

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.3.28](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.28)

УДК 519.6:531.33

К РАСЧЕТУ КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВСКИПАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В.С. Суров

Южно-Уральский государственный университет (НИУ), Челябинск, Российская Федерация

В рамках ранее предложенной автором односкоростной двухтемпературной гиперболической модели вскипающей жидкости, базирующейся на законах сохранения для каждой из составляющих смесь фракций, в которой учтены силы межфракционного взаимодействия, исследуется истечение перегретой жидкости из трубы переменного сечения в квазиодномерном приближении. Жидкая фракция считается несжимаемой. В расчетах полагается, что фазовый переход происходит в условиях перегретого состояния, когда температура жидкости превосходит температуру насыщения, а интенсивность фазового превращения вода–пар пропорциональна перегреву жидкости. Проведен характеристический анализ уравнений квазиодномерного течения жидкости с фазовыми превращениями и показана их гиперболичность. Сформулированы соотношения для характеристических направлений и дифференциальные соотношения вдоль них. Получена аналитическая формула для расчета скорости звука во вскипающей жидкости. Отмечено, что скорость звука в жидкости при учете фазовых превращений оказывается несколько меньше, чем дает формула Вуда. Приведены расчетные формулы итерационного алгоритма узлового метода характеристик, включая соотношения в граничных точках. Показано, что при учете фазового превращения увеличивается концентрация пара, растет давление в области, охваченной волной разрежения, причем скорость движения смеси на выходном срезе трубы существенно возрастает. В сужающихся участках трубы наблюдается снижение объемной доли пара.

Ключевые слова: вскипающая жидкость, квазиодномерные течения, гиперболическая модель, узловой метод характеристик

CALCULATION OF QUASI-DIMENSIONAL FLOWS OF BOILING LIQUID

V.S. Surov

South Ural State University (NRU), Chelyabinsk, Russian Federation

The flow of superheated liquid from a variable-section pipe is studied within the framework of the single-speed two-temperature hyperbolic model of boiling liquid previously proposed by the author. The model is based on the conservation laws for each of mixture fractions and takes into account forces of interfractional interaction. The flow is calculated using a quasi-one-dimensional approximation; liquid fraction is considered to be incompressible. In the calculations, it was assumed that the phase transition occurs under the conditions of a superheated state, when the temperature of the liquid exceeds the saturation temperature, and the intensity of the water – vapor phase transformation is proportional to the superheating of the liquid. A characteristic analysis of the equations of a quasi-one-dimensional fluid flow with phase transformations is carried out and their hyperbolicity is demonstrated. Relations for characteristic directions and differential relations along these characteristics are written. An analytical formula is obtained for calculating the speed of sound in a boiling liquid. It is noted that the speed of sound in a liquid, when phase transitions are taken into account, turns out to be slightly less than Wood's formula gives. The calculation formulas of the iterative algorithm for the node method of characteristics, including the relations at the boundary points, are given. It is shown that taking into account the phase transformation leads to an increase in the concentration of steam, an increase in pressure in the region covered by the rarefaction wave, and the velocity of the mixture at the output section of the pipe increases significantly. In the narrowing sections of the pipe, a decrease in the volume fraction of steam is observed.

Key words: boiling liquid, quasi-dimensional flows, hyperbolic model, nodal method of characteristics

1. Введение

При описании течений вскипающей жидкости существует несколько подходов. Первый, так называемый газодинамический, базируется на дифференциальных уравнениях, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси пара и жидкости в целом (по виду эти уравнения совпадают с газодинамическими) и на уравнении для концентрации (доли) паровой фракции α_{st} , которые замыкаются уравнением состояния смеси:

$$p = p(\rho, T, \alpha_{st}),$$

где p , ρ , T — давление, плотность и температура смеси [1]. Это выражение, являющееся приближенным эмпирическим, задается, как правило, в табличном виде. При другом подходе за основу берутся законы сохранения для каждой из составляющих смесь фракций [2], которые рассматриваются совместно с более точными индивидуальными термическими и калорическими уравнениями состояния компонентов смеси. Известно, что полученная таким образом система уравнений, в отличие от уравнений первого подхода, не является гиперболической.

В представляемой работе применяется второй подход, но при этом используется разработанная автором ранее (см. [3]) гиперболическая обобщенно-равновесная (ОР) модель многокомпонентной смеси, в которую для гиперболизации уравнений смеси введены силы межфракционного взаимодействия.

По этой модели в совокупности с релаксационными аналогами законов Стокса и Фурье в [4], [5] рассчитывались течения вязких теплопроводных смесей, но без учета фазовых превращений. В [6] автором показано, что и при наличии фазовых превращений система уравнений ОР модели остается гиперболической. А это важно, поскольку при описании сред негиперболическими системами уравнений в некоторых из них наблюдаются волны, перемещающиеся с бесконечно большими скоростями [4], [5]. Кроме того, при подобных системах расчетные области могут иметь зоны, в которых задача Коши некорректна [3].

