

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.3.27](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.27)

УДК 532.64

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАПОЛНЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ОБЛАСТИ В КАПИЛЛЯРНОМ КОАКСИАЛЬНОМ ЗАЗОРЕ

К.А. Чехонин, В.Д. Власенко

*Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск, Российская Федерация*

Предложена вариационная формулировка краевой задачи движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и изменяющимися динамическими краевыми углами. Математическое представление процесса состоит из уравнений движения, непрерывности и естественных граничных условий на свободной поверхности. Традиционная особенность математической модели на линиях трехфазного контакта (ЛТФК) устраняется с помощью условия скольжения. Краевой угол на ЛТФК включается в вариационную формулировку задачи путем замены функции кривизны свободной границы оператором Лапласа–Бельтрами и использованием интегрирования по частям. Для описания динамических условий на ЛТФК, связывающих скорость движения этих линий и динамические краевые углы на твердых стенках цилиндров, применяется эмпирическое соотношение Джианга. Численное решение задачи основано на методе смешанных конечных элементов с аппроксимацией основных переменных задачи (вектора скорости и давления), удовлетворяющей условию их совместности (ЛВВ-условию). Кроме этого, для снижения осцилляций давления в окрестности ЛТФК взяты сингулярный конечный элемент и разрывная аппроксимация для давления. Численная реализация кинематического условия движения свободной поверхности производится по схеме предиктор–корректор. Проведены тестирование алгоритма на задачах, имеющих аналитические решения, и численные исследования кинематики потока и поведения свободной поверхности при заполнении коаксиального зазора в терминах определяющих параметров, входящих в числа Рейнольдса –  $Re$  (в диапазоне его изменения от 0 до 5), Стокса –  $W$ , (в диапазоне от 0 до 300) и капиллярного числа –  $Ca$ , (в диапазоне от 0,0001 до 10). Показано связь основных параметров задачи и динамических условий на линиях трехфазного контакта с эволюцией и максимальным прогибом свободной границы. При медленных условиях заполнения наибольшее влияние на его кинематические характеристики оказывают гравитационные и капиллярные силы. При значениях капиллярных чисел  $Ca < 0,1$  в эволюции свободной поверхности начинают доминировать капиллярные силы. Увеличение расхода жидкости ( $Re > 1$ ) приводит к значительному росту прогиба свободной поверхности.

*Ключевые слова:* коаксиальный капилляр, свободная поверхность, динамический краевой угол, метод конечных элементов, линия трехфазного контакта

## MODELING OF CAPILLARY COAXIAL GAP FILLING WITH VISCOUS LIQUID

K.A. Chekhonin and V.D. Vlasenko

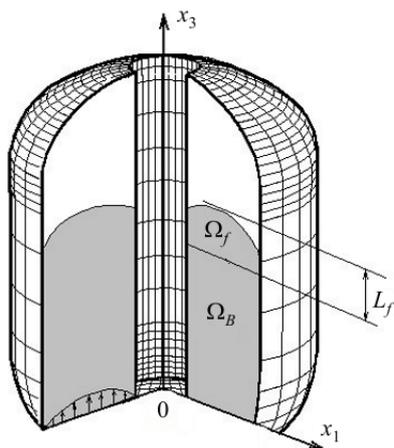
*Computing Center FEB RAS, Khabarovsk, Russian Federation*

A variational formulation of the boundary value problem on the motion of a viscous incompressible fluid with a free surface and changing dynamic boundary angles is proposed. The mathematical description of the process is based on the equations of motion, continuity and natural boundary conditions on the free surface. The traditional feature of the mathematical model on the three-phase contact lines (LTPC) is eliminated by the slip condition. The boundary angle on the LTPC is included in the variational formulation of the problem by replacing the curvature of the free boundary by the Laplace - Beltrami operator and using integration in parts. To describe the dynamic conditions on the LTPC, linking the speed of the LTPC and the dynamic edge angles on the solid walls of the cylinders, the empirical Jiang ratio is used. The numerical solution of the problem is based on the mixed finite element method with approximation of the main variables of the problem (velocity and pressure vector) satisfying the compatibility condition (LBB – condition). In addition, we use a singular finite element and a discontinuous approximation for the pressure to reduce the pressure oscillations in the vicinity of the LTPC. The numerical implementation of the kinematic condition of the free surface motion is performed according to the predictor-corrector scheme. The algorithm is tested on the problems with an analytical solution. Numerical studies of the flow kinematics and the free surface behavior when filling the coaxial gap in terms of the determining parameters of the Reynolds numbers ( $Re$ ) in the range from 0 to 5, Stokes ( $W$ ) in the range from 0 to 300 and capillary number ( $Ca$ ) in the range from 0.0001 to 10 are carried out. The influence of the main parameters of the problem and dynamic conditions on LTPC on the evolution and maximum deflection of the free boundary is shown. For slow filling conditions, gravitational and capillary forces have the greatest influence on the kinematic characteristics of the filling. In this case, the dominant influence on the evolution of the free surface of the capillary forces begins with the values of the capillary numbers less than  $CA < 0,1$ . Increasing the flow rate ( $Re > 1$ ) leads to a significant increase in the deflection of the free surface.

