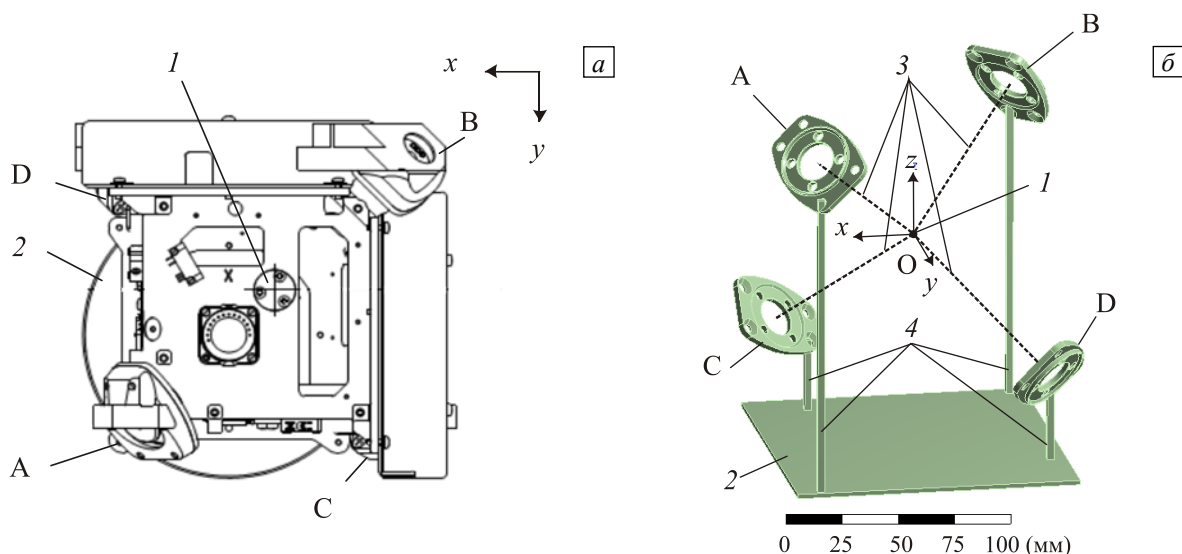


Рис. 1. Схема демпфирующего устройства (а) и его модельное представление (б)

Математическое моделирование механической реакции защищаемого блока на внешние силовые факторы осуществляется в рамках классической теории динамики твердого тела [15]. В соответствии с этим уравнения движения, описывающие поступательное движение центра масс твердого блока, имеют вид:

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial t^2} &= F_\xi, \\ m \frac{\partial^2 U_\eta}{\partial t^2} &= F_\eta, \\ m \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial t^2} &= F. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь:  $\xi, \eta, \zeta$  — оси неподвижной системы координат;  $U_\xi, U_\eta, U_\zeta$  — перемещения центра масс блока;  $m$  — масса блока;  $F_\xi, F_\eta, F_\zeta$  — силы, прикладываемые к центру масс блока.

Уравнения вращательного движения твердого блока представляются как

$$\begin{aligned} I_x \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= M_x, \\ I_y \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= M_y, \\ I_z \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= M_z, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t$  — время,  $x, y, z$  — оси подвижной системы координат, совпадающие с главными осями инерции твердого блока,  $I_x, I_y, I_z$  — главные моменты инерции,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  — угловые скорости,  $M_x, M_y, M_z$  — крутящие моменты, прикладываемые к блоку.

Положение подвижной системы координат определяется с помощью самолетных углов [16], которые связаны с угловыми скоростями следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\cos(\varphi)}{\cos(\theta)} \omega_y - \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\theta)} \omega_z, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \sin(\varphi) \omega_y + \cos(\varphi) \omega_z, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \omega_x - \cos(\varphi) \operatorname{tg}(\theta) \omega_y + \sin(\varphi) \operatorname{tg}(\theta) \omega_z. \end{aligned} \quad (3)$$

Имеют место начальные условия:

$$\begin{aligned} \omega_x|_{t=0} &= \omega_x^0, & \omega_y|_{t=0} &= \omega_y^0, & \omega_z|_{t=0} &= \omega_z^0, \\ \psi|_{t=0} &= \psi^0, & \theta|_{t=0} &= \theta^0, & \varphi|_{t=0} &= \varphi^0, \\ U_\xi|_{t=0} &= U_\xi^0, & U_\eta|_{t=0} &= U_\eta^0, & U_\zeta|_{t=0} &= U_\zeta^0, \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial t}|_{t=0} &= v_\xi^0, & \frac{\partial U_\eta}{\partial t}|_{t=0} &= v_\eta^0, & \frac{\partial U_\zeta}{\partial t}|_{t=0} &= v_\zeta^0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $v_\xi^0, v_\eta^0, v_\zeta^0$  — начальные скорости центра масс твердого блока.