В развитие модели [3] в данной работе автор ставит целью изучение квазиодномерного течения парожидкостной смеси. Подобные течения вскипающей жидкости численно исследовались в [7]–[9]. При этом под квазиодномерным движением понимается течение жидкости в трубе с мало меняющейся площадью поперечного сечения и незначительными различиями в состоянии движения в его отдельных точках. Для упрощения вычислений далее жидкость полагается несжимаемой. Поскольку в работе используется гиперболическая модель среды, то это дает возможность при интегрировании системы гиперболических уравнений привлечь хорошо зарекомендовавшие себя в этом случае численные методы. При численном решении уравнений модели смеси применяется узловый метод характеристик (УМХ) [10].

2. Модель вскипающей жидкости

Рассмотрим квазиодномерное течение парожидкостной смеси, описываемое системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 u F}{\partial x} &= J, & \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 u}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \alpha_{st} (p + \rho_{st}^0 u^2) F}{\partial x} &= f + Ju, \\ \frac{\partial \alpha_{st} \rho_{st}^0 e_{st}}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \alpha_{st} (\rho_{st}^0 e_{st} + p) u F}{\partial x} &= fu + J e_s, & \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 u F}{\partial x} &= -J, \\ \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 u}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \alpha_s (p + \rho_s^0 u^2) F}{\partial x} &= -f - Ju, & \frac{\partial \alpha_s \rho_s^0 e_s}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \alpha_s (\rho_s^0 e_s + p) u F}{\partial x} &= -fu - J e_s, \end{aligned} \quad (1)$$

которые выражают законы сохранения массы, импульса и энергии для составляющих смесь фракций. Здесь: t — время; u — скорость; F — площадь поперечного сечения трубы; J — интенсивность парообразования на единицу объема смеси; f — плотность силы межфракционного взаимодействия [3], которая заранее неизвестна и определяется в процессе интегрирования системы (1); α_s — объемная доля дисперсионной среды ($\alpha_{st} + \alpha_s = 1$, где $\varepsilon_{st} = \varepsilon_{st}(p, \rho_{st}^0)$ и $\varepsilon_s = c_{vs} \theta_s + \varepsilon_0$ (при этом $\varepsilon_0 = \text{const}$) — удельные внутренние энергии пара и несжимаемой составляющей — жидкости); θ_s и c_{vs} — температура дисперсной фракции и ее теплоемкость; $e_k = \varepsilon_k + u^2/2$ — удельная полная энергия k -й составляющей смеси с приведенной плотностью $\rho_k = \alpha_k \rho_k^0$.

После суммирования соответствующих законов сохранения по составляющим смесь фракциям получим законы сохранения массы, импульса и энергии для смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial (p + \rho u^2) F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{1}{F} \frac{\partial (\rho e + p) u F}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

где $\rho = \alpha_{st} \rho_{st}^0 + \alpha_s \rho_s^0$ — плотность смеси, $\varepsilon = \frac{1}{\rho} (\alpha_{st} \rho_{st}^0 \varepsilon_{st} + \alpha_s \rho_s^0 \varepsilon_s)$ и $e = \varepsilon + \frac{1}{2} u^2$ — удельные внутренняя и полная энергии смеси. Уравнения (2) в квазилинейной форме имеют вид:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \frac{d(\ln F)}{dx} = 0, \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{d(\ln F)}{dx} = 0, \quad \frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$.

Соответствующие законы сохранения для пара и жидкости будут следующими:

$$\frac{D\rho_{st}}{Dt} + \rho_{st} \frac{\partial u}{\partial x} + u \rho_{st} \frac{d(\ln F)}{dx} = J, \quad \rho_{st} \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \alpha_{st} p}{\partial x} + \alpha_{st} p \frac{d(\ln F)}{dx} = f,$$

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon_{st}}{Dt} + \frac{\alpha_{st} p}{\rho_{st}} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{J}{\rho_{st}} (\varepsilon_s - \varepsilon_{st}), & \frac{D\alpha_s}{Dt} &= -\frac{J}{\rho_s^0} + \frac{\alpha_s}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \\ \rho_s \frac{Du}{Dt} + \frac{\partial \alpha_s p}{\partial x} + \alpha_s p \frac{d(\ln F)}{dx} &= -f, & \frac{D\varepsilon_s}{Dt} + \frac{p}{\rho_s^0} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Учитывая равенства

$$\frac{D\varepsilon_{st}}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \frac{D\rho_{st}^0}{Dt}, \quad \frac{D\alpha_{st}}{Dt} = \frac{J}{\rho_s^0} - \frac{\alpha_s}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}, \quad \frac{D\rho_{st}^0}{Dt} = \frac{1}{\alpha_{st}} \left(J + \frac{\alpha_{st} \rho_{st}^0}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} - \rho_{st}^0 \frac{D\alpha_{st}}{Dt} \right),$$

