DOI:10.7242/1999-6691/2019.12.4.31
УДК 532.5

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ТОНКИХ СЛОЕВ ЖИДКОСТИ ПРИ КАСАТЕЛЬНЫХ ВЫСОКОЧАСТОТНЫХ ВИБРАЦИЯХ

Г.Л. Хилько

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

В работе теоретически исследовано поведение системы двух равных по толщине тонких слоев несмешивающихся несжимаемых изотермических идеальных жидкостей под действием высокочастотных горизонтальных гармонических вибраций. Сосуд, содержащий жидкости, полагался замкнутым, двумерным, прямоугольным, со слабо деформируемыми боковыми границами, бесконечно протяженным в горизонтальном направлении. Из литературы известно, что для данной системы при достаточно тонких слоях основная неустойчивость – вибрационная неустойчивость Кельвина–Гельмгольца – носит длинноволновый характер. Поэтому задача решалась аналитически с использованием приближения «мелкой воды»: уравнения раскладывались в ряд по малым параметрам, один из которых был связан с малым отношением характерных вертикального и горизонтального масштабов, другой – с малыми возмущениями плоской поверхности раздела. Получены эволюционные уравнения в главном порядке разложения для поверхности раздела в подкритической области, то есть там, где интенсивность вибраций меньше критической (необходимой для возбуждения вибрационной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца). Найдены решения системы этих эволюционных уравнений, соответствующие бегущим волнам с кноидальным или солитонным профилем поверхности раздела, причем солитонный профиль является предельным случаем кноидального. Установлена максимально возможная скорость таких бегущих волн. Показано, что решения существуют только в подкритической области, при критическом уровне интенсивности вибраций имеет место обратная бифуркация. Для частного случая бегущих волн – волн в квазистационарном режиме (с неподвижной поверхностью раздела), также называемого в литературе «застывшей волной», численно проведен анализ линейной устойчивости на основе разложения решения в ряд Фурье по горизонтальной координате. Продемонстрирована неустойчивость квазистационарных режимов к малым возмущениям.

Ключевые слова: застывшая волна, вибрации, пульсационное течение, среднее течение, поверхность раздела, вибрационная неустойчивость Кельвина–Гельмгольца, приближение «мелкой воды»

STABILITY OF THE INTERFACE BETWEEN TWO THIN LIQUID LAYERS UNDER TANGENTIAL HIGH FREQUENCY VIBRATIONS

G.L. Khilko

Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

In this paper, a system of two equally thin layers of immiscible incompressible isothermal ideal liquids under high frequency horizontal harmonic vibrations is considered theoretically. The vessel containing the liquids is assumed to be closed, of rectangular form with weakly-deformable side borders and infinitely long in horizontal direction. Previous studies showed that, for significantly thin layers, the main instability in the system, oscillatory Kelvin–Helmholtz instability, should be the long-wave instability. Therefore, the problem was solved analytically using “shallow water” approximation. For all equations, a formal expansion with respect to two small parameters was used: one associated with a small ratio of the vertical to horizontal scale and another with small perturbations of the flat interface. Evolutionary equations were derived for the interface in the main order of expansion for vibration intensity less than a threshold value for oscillatory Kelvin–Helmholtz instability (subcritical area). The solutions found for these evolutionary equations correspond to traveling waves with soliton or cnoidal interfacial surface. The soliton profile is a limiting case of the cnoidal profile. The maximum speed of these waves was determined. It was demonstrated that the obtained solutions exist only in the subcritical area of parameters and from the critical level subcritical bifurcation emerges. For special case of traveling waves in a quasi-stationary mode (i.e. with static interface) also referred to as a “frozen wave”, a numerical analysis of linear stability was performed using a Fourier series expansion in a horizontal coordinate. The instability of quasi-stationary modes to small disturbances was demonstrated.

Key words: frozen wave, vibrations, oscillatory flow, mean flow, interface, oscillatory Kelvin–Helmholtz instability, “shallow water” approximation

1. Введение

Высокочастотные вибрации сосуда, содержащего несмешивающиеся жидкости, приводят, как правило, к движениям пульсационного характера и, нередко, к различным осредненным эффектам. Касательные к поверхности раздела вибрации достаточной интенсивности при сравнимых плотностях жидкостей вызывают появление на поверхности раздела практически квазистационарного периодического рельефа, иногда именуемого в литературе «застывшей волной». И хотя поверхность раздела стационарна, в слоях жидкости присутствуют достаточно интенсивные пульсационные и осредненные течения, поэтому в рамках статьи такой режим будем называть квазистационарным. Эффект перехода от плоской поверхности раздела к «застывшей волне» является пороговым, то есть проявляется при достижении интенсивностью вибраций некоторого критического значения. Впервые он представлен в работе [1], а позднее подтвержден, тоже экспериментально, в [2–5].

Теоретическое описание линейной неустойчивости для идеальной жидкости дается в [6]. Здесь получены нейтральная кривая для появления «застывшей волны» и формула для критического значения интенсивности вибраций. Решение оказалось соответствующим неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Также показано, что для тонких слоев жидкостей неустойчивость носит длинноволновый характер.

В ходе дальнейших исследований задача устойчивости сведена к уравнению Матье [7]. Показано, что в рассматриваемой системе, помимо неустойчивости Кельвина–Гельмгольца, есть еще и параметрическая неустойчивость в коротковолновой области, где она, как известно, ощутимо подавляется вязкими и капиллярными эффектами. Но в длинноволновой области имеет значение именно неустойчивость Кельвина–Гельмгольца.