Система уравнений (1)–(4) формулируется далее в двух базисах: первый задает неподвижную систему координат  $\{\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0\} \rightarrow \{\xi, \eta, \zeta\}$ ; второй — подвижную, связанную с твердым блоком:  $\{\mathbf{e}_1^m, \mathbf{e}_2^m, \mathbf{e}_3^m\} \rightarrow \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ . В начальный момент времени базисы совпадают. Прямое и обратное преобразование базисов осуществляется с помощью матрицы поворота  $\mathbf{R}$ , зависящей от самолетных углов  $\psi, \theta, \varphi$ :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\sin(\psi) - \cos(\varphi)\cos(\psi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\sin(\psi) + \sin(\varphi)\cos(\psi)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\cos(\varphi) & -\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\psi)\cos(\theta) & \sin(\varphi)\cos(\psi) + \cos(\varphi)\sin(\psi)\sin(\theta) & \cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi)\sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы  $\mathbf{R}$  любой вектор  $\mathbf{V}^m$ , определенный в подвижном базисе  $\{\mathbf{e}_i^m\}$ , может быть записан в исходном базисе  $\{\mathbf{e}_i^0\}$  следующим образом:  $\mathbf{V}^0 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}^m$ , и, наоборот:  $\mathbf{V}^m = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}^0$  ( $\mathbf{R}^T$  — транспонированная матрица  $\mathbf{R}$ ). Здесь и далее верхние индексы 0 и  $m$  векторов указывают на принадлежность к неподвижному и подвижному базису соответственно.

Виброизолируемый твердый блок связан с внешним корпусом устройства через посредство демпферов, ориентация которых задается системой векторов  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  (Рис. 2), а положение относительно твердого блока — радиус-вектором  $\mathbf{V}_0$ , направленным из начала неподвижной системы координат  $O$  в точку  $O_1$ , расположенную в геометрическом центре демпфера. Система векторов  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$  жестко связана с жесткой частью  $I$  демпфера и поэтому перемещается вместе с ней. В произвольный момент времени  $t$  система этих векторов и вектор  $\mathbf{V}_0$  в неподвижной системе координат определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{V}_{1t}^0, \mathbf{V}_{2t}^0, \mathbf{V}_{3t}^0] &= \mathbf{R} \cdot [\mathbf{V}_1^0, \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0], \\ \mathbf{V}_{0t}^0 &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}_0^0 + \mathbf{U}_g^0, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{U}_g^0$  — вектор перемещения центра масс твердого блока. В подвижной системе координат эти векторы не изменяются (сохраняют начальные значения):

$$[\mathbf{V}_{0t}^m, \mathbf{V}_{1t}^m, \mathbf{V}_{2t}^m, \mathbf{V}_{3t}^m] = [\mathbf{V}_0^m, \mathbf{V}_1^m, \mathbf{V}_2^m, \mathbf{V}_3^m].$$

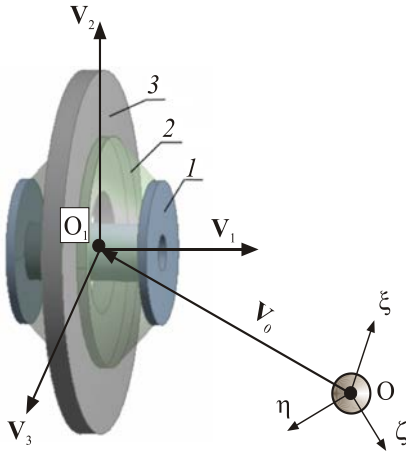


Рис. 2. Демпфер и система векторов, определяющая его ориентацию: 1, 3 — недеформируемые части демпфера, связанные с твердым блоком и внешним корпусом соответственно, 2 — деформируемая часть демпфера

Для определения сил, возникающих в демпфере при его деформировании, необходимо определить ряд величин:

- перемещение центра демпфера;
- углы поворота осей демпфера относительно начального состояния;
- угловые и линейные скорости демпфера относительно начального состояния.

Перемещение центра тяжести демпфера рассчитывается по формуле:  $\mathbf{U}_d^0 = \mathbf{V}_{0t}^0 - \mathbf{V}_0^0$ .

