

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.4.30](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.4.30)

УДК 532.517.4:536.252

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОГО МАГНИЯ В АППАРАТЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТИТАНА В РАМКАХ ПОДХОДОВ RANS И LES

Т.О. Карасев^{1,2}, А.С. Теймуразов²¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация²Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация

Исследуется турбулентная конвекция расплавленного магния в реакторе восстановления титана. Реторта реактора представляет собой цилиндрический сосуд радиусом 0,75 м и высотой до 4 м, в котором находится жидкий магний при температуре 850°C. В ходе процесса, который длится более двух суток, в аппарате восстановления возникают значительные градиенты температуры вследствие протекания экзотермической химической реакции на поверхности металла, одновременного охлаждения боковой стенки и подогрева нижней части реторты. Градиенты температуры вызывают внутри реактора конвективные течения, которые в свою очередь значительно влияют на формирование титанового блока. Математическое описание конвективных течений в реакторе основано на уравнениях термогравитационной конвекции для однофазной среды в приближении Буссинеска. Рассматривается возможность моделирования турбулентных конвективных течений в реакторе восстановления титана с использованием RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes equations) k - ϵ и k - ω SST (Shear Stress Transport) моделей. Показано, что вычисления на основе k - ω SST модели на относительно грубых сетках (0,825 млн конечных объемов) позволяют получить данные, качественно и количественно согласующиеся с теми, что следуют из LES (Large Eddy Simulation) расчетов на подробных сетках (3,7 млн конечных объемов). При этом модель k - ϵ демонстрирует приемлемые результаты не во всех случаях. RANS расчеты предоставляют информацию о средних полях скорости и температуры со временем осреднения, значительно большим доступного в LES расчетах. Исследовано несколько различных конфигураций нагрева и охлаждения аппарата, включая ранее неизученные. Обнаружено, что применение k - ω SST модели делает доступными расчет динамики течения с учетом изменения условий нагрева и охлаждения аппарата в течение всего процесса, а также идентификацию одновихревых и двухвихревых крупномасштабных течений в реторте и перехода между ними, а следовательно, оценку степени влияния конвекции на протекание реакции.

Ключевые слова: конвекция, турбулентность, малые числа Прандтля, жидкий металл, RANS, LES, численное моделирование, пакет программ OpenFOAM

MODELING OF LIQUID MAGNESIUM TURBULENT CONVECTION IN THE TITANIUM REDUCTION APPARATUS USING RANS AND LES APPROACHES

T.O. Karasev^{1,2} and A.S. Teimurazov²¹National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation²Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation

Turbulent convection of molten magnesium in a titanium reduction reactor is investigated. The reactor retort is a cylindrical vessel of radius 0.75 m and height 4 m, which contains liquid magnesium maintained at a temperature of 850°C. During the process lasting for more than two days, significant temperature gradients occur in the reduction apparatus due to an exothermic chemical reaction on the metal surface, cooling of the side wall of the retort and simultaneous heating of its bottom. Temperature gradients cause convective flows inside the reactor, which in turn significantly affect the formation of the titanium block. The mathematical model of convective flows in a reactor is based on the equations of thermogravitational convection for a single-phase medium in the Boussinesq approximation. The possibility of modeling turbulent convective flows in a titanium reduction reactor using RANS (Reynolds-averaged Navier–Stokes equations) k – ϵ and k – ω SST (Shear Stress Transport) models is considered. It is shown that the simulations performed with the k – ω SST model on relatively coarse grids (0.825 million finite volumes) give the results which qualitatively and quantitatively agree with the results of LES simulations on fine grids (3.7 million finite volumes). However, the k – ϵ model does not demonstrate acceptable results in some cases. The RANS simulations produce average velocity and temperature fields with averaging times much longer than those available in LES simulations. Several different configurations of the system of apparatus heating and cooling rate control, including previously unstudied ones, were examined. It has been found that the use of the k – ω SST model permits simulation of flow dynamics taking into account changes in the heating and cooling conditions of the apparatus during the entire process and identification of single-vortex and two-vortex large-scale flows in the retort and a transition between them, and hence the degree of influence of convection on the reaction can be assessed.

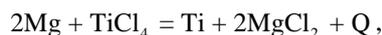
Key words: convection, turbulence, small Prandtl numbers, liquid metal, RANS, LES, numerical simulation, OpenFOAM

1. Введение

Турбулентная конвекция в жидкостях с малым числом Прандтля $Pr = \nu/\chi$ (где ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность), примером которых являются жидкие металлы, активно изучается как экспериментально [1, 2], так и численно [3–5]. Жидкости с $Pr \ll 1$ характеризуются большим значением отношения толщин теплового и динамического пограничных слоев. Это приводит к тому, что в случае турбулентных режимов течения (при больших числах Грасгофа $Gr = g\beta\Delta Th^3/\nu^2$) динамический пограничный слой имеет очень малую толщину (см., например, обзор [6]). В результате свойства

крупномасштабной циркуляции, возникающей на фоне развитого турбулентного течения, и интегральные характеристики течения существенно отличаются от таковых при больших значениях Pr . Исследование особенностей конвективных течений в металле представляет интерес как с фундаментальной, так и с практической точек зрения. Такие течения встречаются в современных технических приложениях, например, в атомной энергетике. Жидкий натрий используется в качестве теплоносителя в системах охлаждения ядерных реакторов на быстрых нейтронах [7] и токамаках [8].

Конвективные течения в жидких металлах играют важную роль и в металлургических производствах. В частности, структура конвективных течений может оказывать влияние на процесс металлургического восстановления титана методом Кролля [9, 10]. В ходе процесса в цилиндрическую реторту радиусом 0,75 м, заполненную жидким магнием при температуре 850°C до уровня $H = 2,5$ м, сверху подается тетрахлорид титана. Вследствие этого на поверхности магния протекает экзотермическая реакция восстановления с образованием губчатого титана и двухлористого магния [11, 12]:



опускающихся на дно реторты. Процесс длится более двух суток. Титановый блок, имеющий высокую пористость, постепенно растет и занимает в реторте все больший объем. С интервалом в несколько часов накопившуюся в нижней части реактора соль магния ($MgCl_2$) сливают. Протекание процесса и качество титановой губки существенно зависят от температурного режима аппарата и скорости реакции и требуют постоянного наблюдения за последними. Большие масса и размеры установки, очень высокие температуры делают прямой контроль крайне затруднительным. Измеряется только температура внешней поверхности реторты в нескольких точках, поэтому процесс восстановления титана в значительной степени остается «черным ящиком». До 5% производственных циклов выбраковываются вследствие нештатных ситуаций, связанных с нарушением процесса осаждения хлористого магния, локальным перегревом реторты, выходом на поверхность магния титановой губки. Иногда возможно возникновение так называемого режима «неделения», при котором побочный продукт реакции — $MgCl_2$, плотность которого близка к плотности магния, перестает осажаться на дно реактора, и процесс оказывается испорченным.

Решение проблемы контроля реакции восстановления титана приводит к необходимости выполнения работ в двух взаимосвязанных направлениях — в построении полной математической модели реактора и в поиске новых методик экспериментального измерения в реторте уровня поверхности магния, на которой происходит реакция, и распознавания, находится ли он в прямом контакте с $TiCl_4$ (при штатном протекании реакции) или его поверхность покрыта $MgCl_2$ (в нежелательном режиме «неделения»).

Для измерения уровня магния предлагались бесконтактные индукционные методы [13]. Однако попытки их использования в реальном производстве показали, что они работают только на начальных стадиях реакции. Недавно был предложен алгоритм восстановления уровня жидкого металла, основанный на измерениях характеристик магнитных полей, в котором учитывается наличие титановой губки в виде гарнисажа с различной геометрией и электрической проводимостью. Для интерпретации результатов, полученных с регистрирующих катушек, установленных в верхней части реторты, используется математическая модель, с помощью которой просчитываются всевозможные комбинации процесса восстановления с точки зрения электродинамики (без конвективного движения среды). Всего рассмотрено несколько тысяч комбинаций параметров. Для определения уровня магния в реальном процессе из базы данных, хранящей параметры всевозможных сценариев процесса восстановления, выбираются те, которые отвечают сценарию, наиболее соответствующему результатам измерений с регистрирующей катушки [14].

В ходе процесса в аппарате восстановления возникают значительные градиенты температуры, являющиеся следствием протекания экзотермической химической реакции на поверхности металла ($Q = 1707$ кДж на 1 кг тетрахлорида титана [11, 12]), одновременного охлаждения боковой стенки и подогрева нижней части реторты. Градиенты температуры вызывают внутри реактора конвективные течения, которые могут оказывать влияние на ход реакции и на формирование титанового блока. Одной из возможных причин образования режима «неделения» может являться изменение характера конвективного течения. Знание структуры течений, имеющих место в реакторе на различных стадиях процесса, может позволить сформировать поток металла таким образом, чтобы обеспечивалось устойчивое протекание реакции.

