

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.4.34](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.34)

УДК 532.5, 519.635

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ С НЕДИАГОНАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТЬЮ

Э.В. Пермякова¹, Д.С. Голдобин²¹ *Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Российская Федерация*² *Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Методы экспоненциальных временных разностных схем дают устойчивые явные схемы для систем с быстро затухающими или осциллирующими модами («жестких» систем), снимая ограничение на величину шага по времени. Кроме того, использование этих методов позволяет радикально снижать скорость накопления погрешности при численном интегрировании консервативных систем. Особенно большой выигрыш в скорости счета получается для уравнений в частных производных с высоким порядком пространственных производных. Вместе с тем задача определения коэффициентов разностных схем этих методов становится крайне трудоемкой или аналитически неразрешимой при недиагональном виде принципиальной линейной части системы уравнений. В работе предлагается подход, при котором коэффициенты схем вычисляются путем прямого численного интегрирования некоторых вспомогательных задач на коротком временном интервале – одном шаге схемы. Подход является универсальным, его использование проиллюстрировано на четырех примерах: аналитически решаемой системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, одномерной системе с реакцией-диффузией в нестационарных условиях, двухмерной системе с реакцией-диффузией при стационарных и нестационарных условиях, одномерном уравнении Кана–Хилларда с постоянными коэффициентами. Использование метода экспоненциальных разностей по времени типа Рунге–Кутты второго порядка дает выигрыш скорости счета для уравнения диффузионного типа при оптимизации программы. Без оптимизации выигрыш растет на порядок по пространственному шагу с каждым новым порядком старшей пространственной производной и появляется, начиная с третьего порядка пространственной производной. Использование метода делает возможными исследования аналога локализации Андерсона в двух- и трехмерных активных средах, а также позволяет получить приемлемую производительность при прямом численном моделировании задач динамики плотности распределения активных броуновских частиц общего вида.

Ключевые слова: методы экспоненциальных временных разностных схем, методы Кокса–Мэттьюса, жесткие системы, недиагональные уравнения

EXPONENTIAL TIME DIFFERENCING FOR STIFF SYSTEMS WITH NONDIAGONAL LINEAR PART

E.V. Permyakova¹ and D.S. Goldobin²¹ *Perm State University, Perm, Russian Federation*² *Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

Exponential time differencing methods provide instability-free explicit schemes for systems with fast decaying or oscillating modes (stiff systems), without limitation on the time step size. Moreover, with these methods, one can drastically diminish the error accumulation rate for numerical simulation of conservative systems. The methods yield an especially large performance gain for PDEs with high order of spatial derivatives. Simultaneously, the problem of analytical calculation of coefficients of exponential time differencing schemes becomes laborious or unsolvable in the case of a nondiagonal form of the principal linear part of equations. We introduce an approach, where the scheme coefficients are obtained from the direct numerical integration of certain auxiliary problems over a short time interval – one scheme step size. The approach is universal and its implementation is illustrated with four examples: analytically solvable system of two first-order ODEs, one-dimensional reaction-diffusion system under time-dependent conditions, two-dimensional reaction-diffusion system under time-independent and time-dependent conditions, and one-dimensional Cahn–Hilliard equation with constant coefficients. The employment of an exponential time differencing method of the two-step Runge–Kutta type yields a simulation performance gain for the diffusion-type equation, with program optimization made. Without program optimization, the performance gain increases by one order with respect to the spatial step size for each order of the highest spatial derivative, and appears starting from the third order of the derivative. With the tested method, one can extend the study of an analogue of the Anderson localization to two- and three-dimensional active media and achieve an acceptable performance for the direct numerical simulations of dynamics of the probability density function for active Brownian particles.

Key words: exponential time differencing, Cox–Mathews methods, stiff systems, nondiagonal equations

1. Введение

Обширный класс задач механики сплошных сред и статистической физики характеризуется наличием быстро затухающих или осциллирующих мод [1–27]. Системы с такими модами принято называть «жесткими». С точки зрения физики такие моды, особенно затухающие, зачастую малозначительны и слабо влияют на динамику системы. Однако наличие таких мод может приводить к численной неустойчивости схем с конечным шагом по времени. В качестве простого примера можно упомянуть коротковолновую неустойчивость явной разностной схемы для уравнения теплопроводности [28].

Проблема возникновения численной неустойчивости может быть решена либо выбором достаточно малого шага по времени для явных схем, либо использованием устойчивых неявных схем. Первый вариант

в ряде задач требует чрезвычайной малости шага по времени, а второй — нуждается в индивидуальной математической подготовке для нетипичных уравнений, может быть проблематичным для двух- и трехмерных задач и не всегда возможен при случайной пространственной неоднородности параметров. Для численного интегрирования жестких систем были предложены методы экспоненциальных временных разностных (ЭВР) схем Кокса–Мэттьюса [29–31]. Эти методы, будучи явными, устойчивы при любой величине шага по времени.

Методы экспоненциальных временных разностных схем хорошо зарекомендовали себя в ряде задач, численный счет в которых иными методами требовал нереалистичного объема вычислительных ресурсов [7, 8] или не позволял поддерживать точность, необходимую для физической достоверности результатов [24]. Вместе с тем определение коэффициентов ЭВР схем требует вычисления нелинейных функций (например, экспоненты) от операторов, описывающих линейную часть системы уравнений динамики. В следующем разделе пример ЭВР метода и этот вопрос разбираются подробно. Здесь же предварительно отметим, что проблема является тривиальной в случае диагонального вида линейных уравнений. В различных работах для достижения диагонального вида используются спектральные методы [7, 8], либо надлежащий выбор переменных [24]. Однако приведение к диагональному виду проблематично для систем со случайной неоднородностью параметров [20–23], при применении кумулянтного подхода [26, 27, 32, 33] к задачам адиабатического исключения быстрой переменной для обычных и активных броуновских частиц [34–37] и в некоторых иных ситуациях.

Задача аналитического вычисления нелинейных функций от недиагонального линейного оператора может быть чрезвычайно трудоемкой, плохо определенной [29] или неразрешимой. В настоящей работе предлагается численное нахождение всех коэффициентов ЭВР схем путем численного интегрирования вспомогательных задач на одном шаге ЭВР схемы по времени. Поскольку интегрирование вспомогательных задач осуществляется только один раз — на подготовительном этапе работы программы — и на очень коротком интервале времени, для этого можно использовать простейшие явные разностные схемы с очень малым шагом по времени.

В настоящей работе описывается этот подход в случае типичной ЭВР схемы типа Рунге–Кутты второго порядка точности и тестируется его использование на четырех примерах. Рассматриваются: система с двумя степенями свободы, где точность метода может быть проверена сопоставлением с аналитическим решением; одномерная система с реакцией-диффузией при нестационарных условиях; двухмерная система с реакцией-диффузией при стационарных и нестационарных условиях; одномерное уравнение Кана–Хилларда с постоянными коэффициентами.