Для нахождения поворота осей демпфера относительно начального состояния сначала вычисляются:  $\mathbf{V}_{rot}^0 = \mathbf{V}_1^0 \times \mathbf{V}_{1t}^0$

— вектор поворота, приводящий исходный вектор  $\mathbf{V}_1^0$  в его конечное состояние  $\mathbf{V}_{1t}^0$ ;  $A_{rot} = \arcsin(|\mathbf{V}_{rot}^0|)$  —

величина угла поворота;  $\mathbf{V}_{rot,n} = \mathbf{V}_{rot}^0 / |\mathbf{V}_{rot}^0|$  — единичный

вектор вращения;  $\mathbf{V}_{2tr}^0 = \mathbf{M}_{rav}(\mathbf{V}_{rot,n}, -A_{rot}) \cdot \mathbf{V}_{2t}^0$ , где  $\mathbf{V}_{2t}^0$  — это

вектор  $\mathbf{V}_2^0$  в положении, которое он занимает в произвольный момент времени, а  $\mathbf{V}_{2tr}^0$  — его проекция на плоскость, сформированную векторами  $\mathbf{V}_2^0$  и  $\mathbf{V}_3^0$  в начальном положении;  $\mathbf{M}_{rav}(\mathbf{V}, A)$  — матрица, описывающая поворот вокруг единичного вектора  $\mathbf{V}$  на угол  $A$ ; ее компоненты имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \cos(A) + (1 - \cos(A)) V_1 V_1 & (1 - \cos(A)) V_1 V_2 - \sin(A) V_3 & (1 - \cos(A)) V_1 V_3 + \sin(A) V_2 \\ (1 - \cos(A)) V_1 V_2 + \sin(A) V_3 & \cos(A) + (1 - \cos(A)) V_2 V_2 & (1 - \cos(A)) V_2 V_3 - \sin(A) V_1 \\ (1 - \cos(A)) V_1 V_3 - \sin(A) V_2 & (1 - \cos(A)) V_2 V_3 + \sin(A) V_1 & \cos(A) + (1 - \cos(A)) V_3 V_3 \end{bmatrix}.$$

С помощью найденных величин искомые углы выражаются следующим образом:

$$A_1 = \arcsin(\mathbf{V}_1^0 \cdot (\mathbf{V}_2^0 \times \mathbf{V}_{2tr}^0));$$

$$A_2 = A_{rot} (\mathbf{V}_{rot,n} \cdot \mathbf{V}_2^0);$$

$$A_3 = A_{rot} (\mathbf{V}_{rot,n} \cdot \mathbf{V}_3^0).$$

Для расчета угловых и линейных скоростей жесткой части любого демпфера относительно его начального положения используются формулы:

– для угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega}_d^m = [\mathbf{V}_1^0 \quad \mathbf{V}_2^0 \quad \mathbf{V}_3^0]^T \cdot \boldsymbol{\omega}_g^m,$$

где  $\boldsymbol{\omega}_d^m$  и  $\boldsymbol{\omega}_g^m$  — угловые скорости демпфера и центра масс твердого блока в подвижной системе координат;

– для линейной скорости

$$\mathbf{v}_d^0 = \mathbf{v}_g^0 + \boldsymbol{\omega}_g^0 \times \mathbf{V}_0^0,$$

где  $\boldsymbol{\omega}_g^0 = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}_g^m$  — угловая скорость центра масс твердого блока в неподвижной системе координат.

С учетом вычисленных деформационных характеристик демпферов возникающие в них силовые реакции имеют вид:

– сила, вызванная смещением демпфера,

$$\mathbf{F}_u^0 = C_{1u} (\mathbf{U}_d^0 \cdot \mathbf{V}_1^0) \mathbf{V}_1^0 + C_{2u} (\mathbf{U}_d^0 \cdot \mathbf{V}_2^0) \mathbf{V}_2^0 + C_{3u} (\mathbf{U}_d^0 \cdot \mathbf{V}_3^0) \mathbf{V}_3^0,$$

где  $C_{1u}, C_{2u}, C_{3u}$  — жесткости при смещении в направлениях осей  $\mathbf{V}_1^0, \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0$ ;

– момент от силовых реакций на смещение демпфера:

$$\mathbf{M}_u^m = \mathbf{V}_0^0 \times \mathbf{F}_u^m,$$

где  $\mathbf{F}_{du}^m = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F}_{du}^0$  — вектор сил в подвижной системе координат;