*Key words:* coaxial capillary, free surface, dynamic edge angle, finite element method, three-phase contact line

### 1. Введение

Фонтанирующее движение вязкой жидкости («фонтанный эффект» Роуза [1]) часто встречается в природе и различных технологических процессах, например, в нефтедобыче или при заполнении емкостей в процессе формования изделий из полимерных материалов методом литья под давлением. Течение жидкости такого типа характеризуется наличием свободной поверхности и движущихся вдоль твердых стенок линий трехфазного контакта (ЛТФК) газ–жидкость–твердое тело [2–5]. Положение ЛТФК при заполнении заданной области заранее неизвестно и является частью решения задачи.



**Рис. 1.** Область движения жидкости со свободной поверхностью:  $\Omega_B$  – основной поток;  $\Omega_f$  – область фонтанного потока с характерным размером  $L_f$

соображений, считается, что течение в кольцевом зазоре имеет «промежуточную геометрию» между течениями в трубе и в плоском канале. Следует отметить, что течение жидкости со свободной поверхностью в кольцевом зазоре даже при симметрии (отсутствии эксцентриситета осей цилиндров) обладает своими кинематическими особенностями [8].

В работах [8–10] исследовались течения высоковязкой и неньютоновской жидкостей со свободными поверхностями. Показана связь реологических параметров, неизотермических условий заполнения и макрокинетических изменений при протекании реакции полимеризации с гидродинамическим процессом заполнения пресс-форм с центральным профильным телом сложной геометрии. Все указанные работы выполнены в рамках модели ползущего течения (число Рейнольдса  $Re$  значительно меньше единицы) и без учета поверхностного натяжения на свободной границе. Появление капиллярных эффектов (капиллярное число  $Ca < 1$ ) существенно сказывается на эволюции свободной поверхности при заполнении капилляра. Например, при гидрофобных стенках канала заполнение области происходит с выпуклой свободной поверхностью, в то же время при гидрофильных стенках свободная поверхность вогнута. Возможны и режимы заполнения с изменением знака кривизны свободной поверхности. Кроме этого, капиллярные эффекты оказывают значительное влияние на динамические краевые углы ЛТФК и размеры области фонтанного потока.

Следует отметить, что численное моделирование течений вязкой жидкости со свободной поверхностью в капиллярах сопровождается значительными трудностями в построении устойчивых вычислительных алгоритмов [11]. При этом требуется:

- во-первых, определение кривизны свободной поверхности, описание которой включает в себя вторые производные; применение сплайнов для интерполяции формы свободной поверхности в большинстве случаев влечет за собой осцилляции неизвестной границы и требует использования дополнительных вычислительных фильтров;
- во-вторых, численная реализация выбранного механизма взаимодействия фаз на ЛТФК с нахождением динамических краевых углов;
- в-третьих, классические модели, учитывающие условие прилипания жидкости на ЛТФК, для которых характерны статические и динамические углы меньше  $180^\circ$  и больше нуля, приводят к сингулярности напряжений и давления на ЛТФК (к «кинематическому парадоксу» Скривена [2]).

Кроме этого, свободная поверхность имеет, как правило, сложную выпуклую (или вогнутую) форму, и ее координаты заранее неизвестны. Вычисление положения свободной поверхности в изменяющейся во времени расчетной области с применением явных алгоритмов аппроксимации в условиях малых капиллярных чисел требует выполнения очень малых шагов интегрирования по времени.

Настоящая работа посвящена развитию устойчивых численных алгоритмов моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в капилляре. Численное моделирование производится методом конечных элементов. Использование оператора Лапласа–Бельтрами при преобразовании граничных условий для скачка давления на свободной поверхности с последующим интегрированием по частям позволяет понизить порядок производных при численной реализации динамических краевых условий на свободной поверхности и естественным образом включить граничные условия скольжения на ЛТФК с вычислением динамического краевого угла. Алгоритм тестируется

Начиная с 60-х годов XX века выполнено большое количество экспериментальных и теоретических исследований течений жидкости с различной реологией, реализуемой при заполнении вертикального плоского канала и трубы, при наличии границы раздела и движущихся ЛТФК с динамическим краевым углом, равным  $180^\circ$  [6, 7].

В приведенных обзорных работах отмечается, что при однородных условиях на твердых стенках при заполнении области ЛТФК движутся симметрично относительно оси симметрии, а эволюция свободной поверхности из плоской в установившуюся выпуклую завершается при прохождении ЛТФК расстояния около полутора характерных размеров области. Изменяющаяся во времени область, заполненная жидкостью (см. Рис. 1), состоит из двух подобластей: подобласти одномерного течения, простирающейся от входных границ, и подобласти двумерного течения (с фонтанным эффектом), расположенной в непосредственной близости от свободной поверхности и обладающей размером, который определяется максимальным прогибом свободной поверхности. Исходя из геометрических

на примере течения вязкой несжимаемой жидкости с капиллярным мениском в области между вертикальными коаксиальными цилиндрами.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс заполнения области между вертикальными коаксиальными цилиндрами несжимаемой вязкой жидкостью с учетом сил поверхностного натяжения на свободной поверхности в поле силы тяжести (Рис. 1). В начальный момент времени область между коаксиальными цилиндрами заполнена так, что свободная поверхность плоская и находится на достаточном расстоянии, исключающем влияние входной границы. При моделировании течения в случае гидрофобных стенок это расстояние равно характерному размеру области. В то же время при гидрофильных стенках это расстояние зависит от уровня Джюри (максимальной высоты нестационарного подъема столба жидкости в капилляре под действием капиллярных сил) [11].