В ряде работ [5, 8–11] численно изучались вопросы влияния вязких сил на появление эффекта «застывшей волны». Интерес к этому был вызван в том числе и тем, что в экспериментах из двух жидкостей одна, как правило, бралась высокой вязкости для того, чтобы генерируемые вибрациями боковых стенок сосуда капиллярно-гравитационные волны затухали, не доходя до центральной части сосуда. Среди этих работ примечательна [11], так как там показано, что для некоторых соотношений параметров вибрационная неустойчивость будет иметь длинноволновый характер для слоев, чья толщина многократно превышает значение, предсказанное в [6]. При этом потенциальная постановка эксперимента для наблюдения длинноволновой неустойчивости упрощается.

При теоретическом подходе случай тонких слоев, когда неустойчивость носит длинноволновый характер, позволяет использовать различия в горизонтальных и вертикальных масштабах. Это дает возможность более подробно исследовать систему с помощью аналитических расчетов. Так, в работах [12, 13] рассмотрен вопрос о предполагаемых подкритических режимах течений идеальных жидкостей до того, как будет достигнут уровень неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. В [12, 13] удалось обнаружить решения в виде бегущих солитонов и проанализировать их линейную устойчивость. Оказалось, что достаточно быстрые солитоны устойчивы, медленные неустойчивы. В данной статье также поставлена цель проанализировать подкритичные режимы и вопрос их устойчивости

2. Постановка задачи

Пусть две жидкости, плотности которых ρ_1 и ρ_2, заполняют бесконечный в горизонтальной протяженности сосуд. Толщины слоев жидкостей равны h. Здесь и далее индекс 1 относится к верхней жидкости, индекс 2 — к нижней. Колебания жидкостей считаются неакустическими, что позволяет пренебречь их сжимаемостью, но они высокочастотные настолько, что можно не учитывать вязкость жидкостей ν при описании пульсационной компоненты течения. Амплитуда колебаний a мала по сравнению и с горизонтальным размером сосуда L, и с характерными масштабами возмущений, вследствие чего допустимо не учитывать нелинейные члены в уравнениях Навье–Стокса. Таким образом, предполагается:

$$c \gg \omega L\ ,$$
$$\nu \ll \omega L^2,$$
$$a \ll L\ .$$

Здесь: ω — частота вибраций; c — скорость звука в среде.

Рассматривается плоская задача. Ось z направлена по вертикали навстречу вектору силы тяжести $\boldsymbol{g}$, ось x — по горизонтали. Уровень $z=0$ соответствует невозмущенной поверхности раздела сред, $x=0$ находится вдали от боковых стенок. Каждая точка сосуда совершает колебания по закону:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{e}_x a\cos\omega t\ ,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки, $\boldsymbol{r}_0$ — среднее значение $\boldsymbol{r}$, a — амплитуда вибраций, $\boldsymbol{e}_x$ — орт вектора, сонаправленного с осью x.

Поля скорости $\boldsymbol{u}$ и давления p раскладываются на компоненты: пульсационную ($\boldsymbol{V}$ и P), меняющуюся с циклической частотой ω, и осредненную ($\langle \boldsymbol{u}\rangle$ и $\langle p\rangle$):

$$\boldsymbol{u} = \langle \boldsymbol{u}\rangle + \boldsymbol{V}\ ,$$
$$p = \langle p\rangle + P\ .$$

В [14] показано, что в такой системе функция, задающая поверхность раздела в главном порядке, не имеет пульсационной компоненты, если горизонтальные размеры сосуда значительно превосходят характерный пространственный масштаб затухания гравитационных волн (условие необходимое и достаточное).

Исходя из анализа размерности уравнений, этот масштаб равен $g^3\nu^{-1}\omega^{-5}$ при $\nu \ll g^2\omega^{-3}$ и $\sqrt{\omega^{-1}\nu}$ в случае противоположной асимптотики ($\nu \gg g^2\omega^{-3}$).

Для пульсационных полей не учитываются вязкие члены в уравнениях Навье–Стокса, а также и нелинейные слагаемые:

$$\rho\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = -\nabla\Pi,$$
$$\Pi = P + \rho a\omega^2 x\cos\omega t\ , \tag{1}$$
$$\left(\nabla\mathbf{V}\right) = 0\,.$$

Здесь и далее уравнения записаны в системе отсчета, связанной с сосудом.

На верхней и нижней твердых границах ставятся условия непротекания:

$$V_z\big|_{z=0} = 0\ .$$

На поверхности раздела выполняются условия непрерывности нормальных напряжений и нормальных скоростей:

$$\left[P\right] = 0\ ,$$
$$\left[\left(\boldsymbol{Vn}\right)\right] = 0\ , \tag{2}$$
$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_s\sin\omega t\ ,$$
$$\boldsymbol{W}_s = \boldsymbol{V}_s + a\omega\boldsymbol{e}_x\ ,$$

где $\boldsymbol{W}_s\sin\omega t$ имеет смысл пульсационной скорости в лабораторной системе отсчета.

Пульсационная часть задачи перепишется в виде:

$$\nabla\times\boldsymbol{W}_s = 0\ ,$$
$$\left(\nabla\boldsymbol{W}_s\right) = 0\,, \tag{3}$$

с граничными условиями на твердых границах:

$$\left(\boldsymbol{W}_s\boldsymbol{n}\right)\Big|_s = a\,\omega\left(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{n}\right),$$

и на поверхности раздела сред:

$$\left(\left[\boldsymbol{W}_s\right]\boldsymbol{n}\right) = 0\ ,$$
$$\left[\rho\boldsymbol{W}_s\right]\times\boldsymbol{n} = 0\ . \tag{4}$$

Здесь и далее квадратными скобками обозначается разрыв соответствующего поля на границе раздела сред: $\left[A\right] = A_1 - A_2$.