– момент вследствие поворотов демпфера:

$$\mathbf{M}_a^m = C_{1a} A_1 \mathbf{V}_1^0 + C_{2a} A_2 \mathbf{V}_2^0 + C_{3a} A_3 \mathbf{V}_3^0,$$

где  $C_{1a}, C_{2a}, C_{3a}$  — жесткости при повороте вокруг осей  $\mathbf{V}_1^0, \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0$ ;

– сила, вызванная смещением демпфера в вязкой среде:

$$\mathbf{F}_v^0 = K_{1v} (\mathbf{v}_d^0 \cdot \mathbf{V}_1^0) \mathbf{V}_1^0 + K_{2v} (\mathbf{v}_d^0 \cdot \mathbf{V}_2^0) \mathbf{V}_2^0 + K_{3v} (\mathbf{v}_d^0 \cdot \mathbf{V}_3^0) \mathbf{V}_3^0,$$

где  $K_{1v}, K_{2v}, K_{3v}$  — коэффициенты вязкого трения при перемещениях в направлениях осей  $\mathbf{V}_1^0, \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0$ ,

$\mathbf{v}_d^0$  — скорость точки крепления демпфера;

– момент, образованный силовыми реакциями на смещение демпфера в вязкой среде:

$$\mathbf{M}_v^m = \mathbf{V}_0^0 \times (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F}_v^0);$$

– момент, вызванный силовыми реакциями на поворот демпфера в вязкой среде:

$$\mathbf{M}_{va}^m = \{K_{1a} \omega_{1d}^m, K_{2a} \omega_{2d}^m, K_{3a} \omega_{3d}^m\}^T,$$

где  $K_{1a}, K_{2a}, K_{3a}$  — коэффициенты вязкого трения при повороте вокруг осей  $\mathbf{V}_1^0, \mathbf{V}_2^0, \mathbf{V}_3^0$ .

Таким образом, результирующие отклики в виде силы и момента в любом из демпферов имеют вид:

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{F}_u^0 + \mathbf{F}_v^0, \quad \mathbf{M}^m = \mathbf{M}_u^m + \mathbf{M}_a^m + \mathbf{M}_v^m + \mathbf{M}_{va}^m.$$

Суммарное усилие и суммарный момент от  $N$  демпферов равняются сумме реакций всех демпферов:

$$\mathbf{F}_{sum}^0 = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^0, \quad \mathbf{M}_{sum}^m = \sum_{i=1}^N \mathbf{M}_i^m.$$

Суммарные реакции  $\{F_{\xi}^0 \ F_{\eta}^0 \ F_{\zeta}^0\}^T = \mathbf{F}_{sum}^0$  и  $\{M_x^m \ M_y^m \ M_z^m\}^T = \mathbf{M}_{sum}^m$  подставляются затем в уравнения (1) и (2).

Численное решение полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений осуществлялось разностным методом с использованием программного средства MATLAB.

### 3. Результаты численного моделирования и их анализ

Численные эксперименты, проведенные на основе разработанной математической модели, позволили выяснить, каково влияние различных факторов на движение демпфируемого твердого блока. В качестве параметров, потенциально способных внести возмущение в движение блока, рассматривались жесткостные и диссипативные характеристики демпферов, а также положение центра масс устройства по отношению к его центру жесткости.

Оценка диапазона изменения как коэффициентов жесткости, так и коэффициентов диссипации демпферов выполнена на основании результатов вибрационных испытаний демпферов. По полученным в процессе физических экспериментов амплитудно-частотным зависимостям для четырех демпферов определены коэффициенты жесткости и диссипации в осевом ( $\mathbf{V}_1$ ) и радиальном ( $\mathbf{V}_2$ ) направлениях (см. Рис. 2). Результаты статистической обработки этих данных приведены в таблице 1.

Таблица 1. Характеристики демпферов по результатам испытаний

Демпфер	Осевое направление		Радиальное направление	
	Коэффициент жесткости, Н/м	Коэффициент диссипации, Н·с/м	Коэффициент жесткости, Н/м	Коэффициент диссипации, Н·с/м
A	$2,77 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^2$	$1,98 \cdot 10^6$	$1,89 \cdot 10^2$
B	$3,34 \cdot 10^6$	$2,20 \cdot 10^2$	$2,40 \cdot 10^6$	$2,06 \cdot 10^2$
C	$2,60 \cdot 10^6$	$2,16 \cdot 10^2$	$2,05 \cdot 10^6$	$1,89 \cdot 10^2$
D	$2,80 \cdot 10^6$	$2,24 \cdot 10^2$	$2,19 \cdot 10^6$	$2,06 \cdot 10^2$
Среднее значение	$2,87 \cdot 10^6$	$2,19 \cdot 10^2$	$2,16 \cdot 10^6$	$1,98 \cdot 10^2$
Среднеквадратичное отклонение (в % от среднего)	8,07	1,24	6,48	4,26