закон сохранения энергии для смеси в целом перепишем как

$$\frac{Dp}{Dt} - c^2 \frac{D\rho}{Dt} = \Pi,$$

где

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{\left(p - \frac{(\rho_{st}^0)^2}{\alpha_{st}} \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} \right) \left(\rho \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right)^{-1}}, \\ \Pi &= J \left[\varepsilon_s - \varepsilon_{st} - \rho_{st}^0 \left(1 - \frac{\rho_{st}^0}{\rho_s^0} \right) \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial \rho_{st}^0} + \alpha_{st} u p \frac{d(\ln F)}{dx} \right] \left(\alpha_{st} \rho_{st}^0 \frac{\partial \varepsilon_{st}}{\partial p} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Заметим, что в (3) выражение для скорости звука c в квазиодномерном течении выглядит так же, как и в одномерном случае [6]. Таким образом, система уравнений квазиодномерного течения вскипающей жидкости примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \rho \frac{d(\ln F)}{dx} &= 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{d(\ln F)}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho c^2 \frac{\partial u}{\partial x} &= \Pi - \rho u c^2 \frac{d(\ln F)}{dx}, & \frac{\partial \rho_{st}^0}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_{st}^0}{\partial x} + G_{st} \frac{\partial u}{\partial x} &= I_{st}, \\ \frac{\partial \alpha_{st}}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha_{st}}{\partial x} + K_{st} \frac{\partial u}{\partial x} &= L_{st}, & \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + u \frac{\partial \theta_s}{\partial x} + Y_s \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$G_{st} = \frac{\rho_{st}^0}{\alpha_{st}}, \quad I_{st} = \frac{J}{\alpha_{st}} \left(1 - \frac{\rho_{st}^0}{\rho_s^0} \right) - \frac{u \rho_{st}^0}{\alpha_{st}} \frac{d(\ln F)}{dx}, \quad K_{st} = \alpha_{st} - 1, \quad L_{st} = \frac{J}{\rho_s^0} + (1 - \alpha_{st}) u \frac{d(\ln F)}{dx}, \quad Y_s = \frac{p}{c_{vs} \rho_s^0}.$$

Характеристическое уравнение системы (4), получающееся из выражения

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - u & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho c^2 & \lambda - u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{st} & 0 & \lambda - u & 0 & 0 \\ 0 & -K_{st} & 0 & 0 & \lambda - u & 0 \\ 0 & -Y_s & 0 & 0 & 0 & \lambda - u \end{vmatrix} = 0,$$

где $\lambda = dx/dt$, имеет только действительные корни: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = u$. Характеристические соотношения вдоль характеристических направлений $dx/dt = u \pm c$ системы (4) могут быть найдены из уравнения:

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 & 0 & 0 & -u \frac{dp}{dt} - \rho \frac{du}{dt} \\ 0 & \lambda - u & -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & -u \frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} \\ 0 & -\rho c^2 & \lambda - u & 0 & 0 & \Pi - u \frac{dp}{dt} - \rho c^2 \frac{du}{dt} \\ 0 & -G_{st} & 0 & \lambda - u & 0 & I_{st} - u \frac{d\rho_{st}^0}{dt} - G_{st} \frac{du}{dt} \\ 0 & -K_{st} & 0 & 0 & \lambda - u & L_{st} - u \frac{d\alpha_{st}}{dt} - K_{st} \frac{du}{dt} \\ 0 & -Y_s & 0 & 0 & 0 & -u \frac{d\theta_s}{dt} - Y_s \frac{du}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим соотношения

$$(u \pm c)(dp \pm \rho c du) = \Pi dt, \tag{5}$$

справедливые на характеристических направлениях $\lambda = u \pm c$. Вдоль траекторной характеристики $\lambda = u$ выполняются равенства:

$$\begin{aligned} dp - c^2 d\rho &= \Pi dt, & d\rho_{st}^0 - \frac{G_{st}}{\rho} d\rho &= \left(I_{st} + u G_{st} \frac{d(\ln F)}{dx} \right) dt, \\ d\alpha_{st} - \frac{K_{st}}{\rho} d\rho &= \left(L_{st} + u K_{st} \frac{d(\ln F)}{dx} \right) dt, & d\theta_s - \frac{Y_s}{\rho} d\rho &= u Y_s \frac{d(\ln F)}{dx} dt, \end{aligned} \tag{6}$$

которые непосредственно следуют из системы (4).

В качестве калорического и термического уравнений состояния водяного пара возьмем следующие:

$$\varepsilon_{st} = \frac{(p + \gamma_{st} p_{st})(1 - \rho_{st}^0 b_{st})}{(\gamma_{st} - 1)\rho_{st}^0} + q_{st}, \quad \theta_{st} = \frac{(p + p_{st})(1 - \rho_{st}^0 b_{st})}{(\gamma_{st} - 1)\rho_{st}^0 c_{vst}}, \tag{7}$$

где $\gamma_{st} = 1,47$, $p_{st} = 0$, $q_{st} = 2,077616 \cdot 10^6$ Дж/кг, $c_{vst} = 0,955 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $b_{st} = 0$ [11], а также упрощенные соотношения из [12]

$$\varepsilon_{st} = c_{vst} \theta_{st} + \varepsilon_{st}^{ch}, \quad p = R_{st} \rho_{st}^0 \theta_{st}, \tag{8}$$