Разработка математической модели, способной адекватно описать полный цикл работы реактора восстановления титановой губки, связана с большими сложностями сопряжения таких наук, как физическая химия, гидродинамика и вычислительная математика. В настоящее время нет программного комплекса, чья функциональность давала бы возможность численно исследовать все процессы происходящие внутри реторты.

Первые попытки оценить интенсивность конвективных течений в реакторе на основе численного моделирования конвекции магния в цилиндрическом сосуде для сильно заниженных значений числа Грасгофа (10^5 вместо 10^{12}) были предприняты более 40 лет назад [15]. Численно конвекция магния

в цилиндре для реалистичных значений управляющих параметров изучалась в [16], однако задача имела стационарную осесимметричную постановку.

Первый расчет в полной трехмерной постановке при отвечающих действительности числах Грасгофа и Релея выполнен в [17]. Он выявил наличие интенсивного турбулентного течения. В [18] рассмотрено конвективное течение расплавленного магния в реторте со стальными стенками толщиной 5 см для трех конфигураций нагрева и охлаждения в присутствии и отсутствии титанового блока. Обнаружено, что при параметрах, отвечающих реальному процессу, в реторте возникают нестационарные турбулентные режимы течения. Показано, что на разных стадиях процесса (то есть при различных конфигурациях нагрева) структуры конвективного течения принципиально отличаются. В работе [19] предметом обсуждения являлось двухфазное течение — процесс осаждения соли магния ($MgCl_2$), образующейся на поверхности магния (Mg) в зоне реакции при существовании сильного конвективного течения. Исследовались начальные стадии процесса, поэтому вклад от пористой среды (титановой губки), которая также оседает на дно реактора, не учитывался. С помощью численного кода решены уравнения для двухфазного течения Mg и $MgCl_2$. Детальный анализ проведен для конфигураций с учетом и без учета конвективного течения, вызванного нагревателями печи и химической реакцией. Выявлено, что соль магния оседает в каплях размерами от ≈ 3 до ≈ 10 см. Скорость капель (от ≈ 18 до ≈ 30 см/с, в зависимости от режима) оказалась выше скорости конвективного течения (до 20 см/с), но продемонстрировано, что конвективный поток может увлекать капли и переносить их вместе с вихрем.

В [20] экспериментально и численно рассматривалось конвективное течение над круглым нагревателем в верхней части вертикального цилиндра, заполненного жидким натрием. Полагалось, что это течение — упрощенная модель течения жидкого магния в реакторе восстановления титана, хотя типичное значение числа Грасгофа в реакторе на три порядка выше, чем в эксперименте (10^{12} против 10^9).

Предыдущие трехмерные расчеты [17–19] выполнялись с использованием метода крупных вихрей (LES), а значит, требовали очень подробной расчетной сетки. Но процесс восстановления титана занимает более двух дней. Глобальной целью является создание гидродинамической модели процесса в полной трехмерной постановке с адекватным учетом особенностей турбулентного течения, исследование с ее помощью особенностей конвекции в реакторе на разных стадиях процесса и изучение динамики течения с изменением условий нагрева и охлаждения аппарата во времени. Описание всего процесса требует настолько значительного количества вычислительных ресурсов, что становится невозможным применение подходов DNS (прямого численного моделирования) и LES (моделирования крупных вихрей). Поэтому целью данной работы является моделирование конвекции в реакторе с помощью RANS (уравнения Навье–Стокса осредненные по Рейнольдсу) подхода, поскольку он позволяет значительно снизить затраты на расчеты.

2. Постановка задачи и математическая модель

Трехмерная нестационарная математическая модель основана на уравнениях термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска. Конфигурации нагрева и охлаждения аппарата соответствуют разным стадиям процесса. Рассматривается конвективное течение лишь одной фазы — жидкого магния (как в [17]). Вклад второй жидкой фазы — хлористого магния [19], и пористой среды — титановой губки [18], не учитывается. Информации об однофазном течении (только о конвекции жидкого магния) будет достаточно для тестирования RANS моделей турбулентности и сопоставления с результатами, полученными с помощью подхода LES.

Расчетная область изображает реторту реактора восстановления титана и представляет собой цилиндр радиусом $R = 0,75$ м и высотой $H = 2,5$ м (Рис. 1а), вся внутренняя полость которого заполнена магнием. На рисунке 1б показаны обозначения границ расчетной области: Γ_B — верхняя поверхность площадью S_B ; Γ_{BB} — верхняя часть боковой поверхности высотой h_1 и площадью S_{BB} ; Γ_{BC} — средняя часть боковой поверхности, имеющая площадь S_{BC} ; Γ_{BH} — нижняя часть боковой поверхности площадью S_{BH} ; Γ_H — поверхность основания цилиндра площадью S_H .

Верхняя часть боковой поверхности обдувается холодным воздухом; высота зоны охлаждения h_1 варьируется от 0,3 до 0,7 м. Подогрев реторты осуществляется также на боковой части цилиндра, располагающейся ниже зоны охлаждения. Мощность нагревателей в печи равна 423 кВт и обеспечивается подогревом снизу — $Q_{\Gamma_H} = 94$ кВт, и подогревом на боковой поверхности в нижней ее части — $Q_{\Gamma_{BC} \cup \Gamma_{BH}} = 329$ кВт. Тепловая мощность реакции на поверхности составляет $Q_{\Gamma_B} = 205$ кВт. Конвективные параметры среды соответствуют жидкому магнию при температуре 850°C , их значения приведены в Таблице. При таких условиях значения управляющих параметров высоки (характерные числа Грасгофа при протекании процесса составляют порядка 10^{12}), поэтому возникающие течения являются нестационарными и турбулентными.

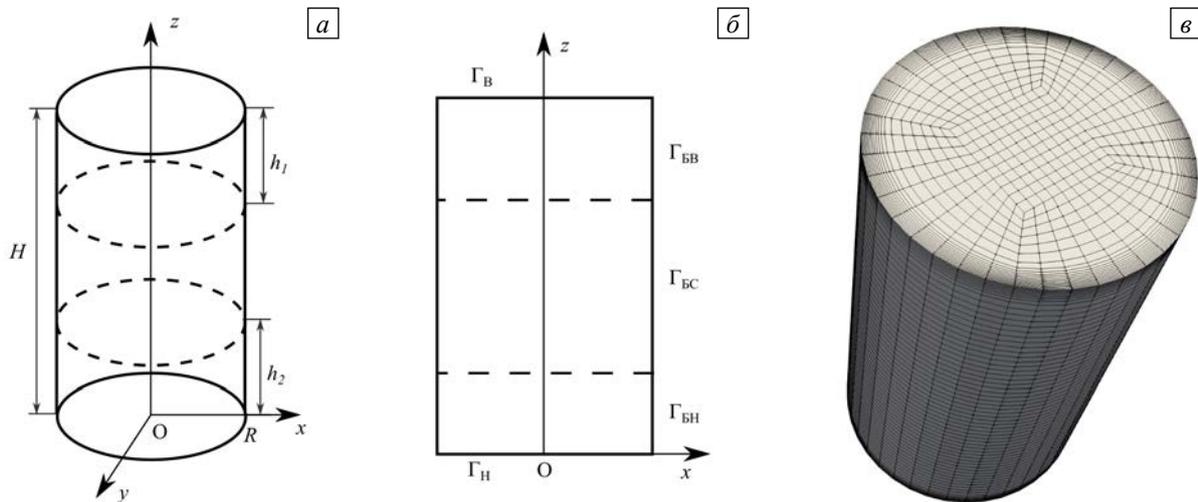


Рис. 1. Схема расчетной области: общий вид (а), вертикальное сечение плоскостью Oxz с обозначениями границ расчетной области (б), структура расчетной сетки (в)

Таблица. Физические параметры магния при температуре $T_0 = 850$ °C

Название	Обозначение	Размерность	Значение
Плотность	ρ_0	кг/м ³	1538
Температурный коэффициент объемного расширения	β	1/К	$1,69 \cdot 10^{-4}$
Кинематическая вязкость	ν_0	м ² /с	$4,17 \cdot 10^{-7}$
Температуропроводность	χ_0	м ² /с	$4,39 \cdot 10^{-5}$
Удельная теплоемкость	C_p	Дж/(кг·К)	1344
Коэффициент теплопроводности	λ	Вт/(м·К)	90,7
Число Прандтля	Pr	–	0,0095

Общий вид системы уравнений термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска с применением моделей турбулентности следующий:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ (\nu_0 + \nu_t) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right\} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{p}{\rho_0} \right) + g_i [1 - \beta(T - T_0)], \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_0}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (3)$$

Здесь: t — время; u_i — компонента скорости; p — давление; T — температура; g_i — компонента ускорения свободного падения; β — температурный коэффициент объемного расширения; ν_0 — кинематическая вязкость; ν_t — турбулентная вязкость; Pr_t — турбулентное число Прандтля.