В ходе физических экспериментов также установлено, что для конкретной конфигурации твердого блока положение центра масс устройства не совпадает с положением его центра жесткости. В координатной системе  $Oxuz$ , имеющей начало в центре жесткости, координаты центра масс оказались равными  $(-1,5; -1,4; -1,6)$  мм. Для устройства с таким расположением центра масс был проведен численный эксперимент, моделирующий динамический отклик твердого блока на установившееся внешнее периодическое воздействие на устройство в диапазоне частот от 150 до 350 Гц с ускорением амплитудой  $3g$ , направленным вдоль оси  $z$ . В эксперименте задавались различные соотношения жесткостей в демпферах в соответствии со следующим алгоритмом: сначала для каждого фиксированного значения частоты принимались средние значения жесткости и диссипации во всех четырех демпферах, затем последовательно изменялись значения характеристик в одном из демпферов на величину среднеквадратичного отклонения. В таблице 2 для каждого шага численного эксперимента приведены отклонения жесткостных и диссипативных характеристик от средних значений и соответствующие этой комбинации максимальные амплитуды угловых скоростей твердого блока.

В численном эксперименте получены также значения максимальных амплитуд угловых ускорений по направлениям осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  для случая, когда центр масс устройства совпадает с его центром жесткости, а коэффициенты жесткости и диссипации всех четырех демпферов равны средним значениям. Эти данные также содержит таблица 2. Аналогично, путем численного эксперимента, исследовался отклик амплитуд угловых ускорений твердого блока на отклонение центра масс устройства от его центра жесткости и на отклонения от номинального значения коэффициентов жесткости демпферов. За номинальные значения принимались средние значения характеристик, полученные опытным путем и представленные в таблице 1. Моделировались отклонения положения центра масс в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а также изменения коэффициентов жесткости демпферов A, B, C и D в продольном и радиальном направлениях (в направлениях  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$ , см. Рис. 2).

Таблица 2. Характеристики демпферов по результатам численного моделирования

	Отклонение характеристик демпфера от среднего значения (коэф. жесткости / коэф. диссипации), %				Максимальная амплитуда угловых скоростей, град/с		
	Наименование демпфера				Направление		
	A	B	C	D	x	y	z
Центр масс смещен относительно центра жесткости	0	0	0	0	5,2	5,6	0,2
	-8,0 / -6,5	0	0	0	1,8	2,1	0,2
	0	-8,0 / -6,5	0	0	9,0	9,4	0,3
	0	0	-8,0 / -6,5	0	5,5	10,0	4,7
	0	0	0	-8,0 / -6,5	9,2	5,2	4,1
	+8,0 / +6,5	0	0	0	7,0	7,5	0,2
	0	+8,0 / +6,5	0	0	3,7	3,4	0,3
	0	0	+8,0 / +6,5	0	7,7	5,0	2,6
Центр масс совпадает с центром жесткости	0	0	0	0	5,2	5,6	0,2

Графики, представленные на рисунке 3, иллюстрируют изменение максимальных значений угловых ускорений твердого блока при смещении центра масс системы в направлении осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Демпферы при этом имеют одинаковую жесткость. Сопоставление полученных графиков показывает, что наибольшую чувствительность система проявляет к смещению центра масс в направлении, совпадающем с направлением внешнего воздействия. Изменение углового ускорения при смещении по оси  $z$  на 5 порядков больше, чем при аналогичном смещении по оси  $x$  или  $y$ .