Систему необходимо дополнить интегральным выражением, связанным с условиями на большом удалении по горизонтали от начала оси x. Для замкнутого сосуда это будет кинематическое условие замкнутости потока:

$$\int_{-h}^{h}\left(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{V}\right)dz = 0\ ,$$

означающее, что в сосуде нет стоков и источников, две рассматриваемые жидкости полностью занимают сосуд. Однако далее, с целью исследования более широкого класса режимов, используется общее динамическое условие вида:

$$\int_{-h}^{h}\left(\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{V}\right)dz - D\frac{\partial}{\partial t}\int_{-h}^{h}\left\{\frac{\partial p}{\partial x}\right\}dz = 0\ , \tag{5}$$

описывающее течение в сосуде, имеющем вместо жестких боковых стенок упругие мембраны, непроницаемые для жидкости. При этом полагается, что собственная инерционность мембран пренебрежимо мала, а сила их упругого сопротивления линейна по отношению к объему жидкости, смещающей мембраны из равновесного положения. Здесь и далее фигурные скобки означают осреднение по x. Положительный интегральный параметр D характеризует совокупную упругость пары мембран. Чем меньше D, тем выше жесткость мембран. Случай $D=0$ соответствует абсолютно твердым боковым стенкам. При этом обе мембраны деформируются синхронно, так как жидкость между ними несжимаема. И если, например, с одной стороны мембрана недеформируемая, а противоположная ей имеет любую упругость, то это уже не важно, все равно $D=0$.

Так как осредненное течение достаточно слабо, в уравнениях Навье–Стокса допустимо пренебречь нелинейными по осредненным скоростям членами, оставив, однако, нелинейные по пульсационным скоростям. Также можно отбросить вязкие составляющие не только для пульсационной компоненты течения, но и для осредненной. При этом граничное условие прилипания следует заменить условием непротекания и исключить условия неразрывности касательных скоростей и касательных напряжений на поверхности раздела сред. Тогда уравнения Навье–Стокса для осредненных полей запишутся как

$$\rho\frac{\partial\langle\boldsymbol{u}\rangle}{\partial t}=-\nabla\langle\Pi\rangle,$$

$$\nabla\times\langle\boldsymbol{u}\rangle=0,$$

$$\langle\Pi\rangle=\langle p\rangle+\rho gz+4V_s^2\rho/4$$

с граничными условиями на твердой стенке

$$\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle\boldsymbol{n}\right)\Big|_s=0.$$

На границе раздела сред $z=\zeta(x,\,t)$ выполняется условие непрерывности нормальной компоненты скорости, кинематическое условие и условие баланса нормальных напряжений:

$$\left[\left(\langle\boldsymbol{u}\rangle\boldsymbol{n}\right)\right]=0,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_z, \tag{6}$$

$$\left[\langle\boldsymbol{u}\rangle\right]=0, \tag{7}$$

$$\left[\langle\Pi\rangle\right]+[\rho]g\zeta+\left(\boldsymbol{W}_{s1}\boldsymbol{W}_{s2}\right)+\alpha\left(\nabla\boldsymbol{n}\right)=0, \tag{8}$$

где α — коэффициент поверхностного натяжения.

Сформулированная задача имеет простое решение с плоской осредненной поверхностью раздела, отсутствием осредненных потоков, пульсационными скоростями, направленными по горизонтали:

$$\boldsymbol{V}_1=a\,\omega\frac{R_2-R_1+2R_1R_2T}{1-2R_1R_2T}\boldsymbol{e}_x\sin\omega t,$$

$$\boldsymbol{V}_2=a\,\omega\frac{R_1-R_2+2R_1R_2T}{1-2R_1R_2T}\boldsymbol{e}_x\sin\omega t,$$

$$p=-a\,\omega^2\left(\rho_1+\rho_2\right)\frac{2R_1R_2x}{1-2R_1R_2T}\cos\omega t,$$

$$R_j=\rho_j/\left(\rho_1+\rho_2\right)\qquad(j=1,\ 2),$$

$$T=\omega^2\left(\rho_1+\rho_2\right)D.$$

Это решение для плоскопараллельного течения существует при любых значениях параметров, но не при всех из них оно является устойчивым. Далее анализируются решения, чьи отклонения от выше полученного малы.

3. Приближение «мелкой воды»

В [6] показано, что при достаточно тонких слоях жидкостей в линейном приближении имеет место длинноволновая неустойчивость. При длинноволновой неустойчивости характерные масштабы изменения переменных по горизонтали существенно больше толщины слоев. Таким образом, в задаче возникает естественный малый параметр — отношение толщины слоев жидкостей к характерному горизонтальному масштабу. В этом случае решение удобно искать в так называемом приближении «мелкой воды».

Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве единицы измерения вертикальной координаты толщину слоев h, а горизонтальной координаты x — некоторую не определенную пока величину L, большую по сравнению с h. Рассматриваться слабые возмущения, поэтому для измерения отклонения поверхности раздела от горизонтали ζ возьмем масштаб εh, а для потенциалов возмущения пульсационной (φ) и осредненной (ψ) скоростей — масштабы εL и εh соответственно. Здесь ε — формальный малый параметр, связанный с малостью возмущений. Кроме того, обезразмерим плотности, для этого отнесем каждую из них к сумме $\rho_1+\rho_2$. Итак:

$$\boldsymbol{W}_s = a\omega\nabla\varphi \,,$$
$$\langle \boldsymbol{u}\rangle = a\omega\nabla\psi \,.$$