Для учета турбулентности использовались подходы RANS (уравнения Навье–Стокса, осредненные по Рейнольдсу) и LES (моделирование крупных вихрей).

В основе первого подхода лежит идея разделения на средние поля и поля пульсаций всех входящих в уравнения Навье–Стокса величин. Это позволяет записать уравнения движения для средних полей, но в них появляется дополнительное слагаемое — тензор напряжений Рейнольдса, характеризующий пульсации скорости и делающий систему незамкнутой. Для замыкания системы существует множество моделей [21], все они содержат константы, нуждающиеся в определении из опыта, и потому называются полуэмпирическими. Из них наибольшее распространение получили двухпараметрические.

В данной работе применяются модели турбулентности $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ SST (Shear Stress Transport), в которых для замыкания в систему добавляются два уравнения: в случае $k-\varepsilon$ — это уравнения для кинетической энергии пульсаций скорости k и для скорости диссипации энергии ε . Тогда $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$, где C_μ — один из эмпирических коэффициентов (всего в данной модели их шесть).

В $k-\omega$ SST вместо уравнения для ε используется уравнение удельной скорости турбулентной диссипации ω (частота турбулентных пульсаций $\omega = \varepsilon/k$). Модель $k-\omega$ SST является гибридом $k-\omega$ и $k-\varepsilon$ моделей, полученным их суперпозицией и введением эмпирической функции, обеспечивающей возможность расчета пристенных течений по модели $k-\omega$ и ядра течения по модели $k-\varepsilon$.

Для RANS требуется верификация, при этом в каждом конкретном случае необходимо убедиться, что модель и выбранные значения ее констант соответствуют исследуемому типу турбулентного течения. Поэтому для сопоставления результатов и настройки параметров RANS проведены расчеты с учетом второго подхода — LES. Согласно ему разделение производится не на средние поля и пульсации, а на «крупные» масштабы, явно рассчитываемые на принятой расчетной сетке, и «мелкие», такие, которые расчетная сетка не способна разрешить. Вклад в решение от этих более мелких вихрей учитывается с помощью моделей подсеточного замыкания. Чем подробнее вычислительная сетка, тем меньший вклад привносит модель турбулентности, и результаты все ближе будут стремиться к результатам прямого численного моделирования (DNS).

В данной работе используется LES модель Смагоринского [22], для которой требуется лишь одна константа, и ее значение составляет $C_s = 0,17$. Турбулентная вязкость определяется как $\nu_t = \sqrt{2}C_s^2\Delta^2|\mathbf{S}|$, где $|\mathbf{S}|$ норма тензора скорости деформации $S_{ij} = (1/2)(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, в котором $\Delta = (h_x h_y h_z)^{1/3}$ есть ширина фильтра, h_x, h_y, h_z — размеры шагов сетки по каждой из координатных осей, а вклад от вихрей с размером меньше Δ учитывается с помощью принятой модели. В области, принадлежащей вязкому подслою, в котором турбулентная вязкость полагается равной нулю, применяется демпфирующая функция, предложенная Ван Дристом (Van Driest), уменьшающая подсеточную турбулентную вязкость по экспоненциальному закону.

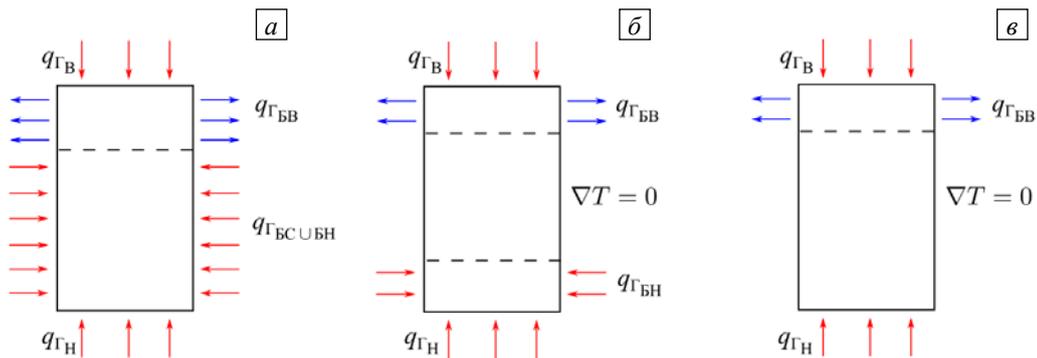


Рис. 2. Схема распределения тепловых потоков на границах расчетной области для различных конфигураций подогрева: ТГУ-1 – нагрев от реакции с полным включением всех нагревательных элементов (а); ТГУ-2 – нагрев от реакции с частичным отключением нагревательных элементов на боковой поверхности (б); ТГУ-3 – нагрев от реакции с полным отключением бокового подогрева реторты (в)

В расчетах рассматриваются три различных конфигурации нагрева и охлаждения, возникающие в реакторе на различных стадиях процесса (Рис. 2). Во всех случаях на верхней границе расчетной области Γ_B задается постоянный поток тепла q_{Γ_B} , моделирующий выделение в химической реакции тепла мощностью $Q_{\Gamma_B} = 205$ кВт. На дне Γ_H задается поток тепла q_{Γ_H} , поступающий от постоянно включенных нижних нагревателей мощностью $Q_{\Gamma_H} = 94$ кВт. Граничные условия для температуры на этих поверхностях следующие ($\partial T/\partial n$ — производная по нормали, направленной внутрь полости):

$$q_{\Gamma_B} = -\lambda_{mg} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_B} = \frac{Q_{\Gamma_B}}{S_{\Gamma_B}}, \quad q_{\Gamma_H} = -\lambda_{mg} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_H} = \frac{Q_{\Gamma_H}}{S_{\Gamma_H}}.$$

При этом верхняя часть боковой поверхности реторты $\Gamma_{БВ}$ охлаждается воздухом.

Первой конфигурации (Рис. 2а) соответствует ситуация, когда все нагреватели в печи, расположенные вдоль боковой поверхности реторты, включены на полную мощность — $Q_{\Gamma_{БС} \cup \Gamma_{БН}} = 329$ кВт. Для сохранения баланса энергии с зоны охлаждения высотой $h_1 = 0,7$ м снимается поток, в числовом выражении равный сумме как всех потоков, создаваемых нагревателями, так и тепла, вырабатываемого в ходе экзотермической реакции. Такая постановка соответствует наиболее экстремальному режиму эксплуатации реактора восстановления, ее рассмотрение позволяет получить оценки значений максимальных скоростей и температур. Однако следует отметить, что во время реального процесса

большую часть времени включены не все нагреватели в печи. Граничные условия для температуры имеют вид (ТГУ-1):

$$q_{\Gamma_{BC} \cup \Gamma_{BH}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BC} \cup \Gamma_{BH}} = \frac{Q_{\Gamma_{BC} \cup \Gamma_{BH}}}{S_{\Gamma_{BC} \cup \Gamma_{BH}}}, \quad q_{\Gamma_{BB}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BB}} = -\left(\frac{Q_{\Gamma_B} + Q_{\Gamma_{BC \cup BH}} + Q_{\Gamma_H}}{S_{\Gamma_{BB}}} \right).$$

Вторая конфигурация (Рис. 2б) ближе к типичному режиму работы реактора и отличается от первой тем, что в ней отключены несколько нагревательных элементов, лежащих в зоне Γ_{BC} ; эта граница считается теплоизолированной. Данный режим можно назвать переходным между интенсивной работой всей нагревательной системы и полным отключением боковых нагревателей. Высота зоны охлаждения составляет $h_1 = 0,3$ м, высота нагреваемой части боковой поверхности Γ_{BH} — $h_2 = 0,3$ м. В этом случае граничные условия для температуры выглядят так (ТГУ-2):

$$q_{\Gamma_{BC}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BC}} = 0, \quad q_{\Gamma_{BH}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BH}} = \frac{Q_{\Gamma_{BH}}}{S_{\Gamma_{BH}}}, \quad q_{\Gamma_{BB}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BB}} = -\left(\frac{Q_{\Gamma_B} + Q_{\Gamma_{BH}} + Q_{\Gamma_H}}{S_{\Gamma_{BB}}} \right).$$

Третья конфигурация — ТГУ-3 (Рис. 2в), соответствует «сходящему» режиму работы реактора, когда для поддержания реакции и предотвращения остывания магния включена только нижняя пара нагревателей, расположенных в зоне Γ_H . Таким образом, граничные условия для температуры имеют вид:

$$q_{\Gamma_{BH}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BH}} = q_{\Gamma_{BC}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BC}} = 0, \quad q_{\Gamma_{BB}} = -\lambda_{mg} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BB}} = -\left(\frac{Q_{\Gamma_B} + Q_{\Gamma_H}}{S_{\Gamma_{BB}}} \right).$$

В рамках подхода LES конфигурация, близкая к ТГУ-1, ранее изучалась в [17, 18], похожая на ТГУ-3 — в [18], конфигурация ТГУ-2 не рассматривалась.