2. Метод экспоненциальных временных разностных схем

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнениями вида

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, t), \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(t)$ — N -компонентный вектор, \mathbf{L} — матрица размерности $N \times N$, $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ — нелинейная часть уравнений. Причем $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ может зависеть от времени и, более того, иметь линейную часть. В этом смысле разделение линейной части уравнений между $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$ и $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ не определено однозначно и осуществляется так, чтобы все потенциальные источники численных неустойчивостей были собраны в слагаемом $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$ с постоянными коэффициентами. Слагаемое $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}$ можно назвать «принципиальной» линейной частью уравнений.

Для численного интегрирования уравнений типа (1) могут быть использованы методы экспоненциальных временных разностных схем типа Рунге–Кутты [29]. Будем рассматривать следующий двухшаговый метод:

$$\mathbf{b}(t+h) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(t+h) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t) + \mathbf{M}_2 \cdot \frac{\mathbf{f}(\mathbf{b}(t+h), t+h) - \mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)}{h}. \quad (3)$$

Здесь: h — шаг по времени; $\mathbf{b}(t+h)$ — предварительная грубая оценка решения на новом шаге по времени, используемая для разностного вычисления полной производной от $\mathbf{f}(\mathbf{u}(t), t)$, а второе уравнение дает $\mathbf{u}(t+h)$ с точностью h^3 ; $\mathbf{Q} \equiv \exp(\mathbf{L}h)$, $\mathbf{M}_1 \equiv \mathbf{L}^{-1} \cdot [\exp(\mathbf{L}h) - \mathbf{I}]$ и $\mathbf{M}_2 \equiv \mathbf{L}^{-2} \cdot [\exp(\mathbf{L}h) - \mathbf{I} - \mathbf{L}h]$ — матрицы, где экспонента от матрицы \mathbf{A} стандартно определяется рядом:

$$\exp(\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{3!} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{4!} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \dots$$

(\mathbf{I} — единичная матрица). Важной особенностью методов ЭВР является то, что они строят точное решение для линейной части уравнений ($\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$), а приближения вводятся только для вычисления вкладов, связанных с $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$. В частности, выражение (2) дает точное решение при $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t) = \text{const}$, а выражение (3) — при линейной зависимости $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ от времени. Погрешность схемы (2), (3) на одном шаге по времени равна $-h^3(d^2\mathbf{f}/dt^2)/12$ [29].

Преимуществом ЭВР методов является то, что, будучи явными, они полностью свободны от численных неустойчивостей разностных схем при конечном шаге по времени. Для ряда задач, где традиционные явные разностные схемы требуют очень маленького шага по времени, а реализация неявных схем чрезвычайно трудоемка или проблематична, методы ЭВР предоставляют возможность осуществлять счет с высокой точностью при приемлемой величине шага по времени. Например, в [1–6, 20–23] для тривиальной явной разностной схемы необходим шаг по времени $h < (\Delta z)^4/8$, что уже при шаге по координате $\Delta z = 0,01$ оказывается чрезвычайно малой величиной. В ряде задач механики сплошных сред [7, 8] итоговые уравнения содержат шестую производную по пространственным координатам, и для устойчивости тривиальных явных схем требуется еще меньший шаг по времени $h \sim (\Delta z)^6$.

Однако при недиагональном виде матрицы \mathbf{L} аналитическое вычисление матриц \mathbf{Q} , \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 может быть чрезвычайно трудоемким или невозможным. Более того, для случаев, когда матрица \mathbf{L} имеет нулевые собственные значения, требуется корректировка определений матриц \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 [29]. Следует иметь в виду, что расходимость обратной матрицы \mathbf{L}^{-1} , связанная с нулевыми собственными значениями матрицы \mathbf{L} , не означает расходимости \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 , поскольку

$$\mathbf{L}^{-1}[\exp(\mathbf{L}h) - \mathbf{I}] = \mathbf{L}^{-1} \left(\mathbf{L} + \frac{1}{2}\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \frac{1}{3!}\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \dots \right) = \mathbf{I} + \frac{1}{2}\mathbf{L} + \frac{1}{3!}\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + \dots,$$

и именно последний ряд является определением \mathbf{M}_1 , а матрица \mathbf{L}^{-1} вводится лишь для краткости формульного определения. Для \mathbf{M}_2 ситуация аналогична. Для матрицы \mathbf{L} произвольного вида может быть более целесообразным численное нахождение матриц \mathbf{Q} , \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 на подготовительном этапе счета. Вопрос практического применения такого подхода прорабатывается в настоящей статье.

2.1. Вычисление матриц \mathbf{Q} , \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2

Рассмотрим вспомогательную задачу для нахождения матрицы \mathbf{Q} . Матрица \mathbf{Q} определяет эволюцию решений в следующей задаче Коши:

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \tag{4}$$

что соответствует задаче (1) при $\mathbf{f} = 0$.

В силу линейности задачи (4) зависимость ее решения от начальных условий линейна, и именно она определяется матрицей \mathbf{Q} :

$$\mathbf{u}(t_0 + h) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}(t_0).$$

Задавая начальные условия $\mathbf{u}(t_0)$ определенным образом и проводя численный счет задачи (4), можно сконструировать матрицу \mathbf{Q} :

– при $\mathbf{u}(t_0) = (1, 0, \dots, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0 + h) \\ u_2(t_0 + h) \\ \dots \\ u_N(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & Q_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ u_2(t_0) \\ \dots \\ u_N(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1N} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{N1} & Q_{N2} & \dots & Q_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \\ \dots \\ Q_{N1} \end{pmatrix};$$

– при $\mathbf{u}(t_0) = (0, 1, \dots, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0 + h) \\ u_2(t_0 + h) \\ \dots \\ u_N(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \\ \dots \\ Q_{N2} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом могут быть найдены все прочие столбцы матрицы \mathbf{Q} .

Приведенное выше определение удобно для алгоритмизации процедуры численного нахождения \mathbf{Q} , а ее математическое определение может быть сформулировано следующим образом:

$$Q_{ij} = u_i(t_0 + h | u_k(t_0) = \delta_{kj}, \mathbf{f}(t) = 0), \quad (5)$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Рассмотрим вспомогательную задачу для нахождения матрицы \mathbf{M}_1 . Решение задачи Коши

$$\mathbf{a} = \text{const} = \mathbf{f}(t_0), \quad \mathbf{u}(t_0) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{a} \quad (6)$$

задается матрицей \mathbf{M}_1 :

$$\mathbf{u}(t_0 + h) = \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{a}.$$

Меня значения вектора \mathbf{a} , как и при нахождении \mathbf{Q} , можно найти все столбцы матрицы \mathbf{M}_1 :

– при $\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0 + h) \\ u_2(t_0 + h) \\ \dots \\ u_N(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_1)_{11} \\ (M_1)_{21} \\ \dots \\ (M_1)_{N1} \end{pmatrix},$$

и так далее.