В основу математической модели решаемой задачи положим:  
– уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности:

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right] = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{W} \mathbf{e}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Здесь:  $t$  — время;  $\mathbf{u}$  — вектор скорости;  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$  — тензор напряжений, где  $p$  — давление,  $\mathbf{I}$  — метрический тензор,  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости;  $\mathbf{e}$  — единичный вектор направления гравитационных сил  $(0, -1)$ ;  $\operatorname{Re} = \rho UL/\mu$ ,  $\mathbf{W} = \rho g L^2/(U\mu)$  — числа Рейнольдса и Стокса, в которых  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — гравитационное ускорение,  $L$  — характерный размер области,  $U = Q/A$  — характерная скорость заполнения с расходом  $Q$  кольцевого зазора площадью  $A = \pi(1-k^2)R^2$ , где  $k$  — отношение радиусов внутреннего ( $R_1$ ) и внешнего ( $R$ ) цилиндров;

– граничные условия:

- на входе в область течения (Рис. 1) устанавливаем безразмерный профиль скорости, удовлетворяющей заданному размерному расходу жидкости  $Q = \frac{\pi}{8\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_3} \right) R^4 \left[ 1 - k^4 + \frac{(1-k^2)^2}{\ln k} \right]$

со среднерасходной скоростью  $U = \frac{1}{8\mu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x_3} \right) R^2 \left[ 1 + k^2 + \frac{1-k^2}{\ln k} \right]$  в кольцевом зазоре шириной  $(1-k)R$  в цилиндрических координатах  $(x_1, x_3)$ :

$$u_1 = 0, \quad u_3(x_1) = \frac{2}{1+k^2 + ((1-k^2)/\ln k)} \left[ 1 - x_1^2 - \frac{1-k^2}{\ln k} \ln x_1 \right], \quad k \leq x_1 \leq 1; \quad (2)$$

- на твердых стенках цилиндров полагаем условия прилипания и непротекания

$$\mathbf{u} = 0; \quad (3)$$

- на свободной поверхности, движущейся с кинематическим условием

$$\left( \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор координат точек свободной поверхности, задаем динамические краевые условия, заключающиеся в отсутствии касательного напряжения и равенстве нормального напряжения сумме внешнего и капиллярного давлений:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{n} p_a = \frac{1}{\operatorname{Ca}} \kappa \mathbf{n}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к свободной поверхности,  $p_a$  — давление над свободной поверхностью,  $\kappa$  — кривизна свободной поверхности,  $Ca = \mu U / \sigma$  — капиллярное число, в котором  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения. Без потери общности задачи давление над свободной поверхностью принимаем равным нулю;

- на линиях трехфазного контакта устанавливаем граничные условия скольжения и непротекания [10]

$$\mathbf{n}_s \cdot |\mathbf{T}| \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}_s \mathbf{n}_s) = \beta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{n}_s \mathbf{n}_s), \quad \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

где  $\beta$  — безразмерный параметр скольжения ( $\beta = 0$  при полном скольжении,  $\beta = \infty$  при прилипанию),  $\mathbf{n}_s$  — единичный вектор нормали к твердой стенке на ЛТФК.

### 3. Алгоритм решения задачи

Для решения поставленной задачи (1)–(6) прибегнем к методу конечных элементов. Область решения покроем конечно-элементной сеткой из четырехугольных изопараметрических конечных элементов второго порядка с разрывной билинейной аппроксимацией давления [9]. Такая аппроксимация одной из основных переменных задачи удовлетворяет условию совместности (условию Ладыженской–Бреци–Бабушки или LBB-условию [12]).

Пусть  $\mathbf{V} := (\mathbf{H}^1(\Omega(t)))^2$  и  $\mathbf{Q} := \mathbf{L}_2(\Omega(t))$  — векторные пространства Соболева. Введем тестовые функции  $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$  и  $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$ , интегрируемые в изменяющейся во времени расчетной области  $\Omega(t)$ . После умножения уравнений на тестовые функции, интегрирования по частям с использованием теоремы о дивергенции и подстановки граничных условий (2)–(6) в уравнения (1) с начальными условиями  $\Omega(0)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  и при динамических краевых углах на ЛТФК, равных  $\theta_d$ , для вектора скорости и давления  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{p}(t) \in \mathbf{V} \times \mathbf{Q}$  уравнения (1) можно представить в виде:

$$\text{Re} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + \mathbf{a}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}(\kappa(t), \mathbf{v}), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\kappa(t), \mathbf{v}) &= W \int_{\Omega(t)} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} dx - \frac{1}{Ca} \int_{\Gamma_f(t)} \kappa(t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\gamma = W \int_{\Omega(t)} \mathbf{e} \cdot \mathbf{v} dx - \frac{1}{Ca} \int_{\Gamma_f(t)} \nabla_s \mathbf{id} : \nabla_s \mathbf{v} d\gamma + \mathbf{c}(\theta_d, \mathbf{v}) \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2 \int_{\Omega(t)} \mathbf{D}(\mathbf{u}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}) dx + \text{Re} \int_{\Omega(t)} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + \beta \int_{\Gamma_k(t)} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}) (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) d\gamma_s, \\ \mathbf{b}(\mathbf{p}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega(t)} \mathbf{p} (\nabla \cdot \mathbf{v}) dx, \quad \mathbf{b}(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega(t)} \mathbf{q} (\nabla \cdot \mathbf{u}) dx, \\ \mathbf{c}(\theta_d, \mathbf{v}) &= \frac{1}{Ca} \int_{\Gamma_k(t)} \cos(\theta_d) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} d\gamma_s, \end{aligned}$$

$\Gamma_f(t)$  — свободная граница,  $\Gamma_k(t)$  — ЛТФК,  $\mathbf{f}$  — вектор условий и объемных сил,  $\mathbf{id}$  — вектор идентификации свободной границы, совпадающий с вектором  $\mathbf{x}$  координат узлов конечных элементов принадлежащих свободной границе,  $\nabla$  — оператор Гамильтона,  $\nabla_s$  — оператор градиента функции в касательном направлении к свободной границе,  $\boldsymbol{\tau}$  — единичный вектор касательной к твердой стенке,  $\mathbf{D}(\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) / 2$ .