применяемые при давлениях менее 10 атм. Здесь $c_{vst} = 1,43 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $R_{st} = 461,7$ Дж/(кг·К), $\varepsilon_{st}^{ch} = 1,93 \cdot 10^6$ Дж/кг. Выражения для скорости звука из (3) в случае использования (7) или (8), соответственно, принимают вид:

$$c = \sqrt{\frac{p(\gamma_{st} + \alpha_s/\alpha_{st})}{\rho}}, \quad c_* = \sqrt{\frac{p(R_{st}/c_{vst} + 1/\alpha_{st})}{\rho}}.$$

На рисунке 1 представлены зависимости от концентрации α_{st} скоростей звука c , c_* для пароводяной смеси ($\rho_s^0 = 1000$ кг/м³) при нормальных условиях, а также кривая $c_w(\alpha_{st})$, рассчитанная по формуле Вуда [13]:

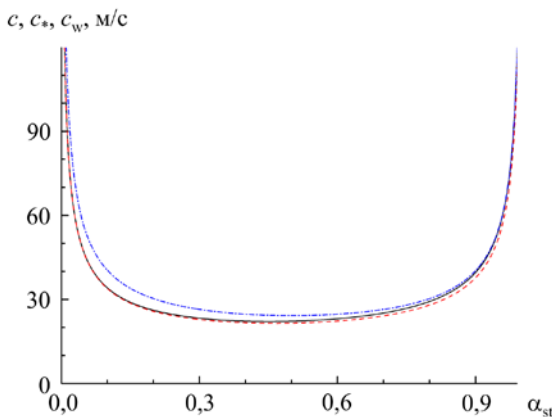


Рис. 1. Зависимости скоростей звука от объемной доли пара α_{st} : c – сплошная, c_* – штриховая, c_w – штрихпунктирная линии

$$c_w = c_{st} \sqrt{\rho_{st} / (\alpha_{st} \rho)},$$

где $c_{st} = \sqrt{\gamma_{st} (p + p_{st}) / (\rho_{st}^0 (1 - b_{st} \rho_{st}^0))}$. Из представленных данных видно, что скорости звука в наполняющей трубу жидкости при учете фазовых превращений, рассчитанные по соотношениям (7) и (8), оказываются несколько меньше, чем дает формула Вуда.

3. Методика численного счета и результаты вычислений

Для численного интегрирования уравнений (4) применялся УМХ. При его использовании достаточно определить значения искомых величин в узле (x_k, t_{n+1}) по их известным значениям в узлах, находящихся на предыдущем — n -м, временном слое. Итерационная процедура решения, согласно УМХ, была следующей. Предполагалось, что на «нулевой» итерации ($v = 0$) значения искомых переменных в точке x_k, t_{n+1} совпадают с их значениями в точке (x_k, t_n) . В этом случае характеристические направления $dx/dt = u$, $dx/dt = u \pm c$ аппроксимируются выражениями:

$$x_k - x_C^v = u^v \Delta t, \quad x_k - x_L^v = (u^v + c^v) \Delta t, \quad x_k - x_R^v = (u^v - c^v) \Delta t,$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Точки пересечения полученных характеристик с прямой $t = t_n$ (Рис. 2) определялись с помощью соотношений:

$$x_L^v = x_k - (u^v + c^v) \Delta t, \quad x_C^v = x_k - u^v \Delta t, \quad x_R^v = x_k - (u^v - c^v) \Delta t. \quad (9)$$

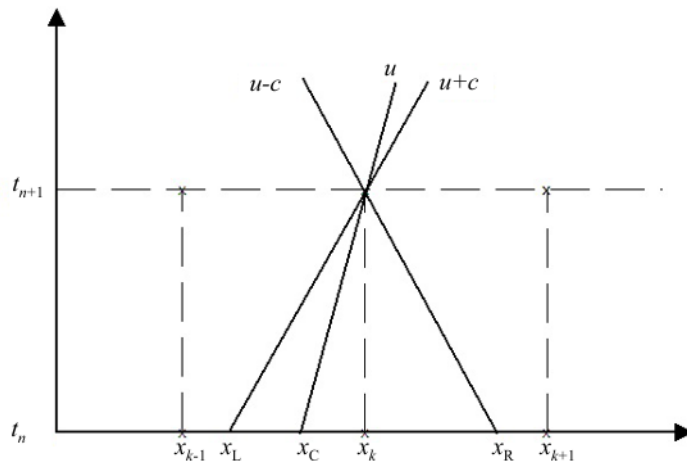


Рис. 2. Расчетная схема УМХ для регулярных узлов

Параметры $(\rho, u, p, \rho_{st}^0, \alpha_{st}, \theta_s)^{(0)}$ в точках $(x_L, x_C, x_R)^{(0)}$ находились интерполяцией по их известным значениям в узлах x_{k+1}, x_k, x_{k-1} . Соотношения (5), (6) записывались в конечно-разностном виде:

$$\begin{aligned} p^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - p^v(x_L, t_n) + (\rho c)_L^v (u^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - u^v(x_L, t_n)) &= \left(\frac{\Pi}{u+c} \right)_L^v \Delta t, \\ p^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - p^v(x_C, t_n) &= (c^2)_C^v [\rho^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \Pi^v(x_C, t_n) \Delta t \\ (\rho_{st}^0)^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - [\rho_{st}^0(x_C, t_n)]^v &= \left(\frac{G_{st}}{\rho} \right)_C^v [\rho^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \left[I_{st} + \left(u G_{st} \frac{d(\ln F)}{dt} \right) \right]_C^v \Delta t, \\ \alpha_{st}^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - \alpha_{st}^v(x_C, t_n) &= \left(\frac{K_{st}}{\rho} \right)_C^v [\rho^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \left[L_{st} + \left(u K_{st} \frac{d(\ln F)}{dt} \right) \right]_C^v \Delta t, \\ \theta_s^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - \theta_s^v(x_C, t_n) &= \left(\frac{Y_s}{\rho} \right)_C^v [\rho^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \left(u Y_s \frac{d(\ln F)}{dt} \right)_C^v \Delta t, \end{aligned} \quad (10)$$

$$p^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - p^v(x_R, t_n) - (\rho c)_R^v (u^{v+1}(x_k, t_{n+1}) - u^v(x_R, t_n)) = \left(\frac{\Pi}{u - c} \right)_R^v \Delta t.$$

Решалась система (10) относительно переменных $(\rho, u, p, \rho_{st}^0, \alpha_{st}, \theta_s)^{(1)}$ при $v=0$, находились уточненные значения искомых функций в точке (x_k, t_{n+1}) . Затем по этим данным из выражений (9) вычислялись новые координаты $(x_L, x_C, x_R)^{(1)}$, которые использовались для определения $(\rho, u, p, \rho_{st}^0, \alpha_{st}, \theta_s)^{(2)}$ согласно (10), где полагалось, что $v=1$. Итерационный процесс продолжается вплоть до достижения сходимости.

При постановке граничных условий также применялся характеристический подход. Так, если на правой границе известна зависимость давления от времени $P(x_K, t)$, то остальные переменные в этой граничной точке x_K устанавливались из соотношений:

$$\begin{aligned} P(x_K, t_{n+1}) - p^v(x_L, t_n) + (\rho c)_L^v (u^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - u^v(x_L, t_n)) &= \left(\frac{\Pi}{u + c} \right)_L^v \Delta t, \\ P(x_K, t_{n+1}) - p^v(x_C, t_n) &= (c^2)_C^v [\rho^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \Pi_C^v \Delta t, \\ (\rho_{st}^0)^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - (\rho_{st}^0)_C^v &= \left(\frac{G_{st}}{\rho} \right)_C^v [\rho^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - (\rho^v)_C^v] + \left[I_{st} + \left(u G_{st} \frac{d(\ln F)}{dt} \right) \right]_C^v \Delta t, \\ \alpha_{st}^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - \alpha_{st}^v(x_C, t_n) &= \left(\frac{K_{st}}{\rho} \right)_C^v [\rho^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \left[L_{st} + \left(u K_{st} \frac{d(\ln F)}{dt} \right) \right]_C^v \Delta t, \\ \theta_s^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - \theta_s^v(x_C, t_n) &= \left(\frac{Y_s}{\rho} \right)_C^v [\rho^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - \rho^v(x_C, t_n)] + \left(u Y_s \frac{d(\ln F)}{dt} \right)_C^v \Delta t, \\ P(x_K, t_{n+1}) - p^v(x_R, t_n) - (\rho c)_R^v (u^{v+1}(x_K, t_{n+1}) - u^v(x_R, t_n)) &= \left(\frac{\Pi}{u - c} \right)_R^v \Delta t. \end{aligned} \quad (11)$$

Для иллюстрации работы описанного выше численного метода рассмотрена задача истечения перегретой жидкости из круглой трубы переменного радиуса. До значения продольной координаты 250 м труба имела постоянный радиус $r=0,1$ м. За этой отметкой радиус трубы линейно увеличивался до значения $r=0,15$ м на правой границе трубопровода с координатой 300 м. На момент времени $t=0$ парожидкостная смесь в трубе была однородна, неподвижна и имела параметры: $p_0=0,5$ МПа, $u_0=0$, $\alpha_{st0}=0,05$, $\theta_{s0}=427$ К; плотность жидкой составляющей равнялась $\rho_s^0=1000$ кг/м³; $\epsilon_0=1,413 \times 10^6$ Дж/кг [10]. Температура насыщения определялась из выражения

$$\theta_N(p) = \theta_{..} - \frac{\theta_{..}}{\ln(p/p_{..})},$$

где $p_{..}=20,2 \cdot 10^9$ Па, $\theta_{..}=4200$ К, $\theta_{..}=31$ К. Интенсивность фазового перехода вода–пар рассчитывалась согласно формуле: $J = \alpha_s \beta (\theta_s - \theta_N(p))$. В расчетах полагалось, что фазовый переход в процессе кипения происходит в условиях перегретого состояния, когда температура жидкости превышает температуру насыщения: $\theta_s - \theta_N(p) > \Delta\theta$, где $\Delta\theta$ — перегрев жидкости. На правом срезе трубы давление полагалось неизменным и равным 0,1 МПа. Остальные значения параметров смеси на этой границе рассчитывались по соотношениям (11).