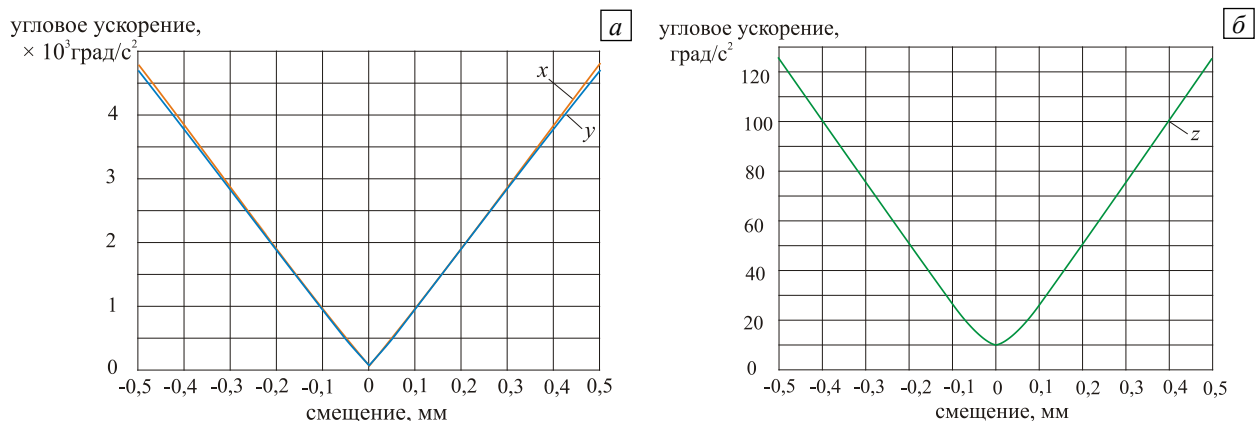


Рис. 3. Максимальные угловые ускорения в зависимости от смещения центра масс системы вдоль осей  $x$  и  $y$  (а) и вдоль оси  $z$  (б)

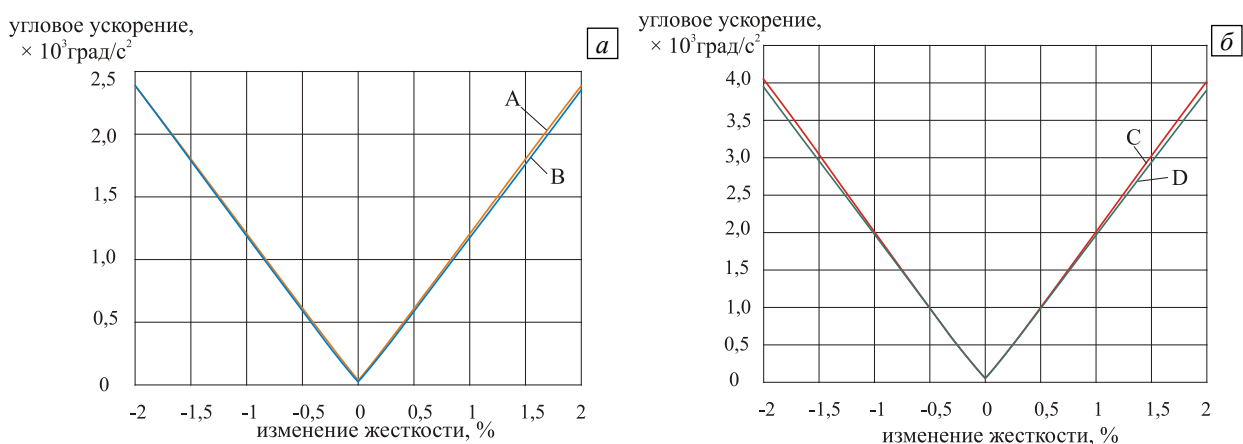


Рис. 4. Максимальные угловые ускорения в зависимости от от изменения жесткости демпферов А и В (а) и С и D (б)

Рисунок 4 демонстрирует чувствительность системы к изменению жесткости демпферов. При изменении жесткости демпферов А и В на величину  $\pm 2\%$  от среднестатистического значения угловое ускорение твердого блока изменяется на величину вдвое меньшую, чем при аналогичном изменении жесткости демпферов С и D.

Сопоставление графиков на рисунках 3 и 4 показывает, что наиболее значимым фактором, провоцирующим угловые колебания, является именно смещение центра масс системы вдоль оси  $z$ , совпадающей с направлением внешнего воздействия. Возникающие при этом значения ускорений существенно превосходят величины, наблюдаемые при воздействии всех остальных факторов.

#### 4. Выводы

В ходе физических экспериментов установлено, что для конкретной конфигурации твердого блока положение центра масс устройства не совпадает с центром жесткости. В координатной системе  $x, y, z$ , имеющей начало в центре жесткости, координаты центра масс составляют  $(-1,5; -1,4; -1,6)$  мм.