Соответствующее математическое определение матрицы \mathbf{M}_1 принимает вид:

$$(M_1)_{ij} = u_i(t_0 + h | \mathbf{u}(t_0) = 0, f_k(t) = \delta_{kj}). \quad (7)$$

Рассмотрим вспомогательную задачу для нахождения матрицы \mathbf{M}_2 . Решение задачи Коши

$$\mathbf{g} = \text{const}, \quad \mathbf{u}(t_0) = 0, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + (t - t_0) \mathbf{g} \quad (8)$$

задается матрицей \mathbf{M}_2 :

$$\mathbf{u}(t_0 + h) = \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{g}.$$

Меня значения вектора \mathbf{g} , находим все столбцы матрицы \mathbf{M}_2 :

– при $\mathbf{g} = (1, 0, \dots, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0 + h) \\ u_2(t_0 + h) \\ \dots \\ u_N(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M_2)_{11} \\ (M_2)_{21} \\ \dots \\ (M_2)_{N1} \end{pmatrix},$$

и так далее.

Соответствующее математическое определение матрицы \mathbf{M}_2 принимает вид:

$$(M_2)_{ij} = u_i(t_0 + h | \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{0}, f_k(t) = (t - t_0) \delta_{kj}). \quad (9)$$

Для нахождения матриц необходимо численно интегрировать вспомогательные задачи (4), (6), (8) по времени от $t = 0$ до h , что может быть осуществлено с помощью явных схем с малым шагом по времени.

3. Тестовые примеры

3.1. Аналитически решаемая система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon \cos \omega t, \quad (10)$$

которое можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon \cos \omega t, \end{cases}$$

что соответствует виду (1) с векторами $\mathbf{u}(t) = (x, y)^T$, $\mathbf{f}(t) = (0, \varepsilon \cos \omega t)^T$ и матрицей

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (10) разрешимо аналитически, и это может быть использовано для проверки точности численного метода:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(p_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cos t + p_2 \sin t + \frac{\varepsilon}{1 - \omega^2} \cos \omega t, \\ y(t) &= - \left(p_1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sin t + p_2 \cos t - \frac{\varepsilon \omega}{1 - \omega^2} \sin \omega t, \end{aligned}$$

где p_1 и p_2 — константы интегрирования.

Результаты решений следующие: аналитического (при $p_1 = p_2 = 0$, $\varepsilon = 1$, $\omega = \sqrt{3}$) — $x(t = 5) = 0,502687081062783$, $y(t = 5) = 1,078919280967882$; численного с шагом интегрирования вспомогательных задач (4)–(8) $h_1 = 10^{-6}$ и шагом ЭВР схемы (2), (3) $h = 10^{-3}$ — $x(t = 5) = 0,502685397135680$, $y(t = 5) = 1,078920016879909$. Сопоставив их, можно определить погрешность численного решения: $dx \approx 2 \times 10^{-6}$, $dy \approx 10^{-6}$.

3.2. Одномерная система с реакцией-диффузией при периодической модуляции условий

Рассмотрим динамику следующей одномерной системы:

$$\frac{\partial}{\partial t} C(z, t) = \lambda(t) C(z, t) - \alpha C^2(z, t) + D \frac{\partial^2 C(z, t)}{\partial z^2}. \quad (11)$$

Уравнение (11) является моделью Колмогорова–Петровского–Пискунова–Фишера для активной среды с диффузией [38]. Такого типа уравнения описывают, например, динамику автокаталитических реакций со скоростью экспоненциального роста λ при насыщении $C_{\text{sat}} = \lambda/\alpha$ [11]. В слагаемом $-\alpha C^2$, ответственном за насыщение, степень равна 2 для химических реакций, однако может отличаться для биологических систем: популяций млекопитающих, птиц, рыб и насекомых [39, 40]. В (11) D — коэффициент диффузии. При обезразмеривании надлежащий выбор единиц измерения концентрации позволяет обратить коэффициент α в 1. В настоящем разделе рассматривается пример периодической модуляции параметра λ следующего вида: $\lambda(t) = 1 + \Lambda \sin(t)$.

Для системы полагаются тривиальные граничные условия, а длина области выбирается единицей измерения пространственной координаты:

$$C(0, t) = C(1, t) = 0. \quad (12)$$

В случае химических реакций граничные условия вида (12) соответствуют адсорбции вещества или нейтрализации ионов на стенках химического реактора.

Проводя дискретизацию по пространственной координате z , $z_i = i\Delta z = i/(N+1)$, перейдем к уравнению для вектора $\mathbf{u}(t)$: $u_i(t) = C(z_i, t)$. Уравнение (11) дает

$$\dot{u}_i(t) = \frac{D}{(\Delta z)^2} (u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)) + \lambda(t)u_i(t) - u_i^2(t) \quad (13)$$

с граничными условиями (12) в виде $u_0 = u_{N+1} = 0$. Система уравнений (13) имеет форму (1) для нетривиальных переменных u_1, u_2, \dots, u_N с нелинейной функцией $f_i(\mathbf{u}, t) = \lambda(t)u_i - (u_i)^2$ и «проблемной» линейной частью $(\mathbf{L} \cdot \mathbf{u})_i = \left[\frac{D}{(\Delta z)^2} \right] (u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t))$ — соответствующая матрица

$$\mathbf{L} = \frac{D}{(\Delta z)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

является трехдиагональной. Простейшим с точки зрения подготовки и программирования вариантом работы с системой уравнений (13) является счет с помощью явной разностной схемы по времени

$$u_i(t+h_1) = u_i(t) + h_1 \left[\frac{D}{(\Delta z)^2} (u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)) + \lambda(t)u_i(t) - u_i^2(t) \right]. \quad (14)$$

Однако эта схема устойчива лишь при достаточно малом шаге по времени $h_1 < 0,25(\Delta z)^2 D^{-1}$ [28].

Использование метода экспоненциальных разностей, устойчивого при любой величине шага по времени, позволяет существенно ускорить численный счет. Схема (14) при этом может быть использована для

численного интегрирования задач (4), (6), (8), дающих матрицы $\mathbf{Q}(h)$, $\mathbf{M}_1(h)$ и $\mathbf{M}_2(h)$, с малым шагом $h_1 \ll h$, достаточным для ее устойчивости. Аналитическое вычисление матриц $\mathbf{Q}(h)$, $\mathbf{M}_1(h)$ и $\mathbf{M}_2(h)$ для матрицы \mathbf{L} в данном случае проблематично.