Уравнение (7) записано теперь в слабой форме, и требуются некоторые пояснения. В классической слабой формулировке граничные условия для нормальных и касательных напряжений (условия (5) и первое условие в (6)) являются естественными, однако они не включают динамические краевые углы. Ранее реализации с учетом углов производились путем построения специальных вычислительных алгоритмов. Так, в [13] предложено вычислять свободную поверхность с ЛТФК и контактными углами в виде параболической аппроксимации. Подобные аппроксимации с использованием функции уровня можно найти в работах [14–17].

В обсуждаемом в настоящей статье случае для полученной слабой формы уравнений (7) динамический краевой угол является естественным граничным условием на ЛТФК. Этот вывод следует из результатов

работ [18–22], в которых интеграл по свободной поверхности, содержащий кривизну, преобразуется в интеграл с оператором Лапласа–Бельтрами, позволяющим последующее интегрирование его по частям. И тогда удастся представить в слабой форме основные уравнения с динамическим краевым углом как естественным граничным условием. В качестве начальных условий при решении уравнений (7) возьмем те поля скорости и давления, которые дает решение задачи с плоской свободной поверхностью. Отметим, что сходимость алгоритма с подобными преобразованиями на свободной поверхности доказана в работе [20].

Аппроксимацию конвективного члена в (7) произведем с использованием противопоточной схемы Хьюджа [23]. Систему нелинейных уравнений линеаризуем методом Ньютона и решаем методом Саада — GMRES [24]. Для функциональной связи скорости движения ЛТФК и динамических краевых углов  $\theta_d$  обратимся к эмпирическому соотношению Джианга [25]:

$$\cos \theta_d = \cos \theta_e - (1 + \cos \theta_e) \operatorname{th} \left( 4,96 (\operatorname{Ca} \times u_{cl})^{0,702} \right),$$

где  $u_{cl}$  — безразмерная скорость движения ЛТФК,  $\theta_e$  — равновесный контактный угол, являющийся входным параметром рассматриваемой задачи.

Кинематические граничные условия на свободной поверхности выполним лагранжевым способом: представим их реализацию в виде упорядоченного введения частиц маркеров [9]. Численное интегрирование по времени произведем по схеме предиктор–корректор. В этом случае координаты  $x_i$  узлов конечно-элементной сетки и частиц маркеров, принадлежащих свободной поверхности  $\Gamma_f(t)$ , с временного слоя  $t_n$  на слой с временем  $t_{n+1}$  преобразуются в несколько этапов:

1. Рассчитываются значения вектора скорости  $(U_i)^n$  на свободной поверхности в момент времени  $t_n$ .
2. Определяется движение маркеров и узлов, принадлежащих свободной поверхности, на шаге предиктора из соотношения

$$(x_i^p)_k^{n+1} = (x_i)_k^n + \Delta t^n \left\{ (U_i)_k^n + \frac{\Delta t^n}{2 \Delta t^{n-1}} \left[ (U_i)_k^n - (U_i)_k^{n-1} \right] \right\}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Здесь индексом  $p$  обозначены координаты маркеров на этом шаге,  $N$  — количество частиц маркеров.

3. Решается линеаризованная задача (7) и вычисляются скорости маркеров и узлов  $(U_i^p)_k^{n+1}$  на свободной поверхности.
4. Находится новое положение свободной поверхности на шаге корректора в момент времени  $t_{n+1}$ :

$$(x_i)_k^{n+1} = (x_i)_k^n + \frac{\Delta t^n}{2} \left[ (U_i)_k^n + (U_i^p)_k^{n+1} \right].$$

Несложно показать, что приведенный алгоритм имеет второй порядок погрешности по времени и является более устойчивым по сравнению с широко используемым алгоритмом, основанным на явной

схеме (схеме Эйлера). Шаг по времени выбираем из условия  $\Delta t < \min \left( C_1 \frac{h_{\min}}{|v_{\max}|}, \frac{\mu h}{\sigma}, \sqrt{\frac{\rho h^3}{\sigma}} \right)$ ,  $h$ ,  $h_{\min}$ ,

$h_{\max}$  — диаметр конечного элемента, его минимальное и максимальное значения соответственно,  $C_1 < 0,2$ ,  $v_{\max}$  — максимальная скорость на свободной поверхности.

Отметим, что при малых капиллярных числах требуемый для устойчивого вычисления шаг по времени становится экстремально малым. В этом случае переходим на реализацию задачи движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и изменяющимися динамическими краевыми углами по неявной схеме [22].

Относительное положение ЛТФК на внешнем и внутреннем цилиндрах определяется численно и контролируется исходя из условий инвариантности напряжений на твердых стенках с учетом граничных условий скольжения.