Для скорости на верхней границе задается условие проскальзывания. Все остальные границы области считаются твердыми, им отвечают условия прилипания $\mathbf{v} = 0$.

Для расчетов используется свободно распространяемый пакет программ с открытым исходным кодом OpenFOAM 4.1. Дискретизация проводится по методу конечных объемов. Применяется решатель *buoyantBoussinesqPimpleFoam*, в котором для системы уравнений Навье–Стокса реализован алгоритм PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators) [23], основанный на процедуре коррекции давления. Слагаемые с производными по времени дискретизируются согласно неявной схеме Эйлера, диффузионные слагаемые — по схеме с центральными разностями. Последнее, в случае метода конечных объемов, подразумевает линейную интерполяцию значений переменных из центров на грани соседних объемов, поэтому схема называется *linear*. Конвективные слагаемые вычисляются по схеме *limitedLinear*, обеспечивающей хороший баланс между точностью и устойчивостью расчетов. Решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на каждом шаге алгоритма коррекции давления осуществляется с помощью метода сопряженных градиентов PCG (Preconditioned Conjugate Gradient) с предобуславливателем DIC (неполным разложением Холецкого). Поля скорости и температуры определялись методом бисопряженных градиентов PBiCG (Preconditioned Biconjugate Gradient Method) с предобуславливателем DILU (диагональным неполным разложением LU), СЛАУ для переменных k , ϵ и ω решалась с привлечением *smoothSolver* со сглаживанием Гаусса–Зейделя. Число Куранта во время расчетов не превышало 0,9.

Во всех расчетах применялась блочная неравномерная сетка с измельчением вблизи границ области (Рис. 1в). Для LES расчетов сетка насчитывала 3,7 млн конечных объемов (КО). Преимущество RANS подхода для описания турбулентности заключается в том, что он позволяет получать адекватное представление средних полей турбулентных течений на значительно более грубых сетках, нежели необходимы для LES расчетов. Если при использовании LES результат тем ближе к DNS, чем подробнее сетка, то в случае RANS подхода это не так — нет смысла измельчать сетку сильнее, чем необходимо для разрешения средних полей, поскольку весь вклад от турбулентности течения учитывается с помощью дополнительных — замыкающих — уравнений модели. В ходе RANS расчетов сетки имели различную плотность КО (3,7; 1,5; 0,825; 0,6 млн), поскольку цель состояла в том, чтобы найти максимально грубую сетку, которая позволила бы достигнуть качественного и количественного согласия с данными гораздо более затратных LES расчетов.

Вычислительные эксперименты показали, что для RANS моделирования достаточно сетки с 0,825 млн КО (сопоставление результатов на разных сетках приведено в следующем разделе). Рисунок 3 демонстрирует масштабируемость кода на вычислительном кластере «Тритон» ИМСС УрО РАН

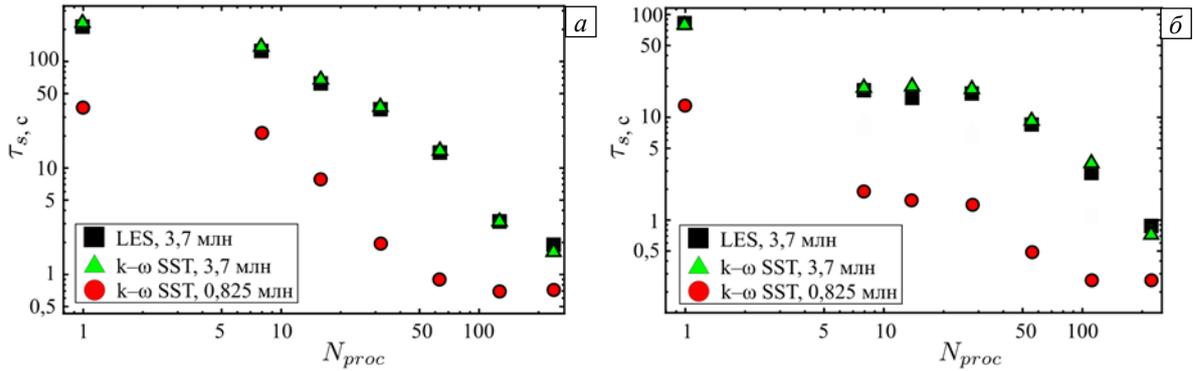


Рис. 3. Зависимости времени выполнения одного шага расчета τ_s от количества процессоров N_{proc} : суперкомпьютер Triton Harpertown (а), суперкомпьютер Triton Broadwell (б)

(г. Пермь). Суперкомпьютер «Тритон» построен на базе процессоров Intel Xeon E5450 (поколение Harpertown, 256 процессорных ядер) и Intel Xeon E5-2690v4 (поколение Broadwell, 448 процессорных ядер) с интерконнектом InfiniBand FDR и имеет пиковую производительность 23,1 Тфлопс.

При использовании процессоров Harpertown на сетке 3,7 млн КО наблюдается ускорение в 112 раз при переходе от одного к 240 вычислительным ядрам. Применение более производительных процессоров поколения Broadwell позволяет получать ускорение в 94 раза при переходе от одного к 224 процессорным ядрам. Следует отметить, что эффективность распараллеливания зависит и от особенностей устройства конкретного кластера. Так, каждый вычислительный узел раздела Triton Harpertown содержит 16 процессорных ядер, в то время как Triton Broadwell обладает 56 ядрами на каждом узле. На одинаковой сетке RANS расчеты требуют немного большего по сравнению с LES времени, поскольку в первом случае требуется решать два дополнительных уравнения для турбулентных полей k и ω , однако этот недостаток компенсируется возможностью применения более грубых сеток, нежели требуется для LES. В сравнении с LES расчетами на сетке из 3,7 млн КО RANS вычисления на сетке 0,825 млн КО при использовании 56 ядер Broadwell занимают в 17,5 раз меньше времени. Следует отметить, что прибегать к очень большому количеству ядер для расчетов на относительно грубых сетках нецелесообразно. Например, на сетке 0,825 млн КО при числе ядер более 100 эффективность распараллеливания счета падает, так как на каждое ядро приходится слишком малый объем данных.

3. Результаты

Рассмотрены три качественно отличающихся режима течения, реализующихся при конфигурациях нагрева ТГУ-1, ТГУ-2, ТГУ-3. Результаты приведены для LES расчетов на сетке с 3,7 млн КО и RANS расчетов с моделями $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ SST со стандартными пристеночными функциями на сетке 0,825 млн КО.

На рисунке 4 приведены осредненные по времени поля скорости жидкого магния для ТГУ-1 (Рис. 2а), определенные с помощью разных моделей описания турбулентного течения. Этот режим соответствует максимально интенсивному режиму работы реактора. Общая структура осредненного течения имеет двухвихревой вид. В верхней части реторты наблюдается застойная зона высотой около 20 см.