В результате статистической обработки данных физических экспериментов установлено, что величины коэффициентов жесткости и коэффициентов диссипации для четырех демпферов системы не равны; среднеквадратичные отклонения коэффициентов жесткости в осевом и радиальном направлениях составляют соответственно 8,1 и 6,5 %, от среднестатистического значения, а для коэффициентов диссипации — 1,2 и 4,3%.

Численные эксперименты, выполненные с использованием разработанной математической модели системы пассивной виброизоляции, выявили, что при проектной компоновке системы с координатами центра масс  $(-1,5; -1,4; -1,6)$  мм и средними значениями характеристик демпферов максимальная угловая скорость демпфируемого фрагмента составляет 5,6 град/с.

При последовательном изменении характеристик демпферов А, В, С, D на величину их статистического разброса ( $\pm 2\%$  от их среднестатистического значения) максимальная амплитуда угловой скорости возрастает почти в 5 раз. Угловое же ускорение изменяется в 40–80 раз.

В случае совмещения центра масс с центром жесткости (с началом координат) в численном эксперименте значение максимальной угловой скорости составило 0,025 град/с. Таким образом, при смещении центра масс относительно сбалансированного положения центров на величину  $\sim 1,5$  мм максимальная угловая скорость изменяется в  $\sim 200$  раз (при одинаковых значениях характеристик демпферов). Смещение центра масс приводит к значительному росту угловых ускорений демпфируемого блока. При этом наибольших значений достигают угловые ускорения при смещении центра масс, совпадающем по направлению с внешним вибрационным воздействием.

Из анализа представленных результатов следует, что устройство, обеспечивающее пассивную виброизоляцию электронных приборов, является в рассмотренной компоновке сбалансированной механической системой. Любые отклонения от равновесных значений ее основных параметров (положения центра масс демпфируемой части, положения и ориентации демпферов, величин коэффициентов жесткости и коэффициентов диссипации демпферов) влекут за собой существенное увеличение амплитуд угловых колебаний и могут стать причиной некорректной работы аппаратуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований Уральского отделения РАН в рамках проекта № 18-11-1-10 «Исследование колебательных процессов в виброчувствительных приборах и разработка подходов и средств их виброизоляции».

#### Литература

1. Lee J., Okwudire C.E. Reduction of vibrations of passively-isolated ultra-precision manufacturing machines using mode coupling // Precision Engineering. 2016. Vol. 43. P. 164-177. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2015.07.006>
2. Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude algorithms // J. Guid. Contr. Dynam. 1998. Vol. 21. P. 19-28. <https://doi.org/10.2514/2.4228>
3. Lin Y., Zhang W., Xiong J. Specific force integration algorithm with high accuracy for strapdown inertial navigation system // Aero. Sci. Tech. 2015. Vol. 42. P. 25-30. <https://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2015.01.001>
4. Журавлев В.Ф. О геометрии конических вращений // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 3. С. 3-14. (English version <https://doi.org/10.3103/S0025654408030023>)
5. Handbook of noise and vibration control / Ed. M.J. Crocker. John Wiley & Sons, 2007. 1584 p.
6. Bohnert K., Gabus P., Nehring J., Brandt H. Temperature and vibration insensitive fiber-optic current sensor // J. Lightwave Tech. 2002. Vol. 20. P. 267-276. <https://dx.doi.org/10.1109/50.983241>
7. Wang W., Wang X., Xia J. The nonreciprocal errors in fiber optic current sensors // Optics & Laser Technology. 2011. Vol. 43. P. 1470-1474. <https://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2011.05.002>
8. Zhang Y., Gao Z. Fiber optic gyroscope vibration error due to fiber tail length asymmetry based on elastic-optic effect // Optical Engineering. 2012. Vol. 51. 124403. <https://doi.org/10.1117/1.OE.51.12.124403>
9. Курбатов А.М., Курбатов Р.А. Вибрационная ошибка угловой скорости волоконно-оптического гироскопа и методы ее подавления // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58, № 8. С. 842-849. <https://doi.org/10.7868/S0033849413070085>



10. Ильинский В.С. Защита РЭА и прецизионного оборудования от динамических воздействий. М.: Радио и связь, 1982. 296 с.
11. Lee J., Okwudire C.E. Reduction of vibrations of passively-isolated ultra-precision manufacturing machines using mode coupling // *Precision Engineering*. 2016. Vol. 43. P. 164-177. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2015.07.006>
12. Verbaan K., van der Meulen S., Steinbuch M. Broadband damping of high-precision motion stages // *Mechatronics*. 2017. Vol. 41. P. 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2016.10.014>
13. Елисейев С. В., Хоменко А.П., Логунов А.С. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов. Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2008. 523 с.
14. Фролов К.В., Фурман Ф.А. Прикладная теория виброзащитных систем. М: Машиностроение. 1980. 276 с.
15. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 432 с.