#### 4. Результаты расчетов

Тестирование алгоритма, приведенного в разделе 3, производилось на примере статической капли с плотностью ( $\text{кг/м}^3$ ) и вязкостью ( $\text{Па}\cdot\text{с}$ ), равными 1, известным поверхностным, также единичным,

натяжением (Н/м) и радиусом 0,5 м. Давление среды, окружающей каплю, считалось нулевым. В соответствии с уравнением Лапласа–Юнга точное решение этой задачи имеет вид:

$$u(x) = 0 \text{ м/сек}, \quad p(x) = 2 \text{ Па}.$$

Численные расчеты осуществлены на последовательности сеток с компонентами скорости, равными 0,001 м/с и нулевым начальным давлением. Исходная форма капли была эллипсоидной с отношением радиусов 1,05. Результаты моделирования приведены в таблице и на рисунках 2, 3. Из результатов расчета следует, что описанный выше алгоритм обладает почти оптимальной скоростью сходимости по отношению к основным параметрам задачи (скорости и давлению) и показывает хорошую консервативность. Потеря массы капли не превышала 0,02% при использовании неявного алгоритма и 0,2% при интегрировании по явной схеме.

Таблица. Погрешность давления  $p$  по норме в пространстве  $L_2$  и порядок сходимости для статической цилиндрической капли

$h$ , шаг сетки	1/20	1/40	1/80	$O(h^m)$
Погрешность давления	$2,636 \times 10^{-4}$	$8,451 \times 10^{-5}$	$3,186 \times 10^{-5}$	1,52

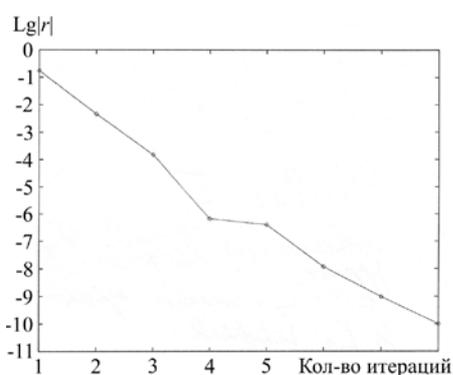


Рис. 2. Эволюция невязки  $r$  уравнений (7) по норме в  $L_2$

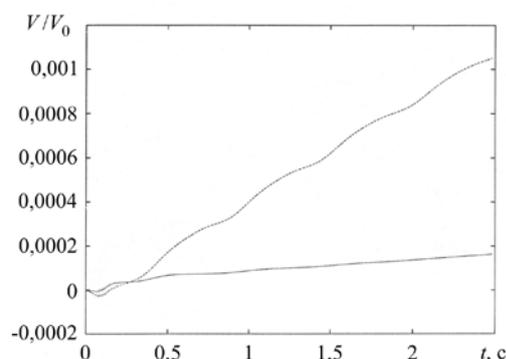


Рис. 3. Изменение массы капли во времени  $t$ , рассчитанное по алгоритмам: явному (пунктирная линия) и неявному (сплошная линия);  $V_0$  – начальный объем капли,  $V_t$  – эволюция объема

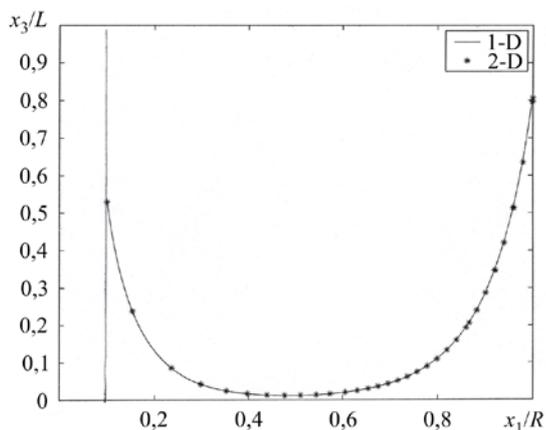


Рис. 4. Форма статического профиля мениска в коаксиальном зазоре при  $k=0,1$ ,  $Ca-Re=1$ ,  $\beta=0,001$  и равновесном контактном угле на ЛТФК, равном  $15^\circ$  (1-D – полуаналитическое решение уравнения Лапласа–Юнга в MATLAB, 2-D – результаты расчетов по предложенному алгоритму); вертикальной сплошной линией обозначена стенка внутреннего цилиндра

Тестирование алгоритма со статическим углом  $15^\circ$  рассмотрим на примере режима установления мениска до стационарного состояния в коаксиальном зазоре, заполненном на уровень характерного размера жидкостью с плоской свободной поверхностью. На входной границе установим нулевые граничные условия (твердая стенка) для компонент скорости, а давление приравняем статическому. Под действием поверхностных сил с гидрофильными стенками цилиндров свободная поверхность начинает деформироваться и принимает установившуюся вогнутую форму. На рисунке 4 представлены результаты расчетов равновесного состояния мениска с использованием приведенного алгоритма с адаптацией сетки в окрестности сингулярностей [21] при минимальном шаге у ЛТФК, равном  $h=10^{-4}$ .