Здесь $\langle \boldsymbol{u}\rangle$ и $\boldsymbol{W}_s$ и далее все поля обозначают отклонение от основного решения, соответствующего плоскопараллельному течению. Подстановка этих уравнений в (1), (3) дает уравнения Лапласа

$$\varphi_{jzz} + \mu\varphi_{jxx} = 0 \qquad (j=1,2)\,,$$
$$\psi_{jzz} + \mu\psi_{jxx} = 0 \qquad (j=1,2)\,,$$

решения которых должны удовлетворять условиям непротекания на твердой поверхности:

$$\varphi_{1z}\big|_{z=+1} = \varphi_{2z}\big|_{z=-1} = 0\,,$$
$$\psi_{1z}\big|_{z=+1} = \psi_{2z}\big|_{z=-1} = 0\,,$$

и условиям на поверхности раздела слоев (2), (4) и (8), которые сносятся на плоскость $z=0$:

$$\varphi_{1z} + \varepsilon\varphi_{1zz}\zeta - \varepsilon\mu\varphi_{1x}\zeta_x - \varphi_{2z} - \varepsilon\varphi_{2zz}\zeta + \varepsilon\mu\varphi_{2x}\zeta_x = 2\mu P\zeta_x \big/ \left(1-2\rho_1\rho_2 T\right), \tag{9}$$

$$\rho_1\left(\varphi_1 + \varepsilon\varphi_{1z}\zeta\right) = \rho_2\left(\varphi_2 + \varepsilon\varphi_{2z}\zeta\right)\,, \tag{10}$$

$$B\Big(\rho_1\left(\varphi_{1x} + \varepsilon\varphi_{1xz}\zeta\right) + \rho_2\left(\varphi_{2x} + \varepsilon\varphi_{2xz}\zeta\right)\Big) - \zeta + \mu\,\mathrm{Bo}^{-1}\zeta_{xx} = S\,, \tag{11}$$

$$S + \varepsilon B\left(\mu^{-1}\varphi_{1z}\varphi_{2z} + \varphi_{1x}\varphi_{2x}\right)\big/2 - \left(\rho_1\psi_{1t} - \rho_2\psi_{2t}\right)\big/P = 0\,. \tag{12}$$

В уравнения введен малый параметр $\mu = h^2/L^2$, связанный с длинноволновым характером возмущений. В задаче оставлены величины с малыми параметрами ε и μ в степени не выше первой. Эти параметры, вообще говоря, не зависят друг от друга, далее будем считать их малыми величинами одного порядка.

Задача характеризуется тремя безразмерными параметрами:

$$P = \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\,,$$
$$\mathrm{Bo} = \alpha^{-1} g h^2\left(\rho_2-\rho_1\right),$$
$$B = \frac{a^2\omega^2}{2gh}\,.$$

Здесь: Bo — число Бонда; B — вибрационный параметр. Будем искать решение задачи (1)–(4) в виде рядов, записываемых как бесконечная сумма:

$$\varphi_1 = \Phi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)(z-1)^{n+1}\,,$$
$$\varphi_2 = \Phi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x)(z+1)^{n+1}\,,$$

$$\psi_1 = \Psi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n(x)(z-1)^{n+1} ,$$
$$\psi_2 = \Psi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n(x)(z+1)^{n+1} .$$

Такое решение автоматически удовлетворяет граничным условиям на твердых стенках, а из уравнения Лапласа получаются рекуррентные соотношения, выражающие все коэффициенты рядов через Φ_1, Φ_2, Ψ_1 и Ψ_2:

$$\varphi_1 = \Phi_1 - \mu\Phi_{1xx}(z-1)^2/2 + \mu^2\Phi_{1xxxx}(z-1)^4/24 + \ldots ,$$
$$\varphi_2 = \Phi_2 - \mu\Phi_{2xx}(z+1)^2/2 + \mu^2\Phi_{2xxxx}(z+1)^4/24 + \ldots ,$$
$$\psi_1 = \Psi_1 - \mu\Psi_{1xx}(z-1)^2/2 + \mu^2\Psi_{1xxxx}(z-1)^4/24 + \ldots ,$$
$$\psi_2 = \Psi_2 - \mu\Psi_{2xx}(z+1)^2/2 + \mu^2\Psi_{2xxxx}(z+1)^4/24 + \ldots .$$

Подстановка этих разложений в (7), (9), (10) дает с точностью до первых степеней малых параметров:

$$\Psi_2 = -\Psi_1 ,$$
$$(\Phi_1 + \Phi_2)_{xx} - \mu(\Phi_1 + \Phi_2)_{xxxx}/6 - \varepsilon\left(\zeta(\Phi_1 - \Phi_2)_x\right)_x = 2P\zeta_x , \tag{13}$$
$$[\rho\Phi] = 0 .$$

Два последних уравнения позволяют исключить из задачи Φ_1, при этом удобно сделать следующее перенормирование:

$$\Phi = \frac{(1 - 2\rho_1\rho_2 T)}{2P\rho_1}\Phi_2 = \frac{(1 - 2\rho_1\rho_2 T)}{2P\rho_2}\Phi_1,$$
$$\Psi = \Psi_2 .$$

Тогда, преобразуя с учетом (13) выражения (6), (9), (11), (12), получим:

$$\Phi_{xx} - \mu\Phi_{xxxx}/6 - \varepsilon \mathrm{P}(\zeta\Phi_x)_x = \zeta_x , \tag{14}$$
$$\Psi_t/P = \beta\left(2\Phi_x - \mu\Phi_{xxx} + \varepsilon P\Phi_x^2\right)/2 - \zeta + \mu\,\mathrm{Bo}^{-1}\zeta_{xx} , \tag{15}$$
$$\zeta_t = -\mu\Psi_{xx} . \tag{16}$$

Здесь $\beta = B/B_*$, где $B_* = 4P\rho_1\rho_2\left(1 - \frac{2\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}T\right)^2$ — порог вибрационной неустойчивости Кельвина–Гельмгольца

Проинтегрировав (14), придем к выражению:

$$\Phi_x - \mu\Phi_{xxx}/6 - \varepsilon P\Phi_x = \zeta + F . \tag{17}$$

При этом F — константа интегрирования. В [12, 13] аналогичная ей константа сознательно положена равной 0, чтобы ограничиться анализом только солитонов и не рассматривать периодические по пространству решения.