На рисунке 3 представлены данные численных расчетов течения, полученные к моменту времени $t=2,75$ с как без учета парообразования (то есть при $\beta=0$), так и при его наличии ($\beta=0,005$ и $0,01$). Расчеты выполнены на сетке с 3000 узлов. Как видно из представленных данных, парообразование происходит по мере продвижения волны разгрузки, где температура жидкости превышает температуру насыщения (Рис. 3а). Наличие фазового превращения приводит к увеличению концентрации пара, росту давления в области, охваченной волной разрежения. При этом скорость движения смеси на правом срезе трубы может существенно увеличиться (в зависимости от выбранного значения коэффициента β).

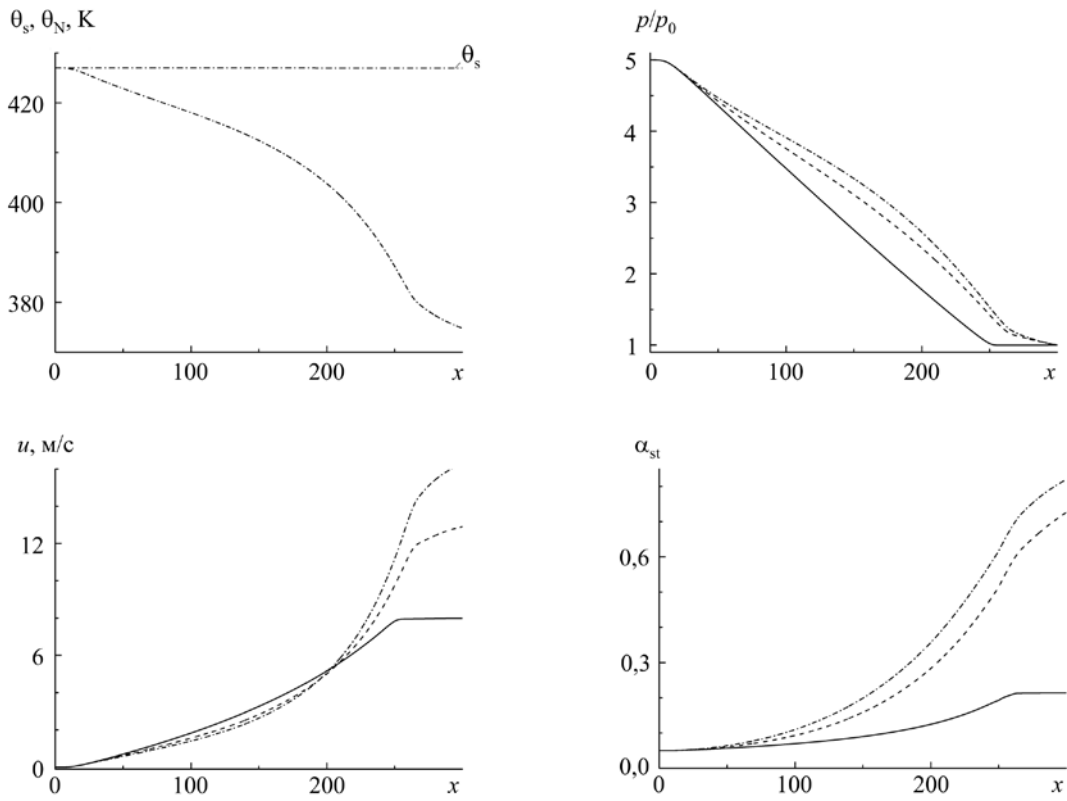


Рис. 3. Зависимости параметров смеси с расширяющимся участком трубы к моменту времени $t = 2,75$ с; сплошные кривые – без учета фазового превращения, штриховые и штрихпунктирные – при его наличии, соответственно, для $\beta = 0,005$ и $0,01$