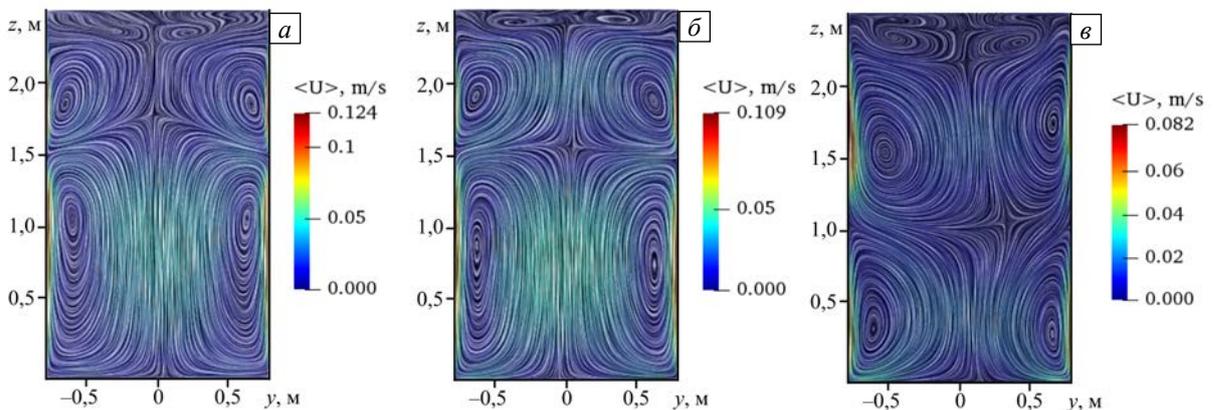


Рис. 4. Осредненные по времени поля скорости в сечении Oxy для конфигурации нагрева ТГУ-1: LES (а), $k-\omega$ SST (б) и $k-\varepsilon$ (в)

Наиболее интенсивное конвективное движение вызывается перепадом температуры вблизи границы раздела охлаждаемой и нагреваемой частей боковой поверхности цилиндра. Поскольку в данном режиме вихри являются тороидальными, то ориентация вертикальной плоскости сечения для представления результатов может быть произвольной. При этом течение носит ярко выраженный пограничный характер. Из рисунка 4 следует, что структуры среднего течения, найденные с помощью LES и $k-\omega$ SST моделей, качественно совпадают, в то время как форма и размер вихрей, которые получаются с помощью модели $k-\varepsilon$, существенно отличается.

Осреднение по времени полей скорости и температуры для ТГУ-1, ТГУ-2 длилось 3500 с, этого времени было достаточно для того, чтобы среднее течение стало установившимся. Дальнейшее увеличение времени осреднения не приводило к структурному изменению полей.

Для количественного сопоставления данных на рисунке 5 представлены профили средней скорости вдоль горизонтальных линий на различных высотах. Наибольшая интенсивность течения наблюдается в пристеночном слое вблизи боковой поверхности реторты. Оценки максимальной скорости, полученные с помощью $k-\omega$ SST модели, близки к значениям, которые дает LES расчет, тогда как $k-\varepsilon$ модель показывает заниженную интенсивность течения.

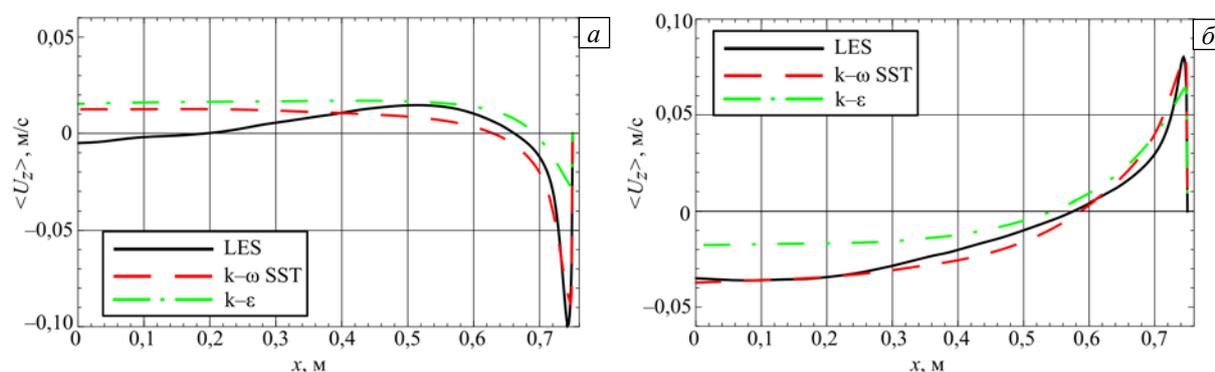


Рис. 5. Профили осредненных по времени полей скорости вдоль горизонтальной линии в сечении Oxy на высоте 1,7 м (а) и 0,6 м (б) при ТГУ-1

Наибольшая сложность для RANS моделирования с использованием пристеночных функций состоит в расчете теплообмена на верхней границе — там, где проходит химическая реакция и градиенты температуры максимальны. На рисунке 6а приведены профили температуры вдоль вертикальной оси цилиндра. При LES расчете в верхней части реторты получается «прогретая» застойная область с большими значениями температуры, в то время как при вычислениях на основе RANS со стандартными значениями коэффициентов (турбулентным числом Прандтля $Pr_t = 0,9$) застойная прогретая зона в верхней части отсутствует: конвективные вихри доходят до свободной поверхности.

Обычно для Pr_t выбирается значение 0,9, подходящее для жидкостей с относительно большими числами Прандтля (например, для воды) и газов. Однако, согласно разным моделям, в конвективных течениях жидких металлов Pr_t может принимать большие значения [24, 25]. Эксперименты в круглых трубах по определению величины Pr_t показывают, что она зависит от молекулярного числа Прандтля, числа Рейнольдса и расстояния от стенки. Более высокие значения Pr_t ведут к меньшему вкладу в решение от турбулентного теплообмена, который рассчитывается с помощью LES или RANS подходов. Для того чтобы получить оценки влияния значения Pr_t на результаты, проведен ряд дополнительных расчетов. Для RANS моделей, помимо 0,9, рассмотрены значения 4,1 и 24, а также переменное Pr_t со значением 4,1 везде внутри области [24], но увеличивающееся по линейному закону до 100 в верхней части (от 2,3 до 2,5 м) реторты, то есть вклад от турбулентного теплообмена в данной застойной зоне исключается. Это соответствует тому, что в застойной зоне движение медленное, и турбулентность отсутствует, а применяемые RANS модели турбулентности подразумевают развитую турбулентность во всей области. Из рисунка 6а можно видеть, что увеличение значения турбулентного числа Прандтля позволяет приблизить результаты RANS к результатам LES (Рис. 6а). Поэтому во всех RANS расчетах, представленных в этой статье, используется переменное Pr_t (сплошная толстая линия на рисунке 6а).

Следует отметить, что модели LES гораздо менее чувствительны к значению Pr_t при параметрах задач, рассмотренных в данной работе. В случае LES для сетки 3,7 млн КО и заданных потоков тепла вклад от «подсеточного» турбулентного теплообмена даже при стандартном значении $Pr_t = 0,9$ мал по сравнению с тем, что рассчитывается явно. Поэтому увеличение значения Pr_t в LES расчетах

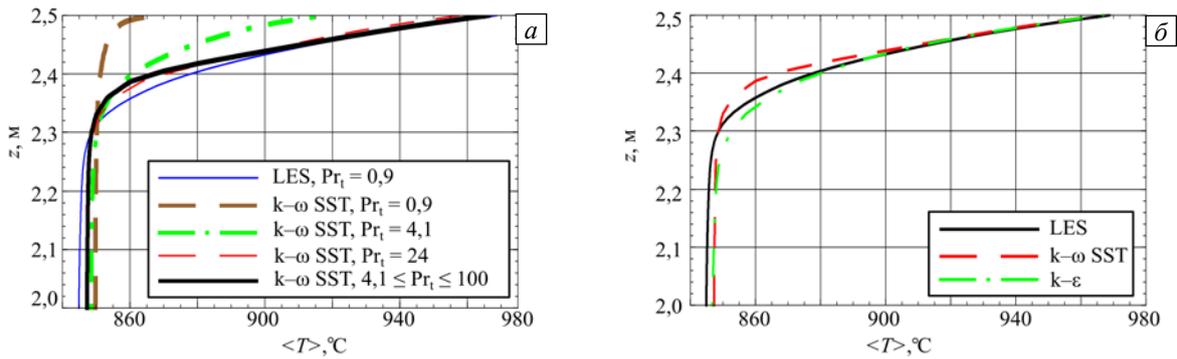


Рис. 6. Профили осредненных по времени полей температуры вдоль вертикальной линии, лежащей на оси z , при ТГУ-1 для различных значений турбулентного числа Прандтля Pr_t (а) и при его значениях, выбранных для основных расчетов: 0,9 (модель LES); $4,1 \leq Pr_t \leq 100$ (модели $k-\omega$ SST и $k-\epsilon$) (б)

не приводит к существенным изменениям полей температуры и скорости. На рисунке 6б приведены средние по времени профили температуры вдоль вертикальной оси цилиндра при выбранных параметрах для моделей LES, $k-\omega$ SST и $k-\epsilon$; все они демонстрируют аналогичное поведение.