Дополнительно было получено полуаналитическое решение на основе уравнения Лапласа–Юнга в среде MATLAB для кольцевого зазора с наложением

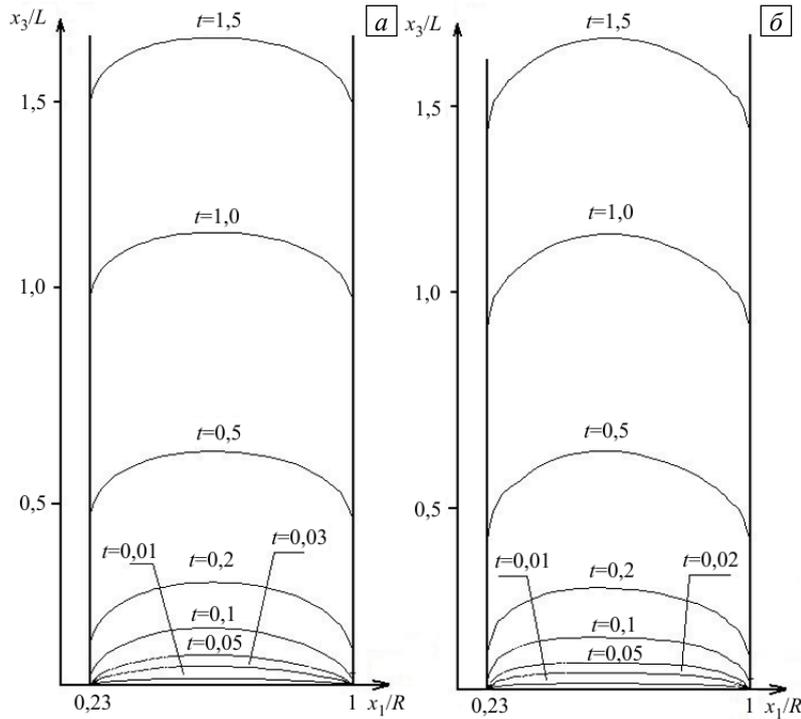
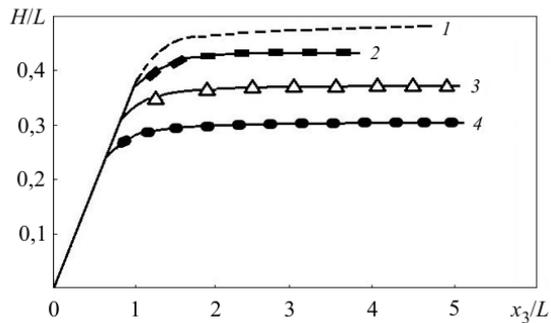


Рис. 5. Эволюция свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости в зазоре, ограниченном гидрофобными стенками, для значений числа Стокса  $W$ : 100 (а) и 30 (б), и при  $Re = 0,1$ ,  $Ca = 10$ ,  $\theta_c = 161,5^\circ$ ,  $\beta = 0,1$

граничных условий на стенках цилиндров при равновесном контактном угле на ЛТФК в  $15^\circ$ . Результаты моделирования показывают удовлетворительную точность проведенных расчетов. Погрешность в вычислении контактного угла по норме в  $L_2$  не превысила  $0,1^\circ$ . Кроме этого важно отметить, что равновесное состояние мениска в капиллярном зазоре между двумя цилиндрами существенно отличается от мениска в цилиндрическом капилляре. Уровень подъема жидкости на стенке внутреннего цилиндра ниже по сравнению с уровнем на стенке наружного цилиндра. Относительное положение уровней зависит от геометрического параметра  $k$ . Более того, минимум прогиба свободной поверхности расположен не по середине зазора, а смещен в сторону внутреннего цилиндра.

В дальнейшем рассмотрим процесс заполнения коаксиального зазора только с гидрофобными стенками цилиндров. Сразу же отметим, что в настоящей работе не ставится целью проведение многопараметрических исследований процесса заполнения области между вертикальными коаксиальными цилиндрами. Ограничимся лишь теми из них, которые позволяют продемонстрировать возможности математической модели и алгоритма расчета. Будем считать, что заполнение производится в поле силы тяжести при относительно невысоких расходах с параметрами  $Re = 0,01 \div 5$ ,  $W = 0 \div 500$ ,  $Ca = 0,01 \div 10$ ,  $\beta = 0,1 \div 1$ , и равновесным контактном угле более  $90^\circ$ . В этом случае для течения характерен ламинарный режим. Пусть в начальный момент времени область предполагается частично заполненной жидкостью с плоской свободной поверхностью. В дальнейшем жидкость начинает подаваться в кольцевой зазор с постоянным расходом. На рисунке 5 изображена эволюция свободной поверхности жидкости при движении вверх по зазору для различных значений числа Стокса.

По результатам расчета видно, что после нескольких шагов по времени ( $t = 0,01 \div 0,05$ ) жидкость заметно продвигается вверх по зазору в зоне максимальных скоростей, но ЛТФК остаются неподвижными. Такое состояние сохраняется до тех пор, пока не развит фронт свободной поверхности ( $H_f \approx 0,4H_{max}$ , где  $H_{max}$  — максимальный прогиб свободной поверхности, определяемый на наружном цилиндре по вертикальной относительно ЛТФК координате) и не возникло существенное радиальное растекание. Точки трехфазного контакта, по мере увеличения времени заполнения, начинают перемещаться (при  $t \geq 0,1$  последовательно сначала на внутреннем цилиндре, а потом и на наружном) и создают последовательность положений свободной поверхности в виде эквидистантных поверхностей. Это означает, что свободная поверхность приобретает установившееся состояние и движется в направлении заполнения со среднерасходной скоростью на входе. Путь, который проделывают ЛТФК от начала движения до установившегося состояния, в среднем равен примерно  $1,5L$  (где  $L$  — ширина зазора) и приведен при различных значениях параметра Стокса на рисунке 6.