## References

1. Lee J., Okwudire C.E. Reduction of vibrations of passively-isolated ultra-precision manufacturing machines using mode coupling. *Precision Engineering*, 2016, vol. 43, pp. 164-177. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2015.07.006>
2. Savage P.G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1: Attitude algorithms. *J. Guid. Contr. Dynam.*, 1998, vol. 21, pp. 19-28. <https://doi.org/10.2514/2.4228>
3. Lin Y., Zhang W., Xiong J. Specific force integration algorithm with high accuracy for strapdown inertial navigation system. *Aero. Sci. Tech.*, 2015, vol. 42, pp. 25-30. <https://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2015.01.001>
4. Zhuravlev V.P., Klimov D.M. Global motion of the celt. *Mech. Solid.*, 2008, vol. 43, pp. 320-327. <https://doi.org/10.3103/S0025654408030023>
5. Crocker M.J. (ed.) *Handbook of noise and vibration control*. John Wiley & Sons, 2007. 1584 p.
6. Bohnert K., Gabus P., Nehring J., Brandle H. Temperature and vibration insensitive fiber-optic current sensor. *J. Lightwave Tech.*, 2002, vol. 20, pp. 267-276. <https://dx.doi.org/10.1109/50.983241>
7. Wang W., Wang X., Xia J. The nonreciprocal errors in fiber optic current sensors. *Optics & Laser Technology*, 2011, vol. 43, pp. 1470-1474. <https://dx.doi.org/10.1016/j.optlastec.2011.05.002>
8. Zhang Y., Gao Z. Fiber optic gyroscope vibration error due to fiber tail length asymmetry based on elastic-optic effect. *Optical Engineering*, 2012, vol. 51, 124403. <https://doi.org/10.1117/1.OE.51.12.124403>
9. Kurbatov A.M., Kurbatov R.A. The vibration error of the fiber-optic gyroscope rotation rate and methods of its suppression. *J. Commun. Technol. Electron.*, 2013, vol. 58, pp. 840-846. <https://doi.org/10.1134/S1064226913070085>
10. П'инский В.С. *Zashchita REA i pretzionnogo oborudovaniya ot dinamicheskikh vozdeystviy* [Protection of REA and precision equipment from dynamic effects]. Moscow, Radio i svyaz', 1982. 296 p.
11. Lee J., Okwudire C.E. Reduction of vibrations of passively-isolated ultra-precision manufacturing machines using mode coupling. *Precision Engineering*, 2016, vol. 43, pp. 164-177. <https://doi.org/10.1016/j.precisioneng.2015.07.006>
12. Verbaan K., van der Meulen S., Steinbuch M. Broadband damping of high-precision motion stages. *Mechatronics*, 2017, vol. 41, pp. 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2016.10.014>
13. Eliseyev S.V., Khomenko A.P., Logunov A.S. *Dinamicheskii sintez v obobshchennykh zadachakh vibrozashchity i vibroizolyatsii tekhnicheskikh ob"yektov* [Dynamic synthesis of the generic problems of vibration protection and vibration insulation of echnical objects]. Irkutsk, Izd-vo Irkut. gos. un-ta, 2008. 523 p.
14. Frolov K.V., Furman F.A. *Prikladnaya teoriya vibrozashchitnykh sistem* [Applied vibration protection theory]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1980. 276 p.
15. Ganiyev R.F., Kononenko V.O. *Kolebaniya tverdykh tel* [Oscillations of solids]. Moscow, Nauka, 1976. 432 p.

Поступила в редакцию 19.12.2019; после доработки 24.12.2019; принята к опубликованию 24.12.2019

## Сведения об авторах

Шардаков Игорь Николаевич, дфмн, проф., зав. лаб., Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), Пермь, 614018, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: shardakov@icmm.ru

Глот Ирина Олеговна, кфмн, доц., снс, ИМСС УрО РАН; e-mail: glot@icmm.ru

Шестаков Алексей Петрович, кфмн, мнс, ИМСС УрО РАН; e-mail: shap@icmm.ru

Собянин Кирилл Валентинович, асп., ИМСС УрО РАН; k.sobyanin@gmail.com

Губский Дмитрий Витальевич, асп., ИМСС УрО РАН; e-mail: GubskiyDV@pnppk.ru