Для иллюстрации на рисунке 1 представлены результаты расчета с помощью ЭВР метода (2), (3) с шагом $h = 10^{-3}$; для численного решения вспомогательных задач использовалась разностная схема (14) с $h_1 = 10^{-5}$; $N = 199$ и $\Delta z = 0,005$. Точность ЭВР

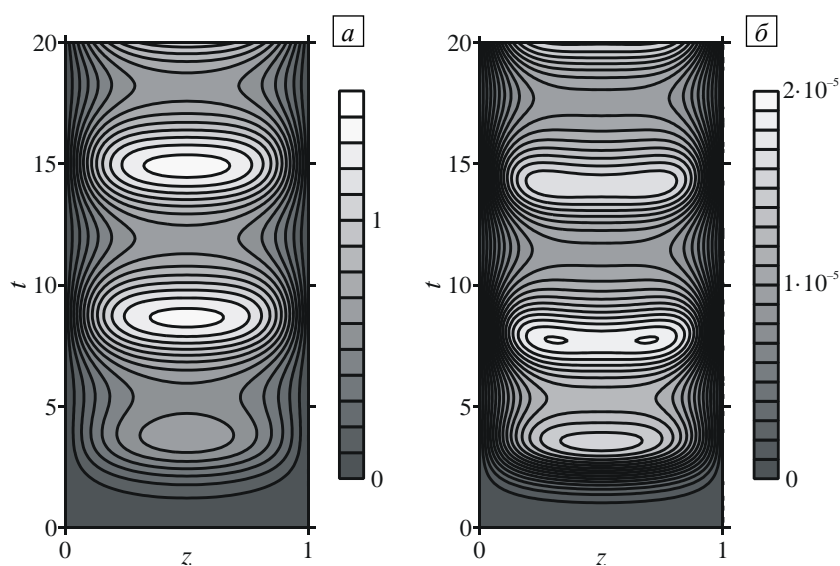


Рис. 1. Эволюция поля концентрации $C(z, t)$ (a); разность между численным решением с помощью экспоненциальной разностной схемы второго порядка (2), (3) и решением с помощью традиционного метода Эйлера (б); параметры: $\lambda(t) = 1 + 0,5 \sin(t)$, $\alpha = 1$, $D = 0,01$

метода может быть оценена по рисунку 1б, где представлено отклонение ЭВР решения от решения, полученного с применением традиционного метода Эйлера (14) с шагом по времени $h_1 = 10^{-5}$ на всем временном интервале.

3.3 Случай двух пространственных координат: система с реакцией-диффузией

Рассмотрим динамику системы с реакцией-диффузией типа (11) на плоскости (x, z) :

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, z, t) = \lambda C(x, z, t) - C^2(x, z, t) + D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) C(x, z, t) \quad (15)$$

при стационарных условиях, $\lambda(t) = \text{const}$. На границах прямоугольной области $L_x \times L_z$ полагаем тривиальные условия: $C(0, z, t) = C(L_x, z, t) = C(x, 0, t) = C(x, L_z, t) = 0$.

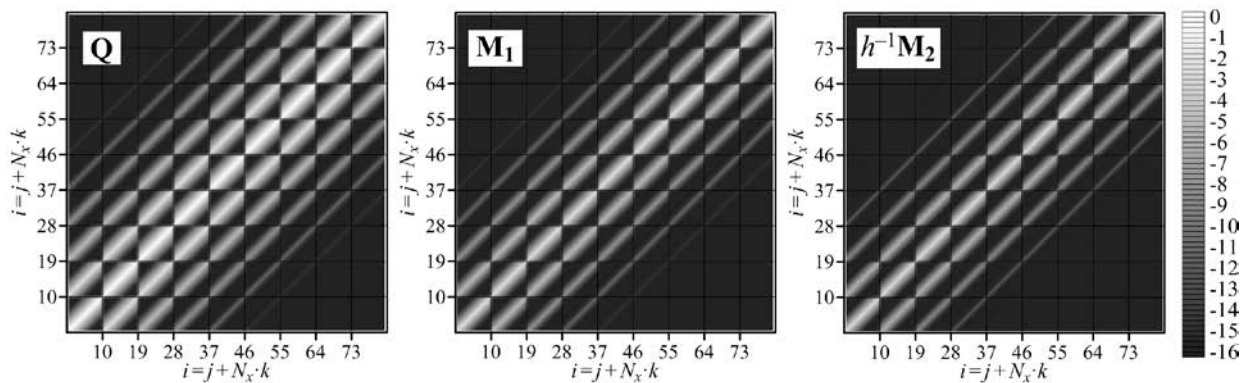


Рис. 2. Пример структуры матриц Q , M_1 и M_2 для задачи (15) с двумерной геометрией: на графиках представлены $\log_{10} |Q_{nm}|$, $\log_{10} |(M_1)_{nm}|$ и $\log_{10} |h^{-1}(M_2)_{nm}|$ как функции индексов; параметры $L_x = L_z = 1$, $N_x = N_z = 9$, $D = 0,01$, $h = 0,004$

Если провести дискретизацию по пространственным координатам, $x_j = j\Delta x = jL_x / (N_x + 1)$

и $z_k = k\Delta z = kL_z / (N_z + 1)$, можно перейти от уравнения

(15) к уравнению типа (1) для вектора $\mathbf{u}(t)$:

$u_{j+N_x k}(t) = C(x_j, z_k, t)$. Для нетривиальных компонент

$u_{j+N_x k}(t)$ индексы пробегает значения $j = 1, 2, \dots, N_x$

и $k = 1, 2, \dots, N_z$. Нелинейная часть уравнения $\mathbf{f}(\mathbf{u}, t)$ будет

иметь тот же вид, что и в предыдущем примере, но матрица \mathbf{L} перестанет быть трехдиагональной.

На рисунке 2 представлен пример структуры матриц Q ,

M_1 и M_2 , вычисленных для небольшого числа узлов.

На рисунке 3 приведены результаты счета двумерной

задачи (15) с помощью ЭВР схемы (2), (3) с шагом

$h = 10^{-3}$; интегрирование вспомогательных задач

осуществлялось с шагом $h_1 = 10^{-4}$; $N_x = 19$ ($\Delta x = 0,05$),

$N_z = 24$ ($\Delta z = 0,04$).