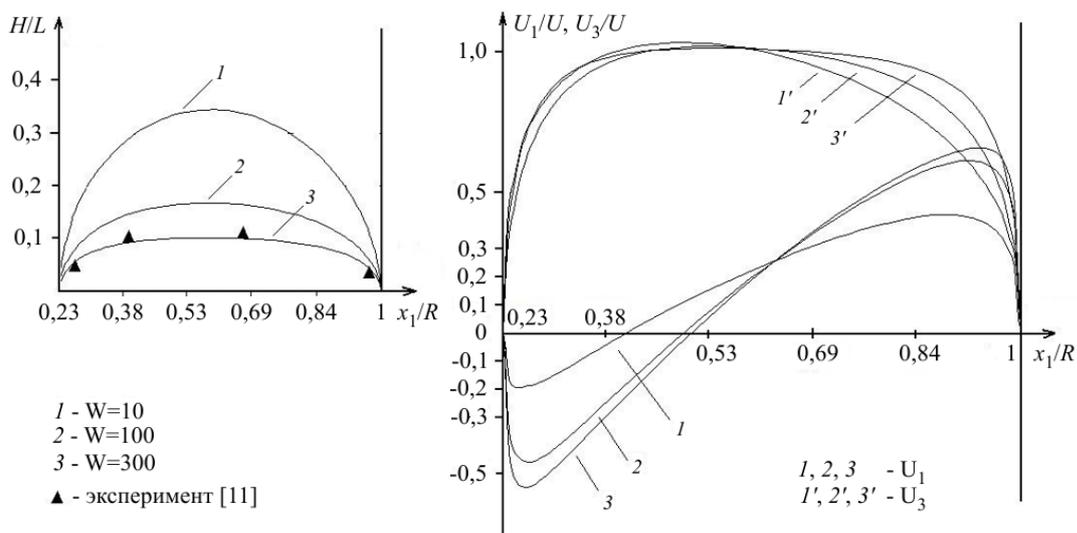


**Рис. 6.** Эволюция относительного максимального прогиба ( $H/L$ ) свободной поверхности по длине зазора в виде функции числа Стокса  $W$ : 0 (линия 1), 1 (2), 2 (3), 10 (4), при  $Ca=1$ ,  $\theta_e=161,5^\circ$ ,  $\beta=0,3$ ;  $L$  – ширина зазора

Важно, что ЛТФК на гидрофобной поверхности наружного цилиндра начинает двигаться несколько позже, чем на внутреннем цилиндре (с запаздыванием по времени порядка  $\Delta t \approx 0,1$ ). Вследствие этого на внутреннем цилиндре ЛТФК оказывается несколько выше по вертикальной координате. Это связано с тем, что величина развивающихся касательных напряжений на поверхности внутреннего цилиндра выше, чем на поверхности наружного.

Усиление капиллярных эффектов сопровождается уменьшением площади и максимального прогиба свободной поверхности (Рис. 8), при этом динамический краевой контактный угол стремится к равновесному значению —  $\theta_e$  (Рис. 9). На рисунке 10 демонстрируется эволюция контактного динамического угла  $\theta_d$  ЛТФК внутреннего цилиндра как функция скорости движения ЛТФК  $u_{cl}$  и капиллярного числа  $Ca$  при равновесном угле  $\theta_e=101^\circ$ ,  $W=0$ ,  $\beta=0,3$ ; число Рейнольдса  $Re$  определялось по физическим параметрам воды и скорости ЛТФК.

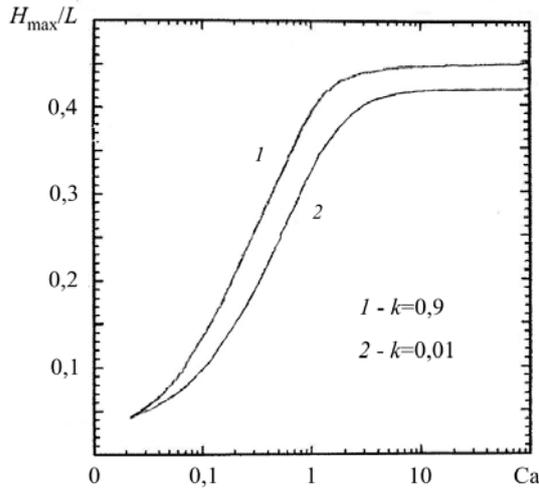
Граничные условия скольжения на ЛТФК (5) с гидрофобными стенками цилиндров слабо влияют на эволюцию свободной поверхности и распределение скоростей на ней (Рис. 11). Относительные отклонения максимального прогиба свободной поверхности, полученные при различных граничных условиях, составляли не более 1÷3%. Кроме этого, использование на ЛТФК граничных условий скольжения приводит, при прочих равных условиях, к более гладким полям касательных напряжений  $\tau_{13}$  в окрестности свободной поверхности и ЛТФК (Рис. 12). При этом из анализа результатов численных исследований можно сделать вывод, что задание условий проскальзывания только на ЛТФК не снижает осцилляцию давления в их окрестностях и приводит к необходимости применения сингулярных конечных элементов [26].