Рисунок 7 содержит примеры зависимостей температуры и вертикальной компоненты скорости U_z от времени в отдельных точках реторты. Амплитуда пульсации температуры и скорости в LES и RANS расчетах с моделью $k-\omega$ SST близки, хотя LES расчеты ожидаемо лучше воспроизводят высокочастотные возмущения.

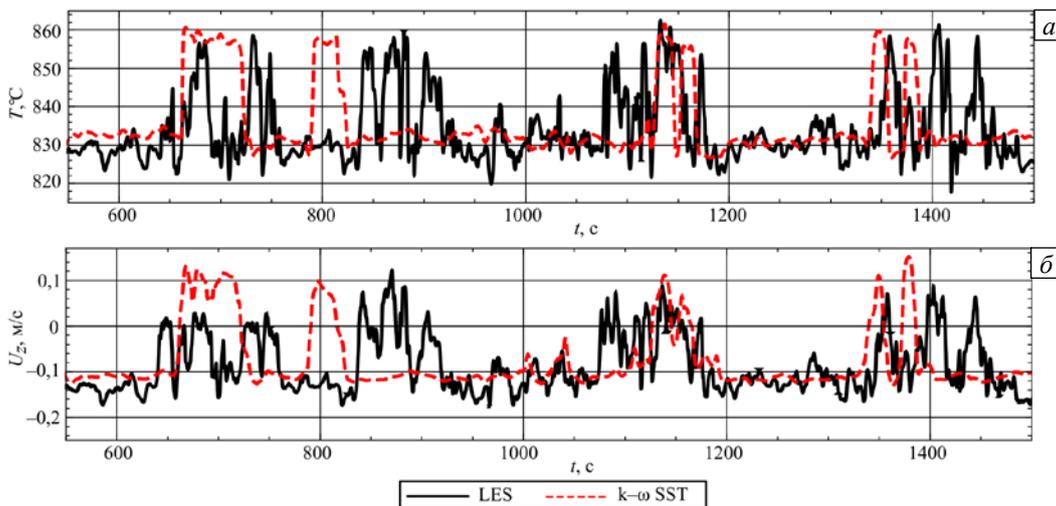


Рис. 7. Временные зависимости температуры (а) и вертикальной компоненты скорости U_z (б) в точке, расположенной на расстоянии 5 см от боковой стенки цилиндра на высоте $z = 1,7$ м, при ТГУ-1

На рисунке 8 приведены осредненные по времени поля скорости жидкого магния, вычисленные с помощью разного описания турбулентного течения для случая ТГУ-2 (Рис. 2б), при котором часть

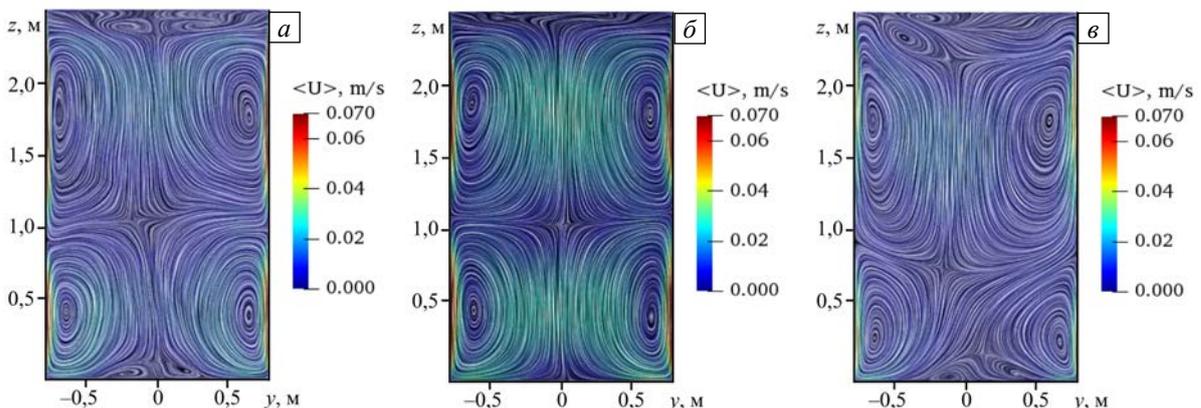


Рис. 8. Осредненные по времени поля скорости в сечении Oxz для конфигурации нагрева ТГУ-2: LES (а), $k-\omega$ SST (б) и $k-\epsilon$ (в)

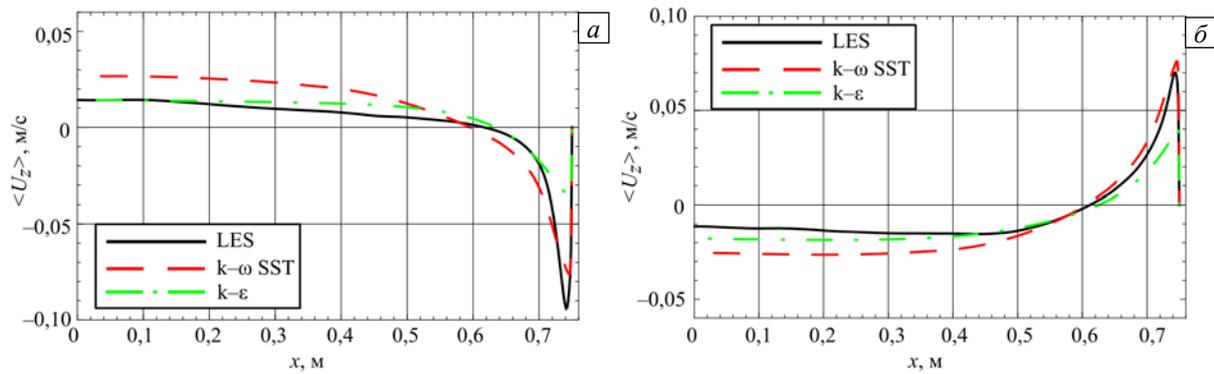


Рис. 9. Профили осредненных по времени полей скорости вдоль горизонтальной линии в сечении Оху на высоте 1,7 м (а) и 0,6 м (б) при ТГУ-2

нагревателей вдоль боковой стенки реторты отключена. Вновь наблюдается двухвихревое, как и в случае ТГУ-1, течение, но в целом его интенсивность ниже, и соотношение размеров верхнего и нижнего вихрей другое: теперь верхний вихрь больше нижнего. Структуры полей, полученных с помощью LES и $k-\omega$ SST моделей качественно совпадают, в то время как модель $k-\epsilon$ вновь не позволяет воспроизвести соотношение размеров вихрей.

Рисунок 9 содержит профили средней скорости вдоль горизонтальных линий на различных высотах для ТГУ-2. Снова наибольшая интенсивность течения наблюдается в пристеночном слое вблизи боковых стенок реторты. Оценки максимальной скорости, полученные в LES и $k-\omega$ SST расчетах близки, $k-\epsilon$ модель дает заниженные значения.

Результаты для конфигурации ТГУ-3 (Рис. 2в) представлены на рисунке 10. В этом режиме все нагреватели вдоль боковой поверхности реторты отключены, активны только расположенные на дне. Структура течения значительно отличается от той, что наблюдалась при ТГУ-1 и ТГУ-2: теперь в цилиндре возникает крупномасштабная циркуляция (КМЦ), сопровождаемая двумя маленькими валами, вращающимися в противоположном направлении. КМЦ ориентируется случайным образом и в процессе эволюции течения демонстрирует сложную динамику. Такая структура течения хорошо известна в задачах конвекции Релея–Бенара, когда могут наблюдаться инверсии КМЦ, ее закручивание (twisting) и болтание (sloshing) [2, 5, 6]. В настоящей работе эти эффекты подробно не изучались. Сечения на рисунке 10 для представления результатов выбраны не произвольно, а в соответствии с ориентацией КМЦ в данном расчете. Для ТГУ-3 все три модели турбулентности дают схожие результаты, и даже модель $k-\epsilon$, которая хотя и занижает значения скорости, но воспроизводит общую структуру течения.