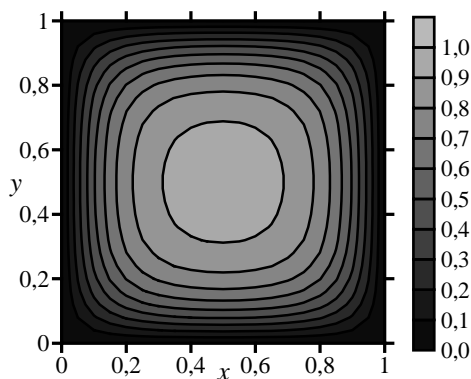


Рис. 3. Установившееся поле концентрации $C(x, z)$ в задаче (15), вычисленное с помощью метода ЭВР при $\lambda = 1$, $D = 0,01$

3.4 Уравнения Кана-Хилларда

Спинодальный распад в двухкомпонентных смесях [42] и образование структур в активных средах [1–6] описываются уравнениями, содержащими пространственную производную четвертого порядка. При одномерной постановке задачи во всех этих случаях уравнения динамики сводятся к уравнению Кана-Хилларда (Cahn-Hilliard):

$$\frac{\partial}{\partial t} C(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(-q(z) C(z, t) + C^3(z, t) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} C(z, t) \right). \quad (16)$$

Формирование пространственно неоднородных структур в данной системе требует $q(z) > 0$.

В Таблице приведены данные относительно скорости численного моделирования уравнения (16) при постоянных однородных параметрах и граничных условиях $C|_{z=0} = C|_{z=L} = (\partial C / \partial z)|_{z=0} = (\partial C / \partial z)|_{z=L} = 0$ с использованием для решения вспомогательных задач следующей разностной схемы:

$$u_i(t + h_1) = u_i(t) + h_1 \left[\frac{F_{i+1}(t) - 2F_i(t) + F_{i-1}(t)}{(\Delta z)^2} - \frac{u_{i+2}(t) - 4u_{i+1}(t) + 6u_i(t) - 4u_{i-1}(t) + u_{i-2}(t)}{(\Delta z)^4} \right], \quad (17)$$

$$F_i(t) = -q(z_i) C(z_i, t) + C^3(z_i, t).$$

В данном случае использование ЭВР схемы дает существенный выигрыш в производительности вычислений не только для задач моделирования нестационарной динамики, когда затраты времени на проведение подготовительных расчетов не так существенны, но и для задач нахождения стационарных решений. Для длительного счета нестационарных процессов предпочтителен выбор $h = \Delta z$, обеспечивающий ту же точность численного интегрирования по времени, что и разностная аппроксимация пространственных производных (17). В этом случае максимальный выигрыш в производительности ЭВР схемы по сравнению с явной схемой (17) оказывается $\sim 1/(\Delta z)^2$. На практике для больших сеток выигрыш несколько снижается из-за того, что ЭВР схемы требуют больших объемов оперативной памяти; в примере из Таблицы производительность увеличивается в 500 и 1000 раз при 199 и 299 узлах сетки соответственно. Для нахождения стационарных решений максимальная производительность метода ЭВР достигается при равных затратах времени на подготовительные вычисления и последующий счет задачи до установления. В рассматриваемом примере это достигается при $h \approx 2(\Delta z)^2$, а выигрыш в производительности в идеале $\sim 1/\Delta z$; на практике время вычислений сокращается в 26 и 34 раза при 199 и 299 узлах сетки соответственно.

Таблица. К сравнению скорости численного счета методом Эйлера и методом экспоненциальных временных разностных схем второго порядка (2), (3) с учетом времени решения вспомогательных задач (процессор: Intel(R) Core(TM) i7-4790K CPU 4,00 ГГц, Hypertrading-disabled; оперативная память: DDR3 16 ГБ; программа на языке FORTRAN)

Задача	Параметры разностных схем	Среднее по 100 испытаниям время работы ядра процессора в секундах			
		Метод Эйлера	Метод ЭВР	ЭВР с оптимизацией	Вспомогательные задачи для ЭВР
1D система (11) при параметрах, как на рисунке 1; моделируется $t = 0 \div 20$	$h = 10^{-3}$, $h_1 = 10^{-5}$, $N = 199$ ($\Delta z = 0,005$)	0,450	1,019	0,118	0,010
2D система (15) с $\lambda(t)$ и прочими параметрами, как на рисунке 1; $x \in [0,1]$, $z \in [0,1]$, $t = 0 \div 20$	$h = 4 \times 10^{-3}$, $h_1 = 10^{-5}$, $N = 24 \times 24$ ($\Delta x = \Delta z = 0,04$)	1,68	---	0,181	0,43
	$h = 4 \times 10^{-3}$, $h_1 = 10^{-5}$, $N = 49 \times 49$ ($\Delta x = \Delta z = 0,02$)	6,87	---	2,79	7,55
1D уравнение Кана-Хилларда (16) при $q = 1$, $z \in [0,10]$, $t = 0 \div 100$	$h = \Delta z$, $h_1 = 0,1(\Delta z)^4$, $N = 199$ ($\Delta z = 0,05$)	59,8	0,111	---	12,2
	$h = 2(\Delta z)^2$, $h_1 = 0,1(\Delta z)^4$, $N = 199$ ($\Delta z = 0,05$)		1,07	---	1,23
	$h = \Delta z$, $h_1 = 0,1(\Delta z)^4$, $N = 299$ ($\Delta z = 0,0333\dots$)	456	0,488	---	91,1
	$h = 2(\Delta z)^2$, $h_1 = 0,1(\Delta z)^4$, $N = 299$ ($\Delta z = 0,0333\dots$)		7,27	---	6,10

4. Заключение

В работе продемонстрировано использование метода экспоненциальных временных разностных (ЭВР) схем для жестких систем с существенно недиагональной линейной частью уравнений. Для таких систем аналитическое вычисление коэффициентов разностной схемы может быть проблематичным или невозможным. В рамках подхода предлагается их численное нахождение на подготовительном этапе работы программы путем прямого численного интегрирования вспомогательных задач на очень коротком интервале времени — шаге ЭВР схемы. Подход применим для задач любой пространственной размерности.