Из физических соображений для замкнутого сосуда с недеформируемыми боковыми стенками условие замкнутости потока требует выполнения равенства: $F = 0$. Однако в обсуждаемом случае с динамическим условием (5) на боковых поверхностях F может принимать любые значения в зависимости от безразмерной интегральной упругости мембран T. При подстановке (17) в (5) найдем в главном порядке выражение

$$F = 2\rho_1\rho_2 T\Phi_x , \tag{18}$$

из которого видно, что F определяется физическим параметром T. Но, учитывая зависимость $\{\Phi_x\}$ от F, можно сказать: это уравнение выражает явную связь $T = T(F)$; обратная зависимость задается неявно. Не принимая во внимание в (17) члены с μ и ε, получим в главном порядке точности:

$$\Phi_x = \zeta + F .$$

Так как среднее отклонение и потенциал равны нулю в главном порядке, то F — малая величина порядка ε и μ. Подставив последнее выражение в (17), придем к уточнению следующего порядка:

$$\Phi_x = \mu\zeta_{xx}/6 + \varepsilon P\zeta^2 + \zeta + \zeta F . \tag{19}$$

После учета его в (15) и оставления в выражении малых величин не выше первой степени по ε и μ найдем:

$$\mu\left(\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3\right)\zeta_{xx} + (\beta - 1)\zeta + 3\varepsilon\beta P\zeta^2/2 + \beta F = \Psi_t/P . \tag{20}$$

Также, если решение (20) соответствует периодическому волновому профилю раздела (а далее интерес представляют именно такие решения), можно переписать (19) как осредненное

$$\{\Phi_x\} = \varepsilon P\{\zeta^2\} + F .$$

Оно совместно с (18) после установления профиля поверхности раздела ζ и исключения $\{\Phi_x\}$ из системы позволяет найти:

$$T = -\frac{F}{2\rho_1\rho_2\left(\varepsilon P\{\zeta^2\} + F\right)} . \tag{21}$$

Далее можно положить $\mu = \varepsilon = 1$, так как члены с высокими степенями этих формальных малых параметров исключаться не будут.

Таким образом, для тонких слоев жидкости удается существенно упростить задачу, исключив вертикальную координату. Динамика поверхности раздела описывается системой лишь двух уравнений: (16) и (20).

4. Решения типа «бегущая волна»

Будем искать решения вида:

$$\Psi(x,t) = \Psi(w) ,$$
$$\zeta(x,t) = \zeta(w) ,$$
$$w = x - ct ,$$

для которых (20) с учетом (16) становится следующим:

$$\mu\left(\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3\right)\zeta_{ww} + \left(\beta - 1 + \frac{c^2}{\mu P}\right)\zeta + 3\varepsilon\beta P\zeta^2/2 + \beta F = 0 .$$

Осуществим нормирование:

$$y(X) = \varepsilon\beta P\left(1 - \beta - \frac{c^2}{\mu P}\right)^{-1}\zeta(w) ,$$
$$X = \theta w , \tag{22}$$
$$\theta^2 = \mu\left(\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3\right)\left(1 - \beta - \frac{c^2}{\mu P}\right)^{-1} . \tag{23}$$

Тогда уравнение (20) примет вид:

$$y_{XX} - y + 3y^2/2 + R/2 = 0 \ .$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$y_X^2 + y^3 - y^2 + Ry + Q = 0 \ . \qquad (24)$$

Здесь Q — очередная константа интегрирования. Данное уравнение не имеет волнового решения при наличии у кубического полинома $y^3 - y^2 + Ry + Q$ только одного действительного корня. Итак, дальнейший интерес представляет лишь волновое решение.

Назовем корни полинома $y^3 - y^2 + Ry + Q$ как y_1, y_2, y_3, причем $y_1 \le y_2 \le y_3$. В искомом волновом решении y изменяется в пределах от y_2 до y_3. Введем обозначения:

$$Y = y - y_2 \ ,$$
$$\alpha = y_3 - y_2 \ ,$$
$$\gamma = y_3 - y_1 \ .$$

Очевидно, что

$$y_2 = (1 + \gamma - 2\alpha)/3 \ .$$

Заметим, что переход от любых значений параметров R и Q к α и γ взаимно-однозначен и всегда возможен при условии $0 < \alpha \le \gamma$. Уравнение (24) перепишется как

$$Y_X^2 = Y(\alpha - Y)(Y + \gamma - \alpha) \ ,$$
$$X = \int \frac{dY}{\sqrt{Y(\alpha - Y)(Y + \gamma - \alpha)}} \ .$$

Решением последнего является выражение:

$$Y = \alpha\, cn^2\left(\sqrt{\gamma}\, X/2, k\right), \qquad k = \sqrt{\alpha/\gamma} \ ,$$

где $cn(x,k)$ — эллиптический косинус. Длина волны для такого кноидального рельефа вычисляется по формуле

$$\lambda = 4K(k)/\sqrt{\gamma} \ ,$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра I рода. С учетом этого

$$Y = (1 + \gamma - 2\alpha)/3 + \alpha\, cn^2\left(\sqrt{\gamma}\, X/2, k\right) . \qquad (25)$$