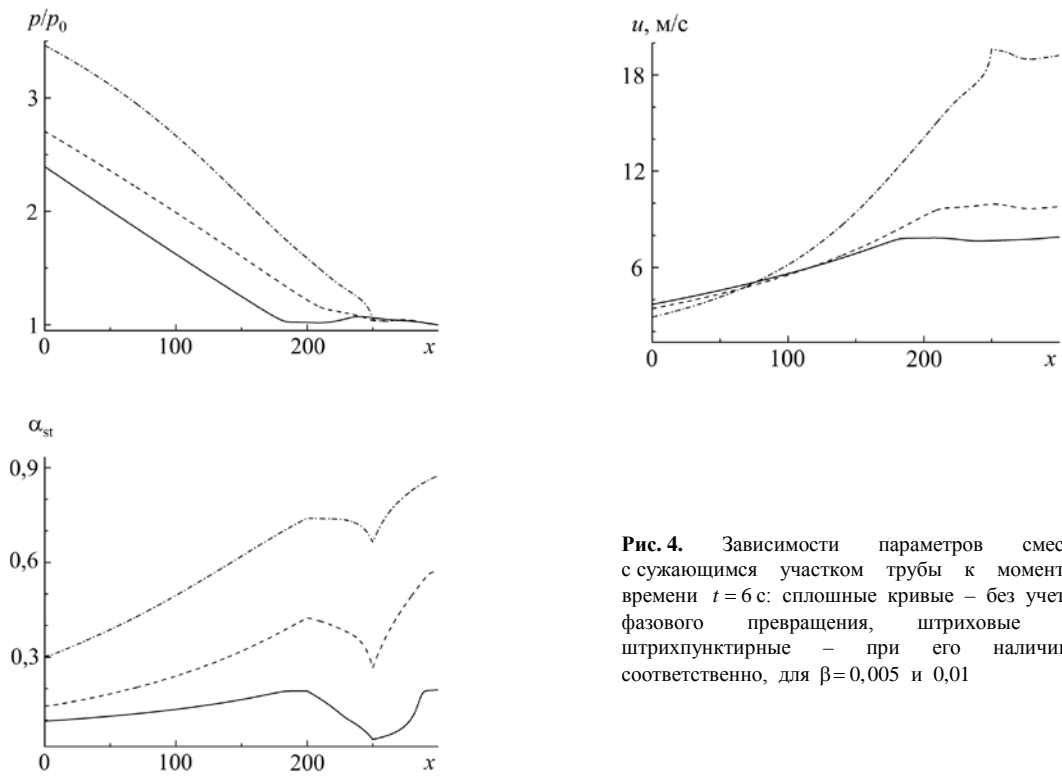


Рис. 4. Зависимости параметров смеси с сужающимся участком трубы к моменту времени $t = 6$ с: сплошные кривые – без учета фазового превращения, штриховые и штрихпунктирные – при его наличии, соответственно, для $\beta = 0,005$ и $0,01$

Отметим, что температура жидкой фракции θ_s в рассматриваемом временном интервале практически не меняется, поскольку не учитывается межфракционный теплообмен.

Также были проведены расчеты течения перегретой жидкости в трубе с сужающимся профилем. Радиус трубы до координаты 200 м полагался постоянным и равным $r = 0,1$ м. На участке до 250 м радиус трубы равномерно уменьшался до $r = 0,01$ м и затем вновь считался неизменным. Параметры смеси на момент времени $t = 0$ брались теми же, что и в предыдущем примере, то есть $p_0 = 0,5$ МПа, $u_0 = 0$. На левом срезе трубы ставилось «мягкое» граничное условие, моделирующие свободное течение жидкости через эту границу. На правом срезе давление полагалось неизменным и равным 0,1 МПа. Остальные значения параметров смеси на этой границе определялись, как и ранее, из соотношений (11).

На рисунке 4 приведены результаты расчетов, полученные к моменту времени $t = 6$ с как без парообразования ($\beta = 0$), так и при его наличии ($\beta = 0,005$ и $0,01$). Влияние сужающегося участка трубы характеризуется снижением концентрации паровой составляющей смеси на этом отрезке трубопровода (см. Рис. 4в).

4. Заключение

Представлена модель вскипающей жидкости, базирующаяся на обобщенно-равновесной модели смеси, в которой учтен фазовый переход из жидкой фракции в паровую. Показана гиперболичность уравнений модели вскипающей жидкости. Получено аналитическое выражение для скорости перемещения малых возмущений во вскипающей жидкости. Отмечено, что скорость звука в жидкости при учете фазовых превращений оказывается несколько меньше, чем дает формула Вуда. Описан метод интегрирования уравнений модели, основанный на методе характеристик, с использованием которого выполнены расчеты течения вскипающей жидкости в трубе переменного сечения в рамках квазиодномерного приближения. Показано, что учет фазового превращения приводит к увеличению концентрации пара, росту давления в области, охваченной волной разрежения, причем скорость движения смеси на выходном срезе трубы существенно возрастает. В сужающихся участках трубы наблюдается снижение объемной доли пара.