Применение методов ЭВР актуально для численного моделирования как транспортных процессов в сплошных средах при высоком порядке пространственных производных в уравнениях [1–10, 14–23], так и динамики многих статфизических систем [20–27]. В случае одномерного уравнения диффузии со второй пространственной производной для устойчивости обычной явной разностной схемы требуется шаг по времени $h_1 < 0,25(\Delta z)^2$, что дает на единичном интервале времени $M \sim (3/\Delta z) \times (1/h_1) \sim 12/(\Delta z)^3$ операций и погрешность $\sim (\Delta z)^2$. Метод ЭВР типа Рунге–Кутты второго порядка (2), (3) с $h = \Delta z$ без оптимизации дает тот же порядок точности при $M \sim (1/\Delta z) \times (1/\Delta z) \times (1/h) \sim 1/(\Delta z)^3$ операциях и с оптимизацией — при $M \sim 7 \times (1/\Delta z) \times (1/h) \sim 7/(\Delta z)^2$. То есть, в идеале, вычислительная трудоемкость задачи понижается на один порядок по величине $1/\Delta z$. Данный пример является иллюстративным: как можно видеть в Таблице, итоговый выигрыш производительности для него не всегда существует. В общем случае, без оптимизации, для уравнений типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{n-1} \frac{\partial^{2n} u}{\partial z^{2n}} + \dots,$$

где многоточие означает слагаемые с младшими производными по пространственной координате, метод ЭВР (2), (3) дает выигрыш производительности в $\sim (1/\Delta z)^{2n-2}$ раз по сравнению с обычным явным методом конечных разностей. Это согласуется с приведенными в Таблице данными для одномерного уравнения Кана–Хилларда (16).

Представленный подход делает возможным изучение аналога явления локализации Андерсона [41, 42] в активных средах [20–23] в двухмерном случае, где следует ожидать новые топологические эффекты. Без использования этого метода численный счет, достаточный для физически достоверных выводов, был чрезвычайно трудоемок даже в одномерном случае. Кроме того, версия метода ЭВР для двухмерных систем позволит использовать кумулянтные [26, 27, 32, 33] или моментные разложения для эффективного численного моделирования динамики активных броуновских частиц [34–37].

Рассматривая вопрос широкого применения методов экспоненциальных временных разностных схем, следует иметь в виду, что такие методы в конкретных задачах могут «страдать» от снижения порядка сходимости [30]. Предметом настоящей работы является анализ концептуальной возможности и целесообразности представленного подхода к численному моделированию задач с существенно недиагональной линейной частью. Внимание к вопросам точности ограничивалось контролем того, чтобы погрешность временных разностных схем не превышала погрешность, вносимую дискретизацией пространственных координат.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 19-42-04120).

Литература

1. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys. 1976. Vol. 55, no. 2. P. 356-369. <https://doi.org/10.1143/PTP.55.356>
2. Knobloch E. Pattern selection in long-wavelength convection // Phys. Nonlinear Phenom. 1990. Vol. 41, no. 3. P. 450-479. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90008-D](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90008-D)
3. Shilman L., Sivashinsky G. Hexagonal structure of large-scale Marangoni convection // Phys. Nonlinear Phenom. 1991. Vol. 52, no. 2-3. P. 477-488. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90140-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90140-5)
4. Schöpf W., Zimmermann W. Multicritical behaviour in binary fluid convection // Europhys. Lett. 1989. Vol. 8, no. 1. P. 41-46. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/8/1/008>
5. Schöpf W., Zimmermann W. Convection in binary fluids: Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47, no. 3. P. 1739-1764. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.47.1739>
6. Goldobin D.S., Shklyaeva E.V. Large-scale thermal convection in a horizontal porous layer // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 78, no. 2. 027301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.027301>

7. *Matthews P.C., Cox S.M.* One-dimensional pattern formation with Galilean invariance near a stationary bifurcation // *Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 62, no. 2. R1473. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.R1473>
8. *Matthews P.C., Cox S.M.* Pattern formation with a conservation law // *Nonlinearity.* 2000. Vol. 13, no. 4. P. 1293-1320. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/13/4/317>
9. *Shklyaev S., Khenner M., Alabuzhev A.A.* Oscillatory and monotonic modes of long-wave Marangoni convection in a thin film // *Phys. Rev. E.* 2010. Vol. 82, no. 2. 025302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.025302>
10. *Samoilova A.E., Shklyaev S.* Oscillatory Marangoni convection in a liquid-gas system heated from below // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2015. Vol. 224, no. 2. P. 241-248. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02356-4>
11. *Straube A.V., Pikovskiy A.* Mixing-induced global modes in open active flow // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Vol. 99, no. 18. 184503. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.184503>
12. *Брацун Д.А., Мошова Е.А.* Особенности формирования волн плотности в двухслойной системе смешивающихся реагирующих жидкостей // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2018. Т. 11, № 3. С. 302-322. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.23>
13. *Цибберкин К.Б.* Двумерные течения в каналах ограниченной ширины, частично заполненных пористой средой // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2018. Т. 11, № 4. С. 438-447. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.34>
14. *Goldobin D.S., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V.* Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of two-layer fluid system subject to horizontal vibrations // *Europhys. Lett.* 2014. Vol. 108. 54001. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/108/54001>
15. *Goldobin D.S., Pimenova A.V., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P.* Running interfacial waves in two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // *Phys. Rev. E.* 2015. Vol. 91, no. 5. 053010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.053010>
16. *Пелиновский Е.Н., Шургалина Е.Г.* Формирование волн-убийц в солитонном газе, описываемом модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза // *ДАН.* 2016. Т. 470, № 1. С. 26-29. <https://doi.org/10.7868/S0869565216250101>
17. *Пелиновский Е.Н., Диденкулова И.И., Шургалина Е.Г.* Динамика волн в каналах переменного сечения // *Морской гидрофизический журнал.* 2017. № 3. С. 22-31. <https://doi.org/10.22449/0233-7584-2017-3-22-31>
18. *Шургалина Е.Г., Пелиновский Е.Н., Горшков К.А.* Эффект отрицательной скорости частиц в солитонном газе в рамках уравнений типа Кортевега-де Вриза // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия.* 2017. № 5. С. 10-16. (English version <https://doi.org/10.3103/S0027134917050101>)
19. *Слюняев А.В.* Анализ нелинейного спектра интенсивного морского волнения с целью прогноза экстремальных волн // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2018. Т. 61, № 1. С. 1-23. (English version <https://doi.org/10.1007/s11141-018-9865-8>)
20. *Goldobin D.S., Shklyaeva E.V.* Localization and advective spreading of convective flows under parametric disorder // *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* 2013. P09027. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2013/09/P09027>
21. *Goldobin D.S.* Two scenarios of advective washing-out of localized convective patterns under frozen parametric disorder // *Phys. Scr.* 2019. Vol. 94. 014011. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aaeefa>
22. *Goldobin D.S., Shklyaeva E.V.* Diffusion of a passive scalar by convective flows under parametric disorder // *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* 2009. P01024. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/01/P01024>
23. *Goldobin D.S.* Advective enhancement of eddy diffusivity under parametric disorder // *Phys. Scr.* 2010. Vol. T142. 014050. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2010/T142/014050>
24. *Pikovskiy A., Shepelyansky D.* Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Vol. 100, no. 9. 094101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.094101>
25. *Теймуразов А.С., Степанов П.А., Верма М.К., Барман С., Кумар А., Шубхадееп С.* Прямое численное моделирование однородной изотропной спиральной турбулентности в пакете TARANG // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2017. Т. 10, № 4. С. 474-483. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.4.39>
26. *Tyulkina I.V., Goldobin D.S., Klimenko L.S., Pikovskiy A.S.* Dynamics of noisy oscillator populations beyond the Ott-Antonsen ansatz // *Phys. Rev. Lett.* 2018. Vol. 120, no. 26. 264101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.264101>
27. *Тюлькина И.В., Голдобин Д.С., Клименко Л.С., Пиковский А.С.* Двухгрупповые решения для динамики ансамблей фазовых систем типа Отта-Антонсена // *Изв. вузов. Радиофизика.* 2018. Т. 61, № 8-9. С. 718-728. (English version <https://doi.org/10.1007/s11141-019-09924-7>)
28. *Кузнецов Г.В., Шеремет М.А.* Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 172 с.
29. *Cox S.M., Matthews P.C.* Exponential time differencing for stiff systems // *J. Comput. Phys.* 2002. Vol. 176, no. 2. P. 430-455. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.6995>
30. *Hochbruck M., Ostermann A.* Explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear parabolic problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 2005. Vol. 43, no. 3. P. 1069-1090. <https://doi.org/10.1137/040611434>
31. *Оволаби К.М.* Математическое исследование систем с двумя переменными с использованием адаптивных численных методов // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2016. Т. 19, № 3. С. 281-295. <https://doi.org/10.15372/SJNM20160304>
32. *Goldobin D.S.* Relationships between the distribution of Watanabe-Strogatz variables and circular cumulants for ensembles of phase elements // *Fluct. Noise Lett.* 2019. Vol. 18, no. 2. 1940002. <https://doi.org/10.1142/S0219477519400029>
33. *Goldobin D.S., Dolmatova A.V.* Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series // *Phys. Rev. Research.* 2019. Vol. 1, no. 3. 033139. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033139>
34. *Gardiner C.W.* Handbook of stochastic methods. Berlin: Springer, 1983.
35. *Wilemski G.* On the derivation of Smoluchowski equations with corrections in the classical theory of Brownian motion // *J. Stat. Phys.* 1976. Vol. 14, no. 2. P. 153-169. <https://doi.org/10.1007/BF01011764>
36. *Gardiner C.W.* Adiabatic elimination in stochastic systems. I. Formulation of methods and application to few-variable systems // *Phys. Rev. A.* 1984. Vol. 29, no. 5. P. 2814-2822. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.29.2814>