Исходя из условия нормирования объема, запишем:

$$\lambda^{-1}\int_0^{\lambda} Y(X)\, dX = 0 \ ,$$
$$\frac{1 - 2\gamma + \alpha}{3} + \gamma \frac{E(k)}{K(k)} = 0 \ ,$$

где $E(k)$ — полный эллиптический интеграл Лежандра II рода. Тогда

$$\gamma=\left(2-k^2-3\frac{E(k)}{K(k)}\right)^{-1}, \tag{26}$$

$$\alpha=k^2\left(2-k^2-3\frac{E(k)}{K(k)}\right)^{-1}, \tag{27}$$

$$2-k^2-3\frac{E(k)}{K(k)}>0 .$$

Численный расчет показывает, что для параметра серии решений k допустимым диапазоном значений является $(k_{\min};1]$, где $k_{\min}\approx 0{,}980$. Кроме этого, на серию, разумеется, должно накладываться условие (21).

При подстановке (26), (27) в (25) получим:

$$y_0(X)=\frac{1-k^2-\dfrac{E(k)}{K(k)}+k^2 cn^2\left(\dfrac{X}{2}\left(2-k^2-3\dfrac{E(k)}{K(k)}\right)^{-1/2},k\right)}{2-k^2-3\dfrac{E(k)}{K(k)}} . \tag{28}$$

Выражение (21) с учетом (28) должно дать положительное значение функции $T(k)$, что сузит диапазон допустимых значений k до $(k_{\mathrm{mat}};1]$, где $k_{\mathrm{mat}}\approx 0{,}9862$.

Кноидальное решение (25) может выродиться в солитон при $k=1$, чему соответствуют значения $R=0$ и $T=0$. Физически это означает, что боковые стенки являются абсолютно недеформируемыми:

$$y_0(X)=\cosh^{-2}(X/2) .$$

Понятно, что помимо двух описанных существует также тривиальное решение:

$$y_0(X)=0 .$$

В свете найденных решений особое внимание следует уделить знаку параметра нормирования θ^2 (23). Если θ будет мнимой величиной, то действительным значениям x станут отвечать мнимые X (22). При этом солитонное и кноидальное решения потеряют физический смысл, так как на мнимой оси солитон имеет полюс $x=0$, а кноидальный рельеф — точки, в окрестностях которых локализовано бесконечное число волн. Таким образом, кноидальное и солитонное решения имеют смысл, только если $\beta<1-c^2/(\mu P)$; соответственно при $c^2>\mu P$ кноидальное и солитонное решения существовать не могут.

Особо рассмотрим кноидальное решение на пороге устойчивости: $\beta=1-c^2/(\mu P)$. Применим другое обезразмеривание:

$$y(X)=\varepsilon\beta P\zeta(X) ,$$
$$X=\theta w ,$$
$$\theta^2=\mu\left(\mathrm{Bo}^{-1}-\beta/3\right) .$$

Тогда

$$y^3+Ry+Q=0 ,$$
$$y_2=(1+\gamma-2\alpha)/3 ,$$

а условие нормирования примет вид:

$$\frac{\alpha-2\gamma}{3}+\gamma\frac{E(k)}{K(k)}=0 .$$

Единственным решением последнего является следующее: $\alpha = \gamma = 0$. Таким образом, на пороге устойчивости кноидальное решение переходит в тривиальное. Это позволяет заключить, что на пороге устойчивости имеет место обратная бифуркация.

5. Устойчивость квазистационарных решений

Частным случаем решений в виде бегущих волн являются, разумеется, квазистационарные течения $c = 0$. Рассмотрим малые отклонения от найденных квазистационарных режимов, пренебрегая квадратичными по отклонениям членами в эволюционных уравнениях (16), (20):

$$y = y_0(X) + r\ ,$$
$$r_{XX} + \left(3y_0(X) - 1\right) r - \varepsilon\beta(1-\beta)^{-2}\Psi_t = 0\ ,$$
$$r_t = -\mu\theta^2\varepsilon\beta(1-\beta)^{-1}\Psi_{XX}\ .$$

Преобразуем их, исключая r. Получим уравнение для возмущений:

$$\Psi_{XXXX} + \left(3y_0(X) - 1\right)\Psi_{XX} + s\Psi_{\tau\tau} = 0\ ,$$
$$\mathrm{s} = \mathrm{sign}\left(\mu^2\left(\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3\right)P\right),$$
$$\tau = t\sqrt{\mu^2\left(\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3\right)P}\ .$$

Уравнение однородно по времени и допускает обращение времени, поэтому возможны только три сценария: колебания с постоянной амплитудой, колебания с нарастающей амплитудой, монотонное нарастание возмущений. Последние два означают неустойчивость.

Условие, при котором неустойчивость носит длинноволновый характер, в используемых здесь терминах определяется как $\mathrm{Bo} \le 3$, то есть при росте β сначала меняет знак выражение $1-\beta$, а уже потом $\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3$, и именно $\beta = 1$ в длинноволновом случае является порогом устойчивости (в полном соответствии с [6]).

Рассмотрим сначала подкритическую область $\left(\mathrm{Bo}^{-1} - \beta/3\right) > 0$, $1 > \beta$, $s = +1$. Для возмущений тривиального решения вида $\Psi \sim \exp\left(d\tau + iqX\right)$ получим соотношение:

$$d^2 = -q^2 - q^4\ .$$

В подкритической области тривиальный режим, что очевидно, устойчив.