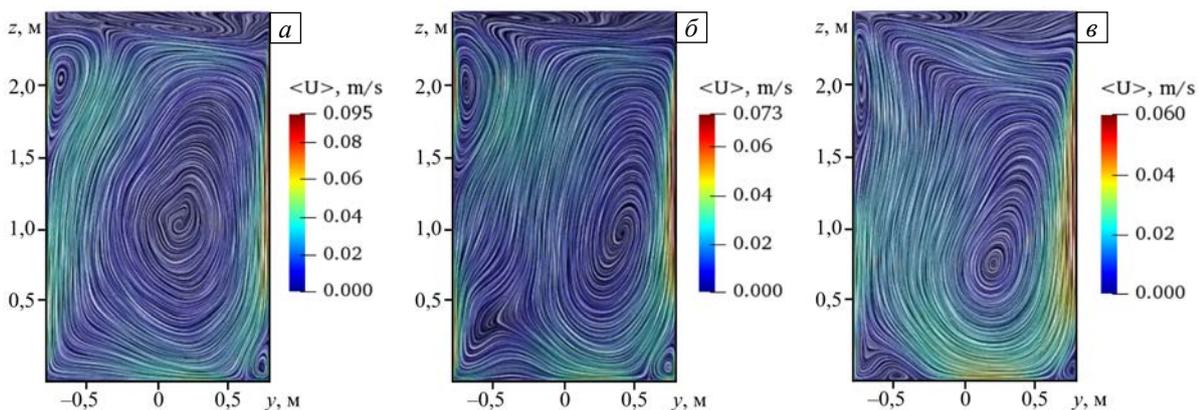


Рис. 10. Осредненные по времени поля скорости в сечении Охz для конфигурации нагрева ТГУ-3: LES (а), $k-\omega$ SST (б) и $k-\epsilon$ (в); время осреднения 2000 с

На рисунке 11 приведены примеры временных зависимостей температуры и вертикальной компоненты скорости U_z в отдельных точках реторты при последовательной смене конфигураций нагрева: ТГУ-1 \rightarrow ТГУ-2 \rightarrow ТГУ-3. Вертикальные линии разделяют режимы, для каждого из которых здесь представлена эволюция в течение 4000 с. Выполнение расчетов такой продолжительности с помощью LES было не доступно авторам, а с помощью RANS подхода удалось осуществить их на относительно грубой сетке. Результаты численных экспериментов показывают, что величины и распределения пульсаций температуры и скорости в разных точках полости существенно меняются при смене режима течения.

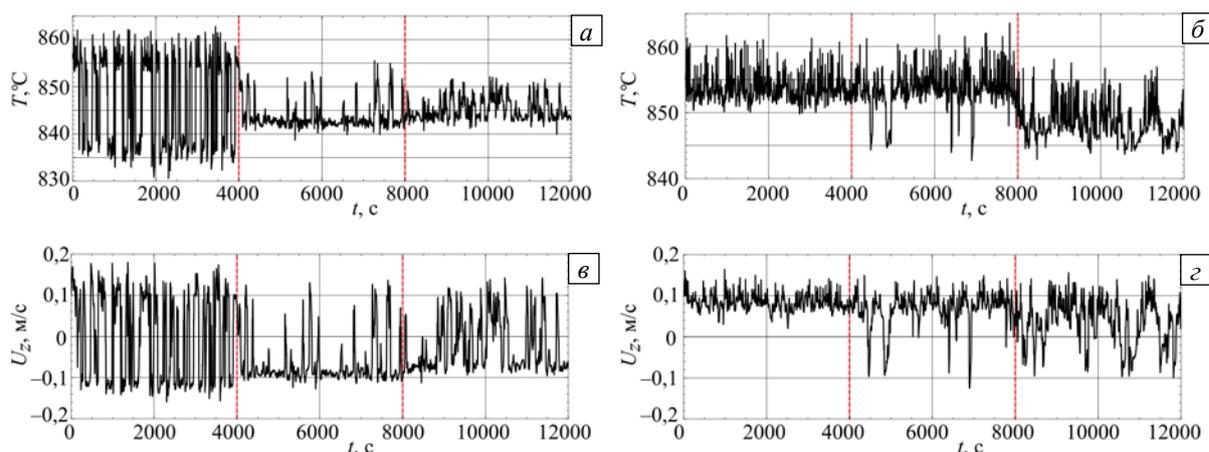


Рис. 11. Зависимости от времени температуры (*а, б*) и вертикальной компоненты скорости U_z (*в, г*) в отдельных точках полости на расстоянии 5 см от боковой стенки цилиндра для модели $k-\omega$ SST на разных высотах z , м: 1,5 м (*а, в*), 0,6 м (*б, г*) при смене конфигураций нагрева ТГУ-1, ТГУ-2, ТГУ-3.

Поскольку в настоящее время в реальном реакторе можно измерить только временную эволюцию температуры внешней поверхности реторты в нескольких точках, то лишь длительные расчеты позволят проводить сопоставление и настройку модели с учетом этих экспериментальных данных.

4. Выводы

Выполнены расчеты турбулентных конвективных течений в реакторе восстановления титана с применением подходов RANS (с моделями $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ SST) и LES (модель Смагоринского).

Продемонстрировано, что расчеты с использованием $k-\omega$ SST модели на относительно грубых сетках (0,825 млн КО) позволяют получить результаты, качественно и количественно согласующиеся с результатами LES расчетов на подробных сетках (3,7 млн КО). При этом модель $k-\varepsilon$ не во всех случаях приводит к приемлемым результатам.

RANS расчеты с моделью $k-\omega$ SST дают средние поля скорости и температуры с временем осреднения, значительно большим, чем доступно в LES расчетах. Это особенно важно, так как реальный процесс длится более двух суток.

Рассмотрено несколько различных конфигураций нагрева и охлаждения аппарата, для которых структуры и интенсивности конвективных течений существенно различаются. В зависимости от режима работы в реторте возникает либо крупномасштабная циркуляция, демонстрирующая сложную динамику (как в задаче Релея–Бенара [2, 5, 6]), либо появляются тороидальные вихри.

Показано, что разработанная математическая модель дает возможность описать динамику в течение всего процесса восстановления титана с динамическим изменением условий нагрева и охлаждения аппарата и идентифицировать одновихревые и двухвихревые крупномасштабные течения в реторте, а также переходные режимы. Это позволит оценить степень влияния конвекции на протекание реакции.

Расчеты осуществлялись на суперкомпьютере «Тритон» ИМСС УрО РАН (г. Пермь).

Литература

1. Frick P., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Pakholkov V., Pavlinov A., Rogozhkin S. Turbulent convective heat transfer in a long cylinder with liquid sodium // *Europhys. Lett.* 2015. Vol. 109. 14002. <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/109/14002>
2. Khalilov R., Kolesnichenko I., Pavlinov A., Mamykin A., Shestakov A., Frick P. Thermal convection of liquid sodium in inclined cylinders // *Phys. Rev. Fluids.* 2018. Vol. 3. 043503. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.043503>
3. Teimurazov A., Frick P. Thermal convection of liquid metal in a long inclined cylinder // *Phys. Rev. Fluids.* 2017. Vol. 2. 113501. <https://doi.org/10.1103/physrevfluids.2.113501>
4. Zvirner L., Shishkina O. Confined inclined thermal convection in low-Prandtl-number fluids // *J. Fluid Mech.* 2018. Vol. 850. P. 984-1008. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2018.477>
5. Мандрыкин С.Д., Теймуразов А.С. Турбулентная конвекция жидкого натрия в наклонном цилиндре с единичным аспектным отношением // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2018. Т. 11, № 4. С. 417-428. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.32>
6. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Benard convection // *Rev. Mod. Phys.* 2009. Vol. 81. P. 503-537. <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.81.503>
7. Rogozhkin С.А., Аксенов А.А., Жлуктов С.В., Осипов С.Л., Сазонова М.Л., Фадеев И.Д., Шенелев С.Ф., Шмелев В.В. Разработка модели турбулентного теплопереноса для жидкометаллического натриевого теплоносителя и её верификация // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2014. Т. 7, № 3. С. 306-316. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.30>