37. Milster S., Nötel J., Sokolov I.M., Schimansky-Geier L. Eliminating inertia in a stochastic model of a micro-swimmer with constant speed // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2017. Vol. 226, no. 9. P. 2039-2055. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2017-70052-8>
38. Murray J.D. *Mathematical biology*. Berlin: Springer, 1993. Chapter 11. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08542-4>
39. Sibly R.M., Barker D., Denham M.C., Hone J., Pagel M. On the regulation of populations of mammals, birds, fish, and insects // *Science*. 2005. Vol. 309, no. 5734. P. 607-610. <https://doi.org/10.1126/science.1110760>
40. Doncaster C.P. Comment on "On the regulation of populations of mammals, birds, fish, and insects" III // *Science*. 2006. Vol. 311, no. 5764. P. 1100c. <https://doi.org/10.1126/science.1122383>
41. Anderson P.W. Absence of diffusion in certain random lattices // *Phys. Rev.* 1958. Vol. 109. P. 1492-1505. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492>
42. Momm H. *Электронны в неупорядоченных структурах*, пер. с англ. М.: Мир, 1969. 172 с. (English version <https://doi.org/10.1080/00018736700101265>)
43. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // *J. Chem. Phys.* 1958. Vol. 28, no. 2. P. 258-267. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>

References

1. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Prog. Theor. Phys.*, 1976, vol. 55, no. 2, pp. 356-369. <https://doi.org/10.1143/PTP.55.356>
2. Knobloch E. Pattern selection in long-wavelength convection. *Phys. Nonlinear Phenom.*, 1990, vol. 41, no. 3, pp. 450-479. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(90\)90008-D](https://doi.org/10.1016/0167-2789(90)90008-D)
3. Shtilman L., Sivashinsky G. Hexagonal structure of large-scale Marangoni convection. *Phys. Nonlinear Phenom.*, 1991, vol. 52, no. 2-3, pp. 477-488. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(91\)90140-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(91)90140-5)
4. Schöpf W., Zimmermann W. Multicritical behaviour in binary fluid convection. *Europhys. Lett.*, 1989, vol. 8, no. 1, pp. 41-46. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/8/1/008>
5. Schöpf W., Zimmermann W. Convection in binary fluids: Amplitude equations, codimension-2 bifurcation, and thermal fluctuations. *Phys. Rev. E*, 1993, vol. 47, no. 3, pp. 1739-1764. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.47.1739>
6. Goldobin D.S., Shklyaeva E.V. Large-scale thermal convection in a horizontal porous layer. *Phys. Rev. E*, 2008, vol. 78, no. 2. 027301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.027301>
7. Matthews P.C., Cox S.M. One-dimensional pattern formation with Galilean invariance near a stationary bifurcation. *Phys. Rev. E*, 2000, vol. 62, no. 2, R1473. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.62.R1473>
8. Matthews P.C., Cox S.M. Pattern formation with a conservation law. *Nonlinearity*, 2000, vol. 13, no. 4, pp. 1293-1320. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/13/4/317>
9. Shklyaev S., Khenner M., Alabuzhev A.A. Oscillatory and monotonic modes of long-wave Marangoni convection in a thin film. *Phys. Rev. E*, 2010, vol. 82, no. 2. 025302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.82.025302>
10. Samoilova A.E., Shklyaev S. Oscillatory Marangoni convection in a liquid-gas system heated from below. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2015, vol. 224, no. 2, pp. 241-248. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2015-02356-4>
11. Straube A.V., Pikovsky A. Mixing-induced global modes in open active flow. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, no. 18. 184503. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.184503>
12. Bratsun D.A., Mosheva E.A. Peculiar properties of density wave formation in a two-layer system of reacting miscible liquids. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 302-322. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.3.23>
13. Tsiberkin K.B. Two-dimensional flows in finite-width channels partially filled with porous medium. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 438-447. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.34>
14. Goldobin D.S., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V. Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of two-layer fluid system subject to horizontal vibrations. *Europhys. Lett.*, 2014, vol. 108, 54001. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/108/54001>
15. Goldobin D.S., Pimenova A.V., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. Running interfacial waves in two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, no. 5, 053010. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.053010>
16. Pelinovsky E.N., Shurgalina E.G. Formation of freak waves in a soliton gas described by the modified Korteweg-de Vries equation. *Dokl. Phys.*, 2016, vol. 61, no. 9, pp. 423-426. <https://doi.org/10.1134/S1028335816090032>
17. Pelinovsky E.N., Didenkulova I.I., Shurgalina E.G. Wave dynamics in the channels of variable cross-section. *Phys. Oceanogr.*, 2017, no. 3, pp. 19-27. <https://doi.org/10.22449/1573-160X-2017-3-19-27>
18. Shurgalina E.G., Pelinovsky E.N., Gorshkov K.A. The effect of the negative particle velocity in a soliton gas within Korteweg-de Vries-type equations. *Moscow Univ. Phys.*, 2017, vol. 72, no. 5, pp. 441-448. <https://doi.org/10.3103/S0027134917050101>
19. Slunyaev A.V. Analysis of the nonlinear spectrum of intense sea wave with the purpose of extreme wave prediction. *Radiophys. Quantum El.*, 2018, vol. 61, no. 1, pp. 1-21. <https://doi.org/10.1007/s11141-018-9865-8>
20. Goldobin D.S., Shklyaeva E.V. Localization and advective spreading of convective flows under parametric disorder. *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.*, 2013, P09027. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2013/09/P09027>
21. Goldobin D.S. Two scenarios of advective washing-out of localized convective patterns under frozen parametric disorder. *Phys. Scr.*, 2019, vol. 94, 014011. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/aaeefa>
22. Goldobin D.S., Shklyaeva E.V. Diffusion of a passive scalar by convective flows under parametric disorder. *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.*, 2009, P01024. <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/01/P01024>
23. Goldobin D.S. Advective enhancement of eddy diffusivity under parametric disorder. *Phys. Scr.*, 2010, vol. T142. 014050. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/2010/T142/014050>