Для исследования устойчивости кноидального рельефа решение (28) стоит разложить в ряд Фурье:

$$3y_0(X) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{n\pi X}{W(k)}\right),$$
$$b_0 = -1\ ,$$
$$b_n = \frac{3}{W(k)}\int_0^{2W(k)} y_0(X)\cos\left(\frac{n\pi X}{W(k)}\right)dX, \quad n = 1, \ldots\infty\ ,$$
$$W(k) = 2K(k)\left(2 - k^2 - 3\frac{E(k)}{K(k)}\right)^{-1/2}\ .$$

Проанализируем колебательные возмущения с пространственным периодом $2W(k)$ и частотой 1:

$$\Psi = \Psi_e\exp\left((d+i)\tau\right) + \Psi_e^*\exp\left((d-i)\tau\right),$$
$$\Psi_e = \sum_{m=0}^{\infty}\left(a_m - ic_m\right)\exp\left(\frac{im\pi X}{W(k)}\right).$$

Здесь a_m и c_m — действительные числа. В силу произвола в выборе начала отсчета времени можно положить $c_0 = 0$. Подстановка такого разложения даст следующее:

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_{m-n} b_n B_{m-n} + \sum_{n=0}^{f-m} a_{m-n} b_n B_{m+n} + \sum_{n=0}^{f+m} a_{n-m} b_n B_{n-m} = a_m A_m + 4dc_m, \quad m = 0, \ldots, f,$$

$$\sum_{n=0}^{m-1} c_{m-n} b_n B_{m-n} + \sum_{n=0}^{f-m} c_{m-n} b_n B_{m+n} - \sum_{n=0}^{f+m} c_{n-m} b_n B_{n-m} = c_m A_m - 4da_m, \quad m = 1, \ldots, f,$$

$$A_m = 2\left(d^2 - 1 + \left(\frac{m\pi}{W(k)} \right)^4 \right),$$

$$B_m = \left(\frac{m\pi}{W(k)} \right)^2 .$$

Относительно a_m и c_m — это однородная система линейных алгебраических уравнений порядка ($2f+1$) с параметрами d и k, задающими ряд b_n. Условие равенства нулю определителя системы является алгебраическим уравнением степени ($4f+2$) относительно d. Численный расчет показывает, что при всех допустимых значениях параметра серии k и большом значении f (50 и более) система имеет корень $d = 1{,}000$, что означает существование нарастающих колебательных возмущений и неустойчивость квазистационарного кноидального решения в подкритической области.

Это соотносится с [12-13], где была показана неустойчивость медленных подкритических солитонов.

Рассмотрим надкритическую область $Bo^{-1} - \beta/3 > 0$, $1 < \beta$. Как уже отмечалось, кноидальные волны и солитоны в ней не существуют, есть лишь тривиальный режим. Для возмущений поверхности раздела тривиальной формы в надкритической области нормальные возмущения $\Psi \sim \exp(d\tau + iqX)$ дадут:

$$d^2 = q^2 - q^4 .$$

Очевидно, что это есть возмущения, нарастающие в надкритической области; тривиальный режим становится неустойчивым после уровня $\beta = 1$.

6. Выводы

Исследован подкритичный режим течений в системе, состоящей из двух тонких слоев несмешивающихся жидкостей, при горизонтальных вибрациях. В приближении «мелкой воды» выведены эволюционные уравнения для поверхности раздела слоев. Помимо тривиального режима с плоской поверхностью раздела получена существующая только в подкритической области серия решений в виде бегущих волн с кноидальным профилем поверхности раздела. Вырожденным случаем кноидального профиля является солитон. Указано ограничение на максимально возможную скорость бегущих волн. Для квазистационарных решений проведен анализ устойчивости, который показал неустойчивость найденной серии решений.

Следует отметить, что в [12, 13] показано: солитон может быть устойчив, если его скорость выше некоторого значения. Можно предположить, что подобное утверждение верно и для кноидальных подкритических бегущих волн.

Литература

1. *Wolf G.H.* The dynamic stabilization of rayleigh-taylor instability and corresponding dynamic equilibrium // Z. Physik. 1969. Vol. 227. P. 291-300. https://doi.org/10.1007/BF01397662
2. *Bezdenezhnykh N.A., Briskman V.A., Lapin A.Y., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Tcherepanov A.A., Zakharov I.V.* The influence of high frequency tangential vibrations on the stability of the fluid interface in microgravity // Int. J. Microgravity Res. Appl. 1991. Vol. 4(2). P. 96-97; *Sauer R.* Einführung in die theoretische Gasdynamik. Springer-Verlag, 1960. 214 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-92790-4
3. *Bezdenezhnykh N.A., Briskman V.A., Lapin A.Y., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Tcherepanov A.A., Zakharov I.V.* The influence of high frequency tangential vibrations on the stability of the fluid interface in microgravity // Microgravity Fluid Mechanics / Ed. H.J. Rath. Springer, 1992. P. 137-144. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50091-6_14
4. *Ivanova A.A., Kozlov V.G., Evesque P.* Interface dynamics of immiscible fluids under horizontal vibration // Fluid Dyn. 2001. Vol. 36. P. 362-368. https://doi.org/10.1023/A:1019223732059