Литература

1. Алексеев М.В., Лежнин С.И., Прибатурин Н.А., Сорокин А.Л. Генерация ударно-волновых и вихревых структур при истечении струи вскипающей воды // Т и А. 2014. Т. 21, № 6. С. 795-798. (English version <https://doi.org/10.1134/S0869864314060122>)
2. Болотнова Р.Х., Бузина В.А. Пространственное моделирование нестационарной стадии истечения вскипающей жидкости из камер высокого давления // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 343-352. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.33>
3. Сузов В.С. Односкоростная модель гетерогенной среды с гиперболическим адиабатическим ядром // ЖВММФ. 2008. Т. 48, № 6. С. 1111-1125. (English version <https://doi.org/10.1134/S0965542508060146>)
4. Сузов В.С. Гиперболическая модель односкоростной теплопроводной смеси с учетом межфракционного теплообмена // ТБТ. 2018. Т. 56, № 6. С. 975-985. <https://doi.org/10.31857/s004036440003570-1>
5. Сузов В.С. Гиперболическая модель односкоростной вязкой теплопроводной среды // ИФЖ. 2019. Т. 92, № 1. С. 202-214. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-019-01922-w>)
6. Сузов В.С. Гиперболическая модель вскипающей жидкости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2019. Т. 12, № 2. С. 185-191. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.16>
7. Feburie V., Giot M., Granger S., Seynhaeve J.M. A model for choked flow through cracks with inlet subcooling // Int. J. Multiphase Flow. 1993. Vol. 19. P. 541-562. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(93\)90087-B](https://doi.org/10.1016/0301-9322(93)90087-B)
8. Downar-Zapolski P., Bilicky Z., Bolle L., Franco J. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow // Int. J. Multiphase Flow. 1996. Vol. 22. P. 473-483. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(95\)00078-x](https://doi.org/10.1016/0301-9322(95)00078-x)
9. Pinhasi G.A., Ullmann A., Dayan A. 1D plane numerical model for boiling liquid expanding vapor explosion (BLEVE) // Int. J. Heat Mass Tran. 2007. Vol. 50. P. 4780-4795. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.03.016>
10. Сузов В.С. Об одном варианте метода характеристик для расчета течений односкоростной многокомпонентной смеси // ИФЖ. 2010. Т. 83, № 2. С. 345-350. (English version <https://doi.org/10.1007/s10891-010-0353-z>)
11. Saurel R., Boivin P., Le Métayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows // Comput. Fluid. 2016. Vol. 128. P. 53-64. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.01.004>
12. Нуматулин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Упрощенная форма // ТБТ. 2011. Т. 49, № 2. С. 310-313. (English version <https://doi.org/10.1134/s0018151x11020106>)
13. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения. М: Мир, 1972. 436 с.

References

1. Alekseev M.V., Lezhnin S.I., Pribaturin N.A., Sorokin A.L. Generation of shockwave and vortex structures at the outflow of a boiling water jet. *T and A*, 2014, vol. 21, pp. 763-766. <https://doi.org/10.1134/S0869864314060122>
2. Bolotnova R.Kh., Buzina V.A. Spatial modeling of the nonstationary processes of boiling liquid outflows from high pressure vessels. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 343-352. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.33>

3. Surov V.S. One-velocity model of a heterogeneous medium with a hyperbolic adiabatic kernel. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008. vol. 48, pp. 1048-1062. <https://doi.org/10.1134/S0965542508060146>
4. Surov V.S. Hyperbolic model of a single-speed, heat-conductive mixture with interfractional heat transfer. *High Temp.*, 2018, vol. 56, pp. 890-899. <https://doi.org/10.1134/s0018151x1806024x>
5. Surov V.S. Hyperbolic model of a one-velocity viscous heat-conducting medium. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2019, vol. 92, pp. 196-207. <https://doi.org/10.1007/s10891-019-01922-w>
6. Surov V.S. A hyperbolic model of boiling liquid. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2019, vol. 12, no. 2, pp. 185-191. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.16>
7. Feburie V., Giot M., Granger S., Seynhaeve J.M. A model for choked flow through cracks with inlet subcooling. *Int. J. Multiphase Flow*, 1993, vol. 19, pp. 541-562. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(93\)90087-B](https://doi.org/10.1016/0301-9322(93)90087-B)
8. Downar-Zapolski P., Bilicky Z., Bolle L., Franco J. The non-equilibrium relaxation model for one-dimensional flashing liquid flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 1996, vol. 22, pp. 473-483. [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(95\)00078-x](https://doi.org/10.1016/0301-9322(95)00078-x)
9. Pinhasi G.A., Ullmann A., Dayan A. 1D plane numerical model for boiling liquid expanding vapor explosion (BLEVE). *Int. J. Heat Mass Tran.*, 2007, vol. 50, pp. 4780-4795. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.03.016>
10. Surov V.S. On a variant of the method of characteristics for calculating one-velocity flows of a multicomponent mixture. *J. Eng. Phys. Thermophy.*, 2010, vol. 83, pp. 366-372. <https://doi.org/10.1007/s10891-010-0353-z>
11. Saurel R., Boivin P., Le Métayer O. A general formulation for cavitating, boiling and evaporating flows. *Comput. Fluid.*, 2016, vol. 128, pp. 53-64. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.01.004>
12. Nigmatulin R.I., Bolotnova R.Kh. Wide-range equation of state of water and steam: Simplified form. *High Temp.*, 2011, vol. 49, pp. 303-306. <https://doi.org/10.1134/s0018151x11020106>
13. Wallis G.B. One-dimensional two-phase flow. McGraw-Hill Book Company, 1969. 408 p.

Поступила в редакцию 08.07.2019; после доработки 27.09.2019; принята к опубликованию 27.09.2019