24. Pikovsky A., Shepelyansky D. Destruction of Anderson localization by a weak nonlinearity. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, vol. 100, no. 9, 094101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.094101>
25. Teimurazov A.S., Stepanov R.A., Verma M.K., Barman S., Kumar A., Shubhadeep S. Direct Numerical Simulation of Homogeneous Isotropic Helical Turbulence with the TARANG Code. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2018, vol. 59, pp. 1279-1287. <https://doi.org/10.1134/S0021894418070131>
26. Tyulkina I.V., Goldobin D.S., Klimenko L.S., Pikovsky A.S. Dynamics of Noisy Oscillator Populations beyond the Ott-Antonsen Ansatz. *Phys. Rev. Lett.*, 2018, vol. 120, no. 26, 264101. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.264101>
27. Tyulkina I.V., Goldobin D.S., Klimenko L.S., Pikovsky A.S. Two-bunch solutions for the dynamics of Ott-Antonsen phase ensembles. *Radiophys. Quantum El.*, 2019, vol. 61, no. 8-9, pp. 640-649. <https://doi.org/10.1007/s11141-019-09924-7>
28. Kuznetsov G.V., Sheremet M.A. *Raznostnye metody resheniya zadach teploprovodnosti: uchebnoye posobiye* [Finite-difference methods for solving thermal conduction problems: Study book]. Tomsk, TPU, 2007. 172 p.
29. Cox S.M., Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems. *J. Comput. Phys.*, 2002, vol. 176, no. 2, pp. 430-455. <https://doi.org/10.1006/jcph.2002.6995>
30. Hochbruck M., Ostermann A. Explicit exponential Runge-Kutta methods for semilinear parabolic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005, vol. 43, no. 3, pp. 1069-1090. <https://doi.org/10.1137/040611434>
31. Owolabi K.M. Mathematical study of two-variable systems with adaptive numerical methods. *Numer. Anal. Appl.*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 218-230. <https://doi.org/10.1134/S1995423916030046>
32. Goldobin D.S. Relationships between the distribution of Watanabe-Strogatz variables and circular cumulants for Ensembles of phase elements. *Fluct. Noise Lett.*, 2019, vol. 18, no. 2, 1940002. <https://doi.org/10.1142/S0219477519400029>
33. Goldobin D.S., Dolmatova A.V. Ott-Antonsen ansatz truncation of a circular cumulant series. *Phys. Rev. Research*, 2019, vol. 1, no. 3, 033139. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033139>
34. Gardiner C.W. *Handbook of Stochastic Methods*. Berlin, Springer, 1983.
35. Wilemski G. On the derivation of Smoluchowski equations with corrections in the classical theory of Brownian motion. *J. Stat. Phys.*, 1976, vol. 14, no. 2, pp. 153-169. <https://doi.org/10.1007/BF01011764>
36. Gardiner C.W. Adiabatic elimination in stochastic systems. I. Formulation of methods and application to few-variable systems. *Phys. Rev. A*, 1984, vol. 29, no. 5, pp. 2814-2822. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.29.2814>
37. Milster S., Nötel J., Sokolov I.M., Schimansky-Geier L. Eliminating inertia in a stochastic model of a micro-swimmer with constant speed. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2017, vol. 226, no. 9, pp. 2039-2055. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2017-70052-8>
38. Murray J.D. *Mathematical Biology*. Berlin, Springer, 1993. Chapter 11. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-08542-4>
39. Sibly R.M., Barker D., Denham M.C., Hone J., Pagel M. On the regulation of populations of mammals, birds, fish, and insects. *Science*, 2005, vol. 309, no. 5734, pp. 607-610. <https://doi.org/10.1126/science.1110760>
40. Doncaster C.P. Comment on "On the regulation of populations of mammals, birds, fish, and insects" III. *Science*, 2006, vol. 311, no. 5764, p. 1100c. <https://doi.org/10.1126/science.1122383>
41. Anderson P.W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 1958, vol. 109, pp. 1492-1505. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.109.1492>
42. Mott N.F. Electrons in disordered structures. *Adv. Phys.*, 1967, vol. 16, no. 61, pp. 49-144. <https://doi.org/10.1080/00018736700101265>
43. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // *J. Chem. Phys.* 1958. Vol. 28, no. 2. P. 258-267. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>

Поступила в редакцию 04.09.2019; после доработки 23.10.2019; принята к опубликованию 10.12.2019

Сведения об авторах

Пермякова Эвелина Владимировна, студ., Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ), г. Пермь, 614990, ул. Букирева, д. 15; e-mail: evelina.v.permyakova@gmail.com

Голдобин Денис Сергеевич, кфмн, снс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), г. Пермь, 614018, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: Denis.Goldobin@gmail.com