5. *Talib E., Jalikop S.V., Juel A.* The influence of viscosity on the frozen wave instability: theory and experiment // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 584. P. 45-68. https://doi.org/10.1017/S0022112007006283
6. *Lyubimov D.V., Cherepanov A.A.* Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field // Fluid Dyn. 1986. Vol. 21. P. 849-854. https://doi.org/10.1007/BF02628017
7. *Khenner M.V., Lyubimov D.V., Belozerova T.S., Roux B.* Stability of plane-parallel oscillatory flow in a two-layer system // Eur. J. Mech. B Fluid. 1999. Vol. 18. P. 1085-1101. https://doi.org/10.1016/S0997-7546(99)00143-0
8. *Yoshikawa H.N., Wesfreid J.E.* Oscillatory Kelvin-Hemlholtz instability. Part 1. A viscous theory // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 675. P. 223-248. https://doi.org/10.1017/S0022112011000140
9. *Talib E., Juel A.* Instability of a viscous interface under horizontal oscillation // Phys. Fluids. 2007. Vol. 19. 092102. https://doi.org/10.1063/1.2762255
10. *Lyubimov D.V., Ivantsov A.O., Lyubimova T.P., Khilko G.L.* Numerical modeling of frozen wave instability in fluids with high viscosity contrast // Fluid Dyn. Res. 2016. Vol. 48. 061415. https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/6/061415
11. *Lyubimov D.V., Khilko G.L., Ivantsov A.O., Lyubimova T.P.* Viscosity effect on the longwave instability of a fluid interface // J. Fluid Mech. 2017. Vol. 814. P. 24-41. https://doi.org/10.1017/jfm.2017.28
12. *Goldobin D.S., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V.* Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of a two-layer fluid system subject to horizontal vibrations // EPL. 2014. Vol. 108. 54001 https://doi.org/10.1209/0295-5075/108/54001
13. *Goldobin D.S., Pimenova A.V., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P.* Running interfacial waves in two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations // Phys. Rev. E. 2015. Vol. 91. 053010. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.053010
14. *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.

References

1. Wolf G.H. The dynamic stabilization of rayleigh-taylor instability and corresponding dynamic equilibrium. *Z. Physik*, 1969, vol. 227, pp. 291-300. https://doi.org/10.1007/BF01397662
2. Bezdenezhnykh N.A., Briskman V.A., Lapin A.Y., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Tcherepanov A.A., Zakharov I.V. The influence of high frequency tangential vibrations on the stability of the fluid interface in microgravity. *Int. J. Microgravity Res. Appl.*, 1991, vol. 4(2), pp. 96-97; Sauer R. *Einführung in die theoretische Gasdynamik* [Introduction to theoretical gas dynamics]. Springer-Verlag, 1960. 214 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-92790-4
3. Bezdenezhnykh N.A., Briskman V.A., Lapin A.Y., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Tcherepanov A.A., Zakharov I.V. The influence of high frequency tangential vibrations on the stability of the fluid interface in microgravity. *Microgravity Fluid Mechanics*, ed. H.J. Rath. Springer, 1992. P. 137-144. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50091-6_14
4. Ivanova A.A., Kozlov V.G., Evesque P. Interface dynamics of immiscible fluids under horizontal vibration. *Fluid Dyn.*, 2001, vol. 36, pp. 362-368. https://doi.org/10.1023/A:1019223732059
5. Talib E., Jalikop S.V., Juel A. The influence of viscosity on the frozen wave instability: theory and experiment. *J. Fluid Mech.*, 2007, vol. 584, pp. 45-68. https://doi.org/10.1017/S0022112007006283
6. Lyubimov D.V., Cherepanov A.A. Development of a steady relief at the interface of fluids in a vibrational field. *Fluid Dyn.*, 1986, vol. 21, pp. 849-854. https://doi.org/10.1007/BF02628017
7. Khenner M.V., Lyubimov D.V., Belozerova T.S., Roux B. Stability of plane-parallel oscillatory flow in a two-layer system. *Eur. J. Mech. B Fluid.*, 1999, vol. 18, pp. 1085-1101. https://doi.org/10.1016/S0997-7546(99)00143-0
8. Yoshikawa H.N., Wesfreid J.E. Oscillatory Kelvin-Hemlholtz instability. Part 1. A viscous theory. *J. Fluid Mech.*, 2011, vol. 675, pp. 223-248. https://doi.org/10.1017/S0022112011000140
9. Talib E., Juel A. Instability of a viscous interface under horizontal oscillation. *Phys. Fluids*, 2007, vol. 19, 092102. https://doi.org/10.1063/1.2762255
10. Lyubimov D.V., Ivantsov A.O., Lyubimova T.P., Khilko G.L. Numerical modeling of frozen wave instability in fluids with high viscosity contrast. *Fluid Dyn. Res.*, 2016, vol. 48, 061415. https://doi.org/10.1088/0169-5983/48/6/061415
11. Lyubimov D.V., Khilko G.L., Ivantsov A.O., Lyubimova T.P. Viscosity effect on the longwave instability of a fluid interface. *J. Fluid Mech.*, 2017, vol. 814, pp. 24-41. https://doi.org/10.1017/jfm.2017.28
12. Goldobin D.S., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V. Elastic and inelastic collisions of interfacial solitons and integrability of a two-layer fluid system subject to horizontal vibrations. *EPL*, 2014, vol. 108, 54001 https://doi.org/10.1209/0295-5075/108/54001
13. Goldobin D.S., Pimenova A.V., Kovalevskaya K.V., Lyubimov D.V., Lyubimova T.P. Running interfacial waves in two-layer fluid system subject to longitudinal vibrations. *Phys. Rev. E*, 2015, vol. 91, 053010. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.91.053010
14. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostey razdela v vibratsionnykh polyakh* [The dynamics of the interface in vibration fields]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 216 p.

Поступила в редакцию 30.10.2019; после доработки 29.11.2019; принята к опубликованию 29.11.2019

Сведения об авторах

Хилько Григорий Леонидович, кфмн, мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), г. Пермь, 614018, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: grigori.hlk@gmail.com