8. Belyaev I.A., Genin L.G., Listratov Ya.I., Melnikov I.A., Sviridov V.G., Sviridov E.V., Ivochkin Yu.P., Razuvanov N.G., Shpansky Yu.S. Specific features of liquid metal heat transfer in a tokamak reactor // *Magnetohydrodynamics*. 2013. Vol. 49, No. 1/2. P. 177-190.
9. Гармата В.А., Гуояницкий Б.С., Крамник В.Ю., Липкес Я.М., Серяков Г.В., Сучков А.Б., Хомяков П.П. *Металлургия титана*. М.: Metallurgiya, 1968. 643 с.
10. Гармата В.А., Петрунько А.Н., Галицкий Н.В., Олесов Ю.Г., Сандлер Р.А. *Титан*. М.: Metallurgiya, 1983. 559 с.
11. Сергеев В.В., Галицкий Н.В., Киселев В.П., Козлов В.М. *Металлургия титана*. М.: Metallurgiya, 1971. 320 с.
12. Мальшин В.М., Завадовская В.Н., Пампушко Н.А. *Металлургия титана*. М.: Metallurgiya, 1991. 208 с.
13. Халилов Р.И., Хрипченко С.Ю., Фрик П.Г., Степанов Р.А. Электромагнитные измерения уровня жидкого металла в замкнутых объемах // *Измерительная техника*. 2007. № 8. С. 41-44. (English version <https://doi.org/10.1007/s11018-007-0163-7>)
14. Krauter N., Eckert S., Gundrum T., Stefani F., Wondrak T., Frick P., Khalilov R., Teimurazov A. Inductive system for reliable magnesium level detection in a titanium reduction reactor // *Metall. and Materi. Trans. B*. 2018. Vol. 49. P. 2089-2096. <https://doi.org/10.1007/s11663-018-1291-y>
15. Тарунин Е.Л., Шихов В.М., Юрков Ю.С. Свободная конвекция в цилиндрическом сосуде при заданном тепловом потоке на верхней границе // *Гидродинамика*. Пермь, 1975. Вып. 6. С. 85-98.
16. Цаплин А.И., Нечаев В.Н. Численное моделирование неравновесных процессов тепломассопереноса в реакторе для получения пористого титана // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2013. Т. 6, № 4. С. 483-490. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.4.53>
17. Теймуразов А.С., Фрик П.Г. Численное исследование конвекции расплавленного магния в аппарате восстановления титана // *Вычисл. мех. сплош. сред*. 2015. Т. 8. № 4. С. 433-444. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2015.8.4.37>
18. Teimurazov A., Frick P., Stefani F. Thermal convection of liquid metal in the titanium reduction reactor // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2017. Vol. 208. 012041. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012041>
19. Teimurazov A., Frick P., Weber N., Stefani F. Numerical simulations of convection in the titanium reduction reactor // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. Vol. 891. 012076. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012076>
20. Khalilov R., Kolesnichenko I., Teimurazov A., Mamykin A., Frick P. Natural convection in a liquid metal locally heated from above // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2017. Vol. 208. 012044. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012044>
21. Pope S.B. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000. 805 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531>
22. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // *J. Fluid Mech.* 1970. Vol. 41. P. 453-480. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112070000691>
23. Issa R.I. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting // *J. Comput. Phys.* 1986. Vol. 62. P. 40-65. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9)
24. Chen F., Huai X., Cai J., Li X., Ruixue Meng. Investigation on the applicability of turbulent-Prandtl-number models for liquid lead-bismuth eutectic // *Nucl. Eng. Des.* 2013. Vol. 257. P. 128-133. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2013.01.005>
25. Cebeci T. Model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number // *J. Heat Tran.* 1973. Vol. 95. P. 227-234. <https://doi.org/10.1115/1.3450031>

References

1. Frick P., Khalilov R., Kolesnichenko I., Mamykin A., Pakholkov V., Pavlinov A., Rogozhkin S. Turbulent convective heat transfer in a long cylinder with liquid sodium. *Europhys. Lett.*, 2015, vol. 109, 14002. <http://dx.doi.org/10.1209/0295-5075/109/14002>
2. Khalilov R., Kolesnichenko I., Pavlinov A., Mamykin A., Shestakov A., Frick P. Thermal convection of liquid sodium in inclined cylinders. *Phys. Rev. Fluids*, 2018, vol. 3, 043503. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevFluids.3.043503>
3. Teimurazov A., Frick P. Thermal convection of liquid metal in a long inclined cylinder. *Phys. Rev. Fluids*, 2017, vol. 2, 113501. <https://doi.org/10.1103/physrevfluids.2.113501>
4. Zwirner L., Shishkina O. Confined inclined thermal convection in low-Prandtl-number fluids. *J. Fluid Mech.*, 2018, vol. 850, pp. 984-1008. <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2018.477>
5. Mandrykin S. D., Teimurazov A. S. 2018 Turbulent convection of liquid sodium in an inclined cylinder of unit aspect ratio. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 417-428. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.32>
6. Ahlers G., Grossmann S., Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Benard convection. *Rev. Mod. Phys.*, 2009, vol. 81, pp. 503-537. <http://dx.doi.org/10.1103/revmodphys.81.503>
7. Rogozhkin S.A., Aksenov A.A., Zhlukov S.V., Osipov S.L., Sazonova M.L., Fadeev I.D., Shepelev S.F., Shmelev V.V. Development and verification of a turbulent heat transport model for sodium-based liquid metal coolants. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 3, pp. 306-316. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.3.30>
8. Belyaev I.A., Genin L.G., Listratov Ya.I., Melnikov I.A., Sviridov V.G., Sviridov E.V., Ivochkin Yu.P., Razuvanov N.G., Shpansky Yu.S. Specific features of liquid metal heat transfer in a tokamak reactor. *Magnetohydrodynamics*, 2013, vol. 49, no. 1/2, pp. 177-190.
9. Garmata V.A., Guoyanitskiy B.S., Kramnik V.Yu., Lipkes Ya.M., Seryakov G.V., Suchkov A.B., Khomyakov P.P. *Metallurgiya titana* [Metallurgy of titanium]. Moscow, Metallurgiya, 1968. 643 p.
10. Garmata V.A., Petrun'ko A.N., Galitskiy N.V., Olesov Yu.G., Sandler R.A. *Titan* [Titanium]. Moscow, Metallurgiya, 1983. 559 p.
11. Sergeev V.V., Galitskiy N.V., Kiselev V.P., Kozlov V.M. *Metallurgiya titana* [Metallurgy of titanium]. Moscow, Metallurgiya, 1971. 320 p.
12. Mal'shin V.M., Zavadovskaya V.N., Pampushko N.A. *Metallurgiya titana* [Metallurgy of titanium]. Moscow, Metallurgiya, 1991. 208 p.

13. Khalilov R.I., Khripchenko S.Yu., Frick P.G., Stepanov R.A. Electromagnetic measurements of the level of a liquid metal in closed volumes. *Meas. Tech.*, 2007, vol. 50, pp. 861-866. <https://doi.org/10.1007/s11018-007-0163-7>
14. Krauter N., Eckert S., Gundrum T., Stefani F., Wondrak T., Frick P., Khalilov R., Teimurazov A. Inductive system for reliable magnesium level detection in a titanium reduction reactor. *Metall. and Materi. Trans. B*, 2018, vol. 49, pp. 2089-2096. <https://doi.org/10.1007/s11663-018-1291-y>
15. Tarunin E.L., Shikhov V.M., Yurkov Yu.S. Svobodnaya konvektsiya v tsilindricheskom sosude pri zadannom teplovom potoke na verkhney granitse [*Free convection in a cylindrical vessel for a given heat flux at the upper boundary*]. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Perm, 1975. No. 6. Pp. 85-98.
16. Tsaplin A.I., Nechaev V.N. Numerical modeling of non-equilibrium heat and mass transfer processes in a reactor for the production of porous titanium. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 483-490. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2013.6.4.53>
17. Teimurazov A.S., Frick P. G. Numerical study of molten magnesium convection in a titanium reduction apparatus. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2016, vol. 57, pp. 1264-1275. <https://doi.org/10.1134/S0021894416070129>
18. Teimurazov A., Frick P., Stefani F. Thermal convection of liquid metal in the titanium reduction reactor. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, 012041. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012041>
19. Teimurazov A., Frick P., Weber N., Stefani F. Numerical simulations of convection in the titanium reduction reactor. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 891, 012076. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/891/1/012076>
20. Khalilov R., Kolesnichenko I., Teimurazov A., Mamykin A., Frick P. Natural convection in a liquid metal locally heated from above. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2017, vol. 208, 012044. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/208/1/012044>
21. Pope S.B. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2000. 805 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511840531>
22. Deardorff J.W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 1970, vol. 41, pp. 453-480. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112070000691>
23. Issa R.I. Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 1986, vol. 62, pp. 40-65. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(86\)90099-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(86)90099-9)
24. Chen F., Huai X., Cai J., Li X., Ruixue Meng. Investigation on the applicability of turbulent-Prandtl-number models for liquid lead-bismuth eutectic. *Nucl. Eng. Des.*, 2013, vol. 257, pp. 128-133. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2013.01.005>
25. Cebeci T. Model for eddy conductivity and turbulent Prandtl number. *J. Heat Tran.*, 1973, vol. 95, pp. 227-234. <https://doi.org/10.1115/1.3450031>

Поступила в редакцию 04.09.2019; после доработки 18.11.2019; принята к опубликованию 18.11.2019

Сведения об авторах

Карасев Тимофей Олегович, асп., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, д. 29; e-mail: karasev.t@icmm.ru

Теймуразов Андрей Сергеевич, кфмн., нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, г. Пермь, ул. Академика Королёва, д. 1; e-mail: tas@icmm.ru