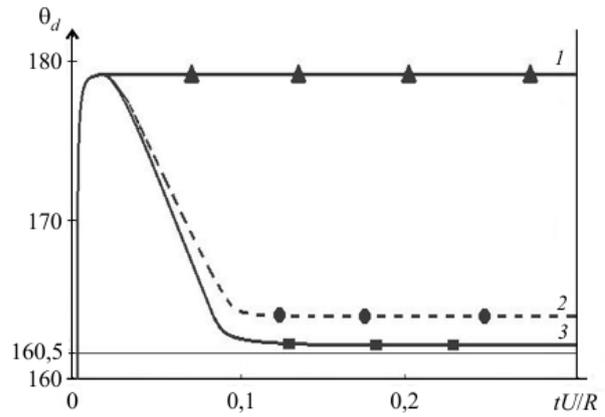
**Рис. 7.** Влияние величины параметра Стокса на профили свободной поверхности и компонент вектора скорости;  $H$  – прогиб свободной поверхности по вертикальной координате,  $U_1, U_3$  – радиальная и аксиальная компоненты вектора скорости на свободной поверхности

Полученные результаты свидетельствуют, что снижение гравитационных сил вызывает существенное увеличение продолжительности установления эквидистантной формы свободной поверхности. Это связано с ростом влияния поверхностных сил. Увеличение числа Рейнольдса от нуля до значения  $Re=5$  влечет за собой рост прогиба свободной поверхности ( $H/L=0,512$  при  $Re=1$ ,  $Ca=0$ ,  $W=0,12$ ;  $H/L=0,92$  при  $Re=5$ ,  $Ca=10$ ,  $W=0,1$ ).

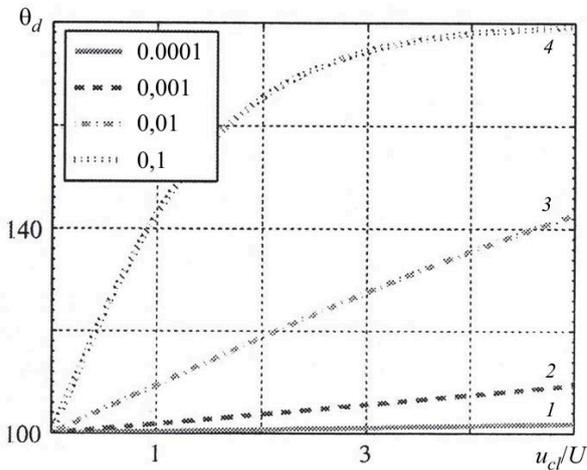
Следует отметить, что при  $Re>7$  режим движения ЛТФК становится неустойчивым, и около стенки внутреннего цилиндра возможен захват свободной поверхностью объемов жидкости с воздухом [8]. В то же время увеличение гравитационных сил (рост значения параметра Стокса) приводит к более пологой свободной поверхности (Рис. 6, 7).



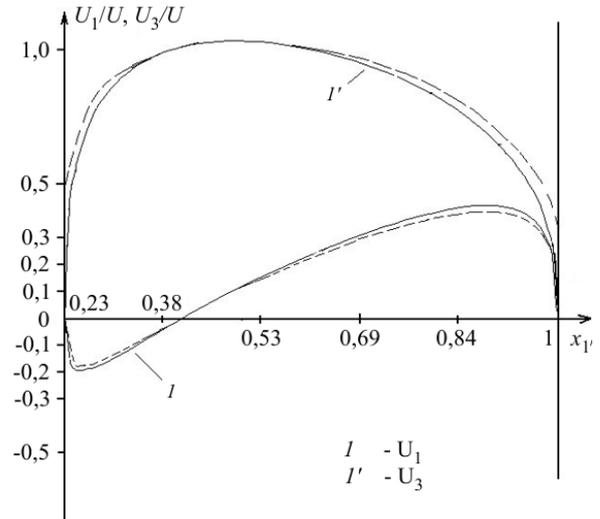
**Рис. 8.** Влияние капиллярных сил на максимальный прогиб свободной поверхности ( $Re = 0,1$ ,  $W = 0$ ,  $\beta = 0,1$ ,  $\theta_e = 161,5^\circ$ )



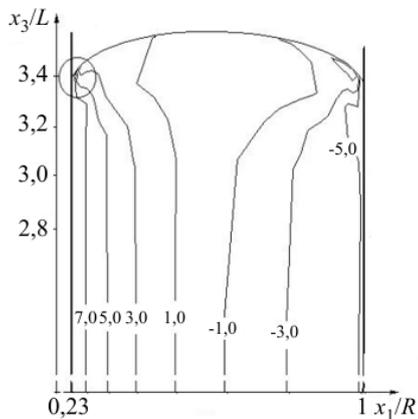
**Рис. 9.** Эволюция контактного динамического угла  $\theta_d$  на наружном цилиндре с равновесным контактным углом  $\theta_e = 161,5^\circ$  при  $Re = 0,1$ ,  $W = 0,1$ ,  $\beta = 0,3$  и различных значениях капиллярного числа  $Ca$ : 1 (линия 1), 0,01 (2), 0,001 (3)



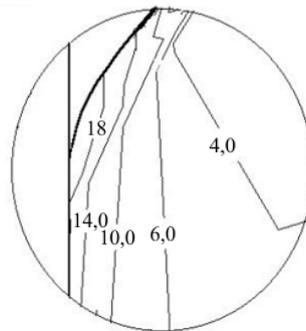
**Рис. 10.** Влияние на динамический краевой угол  $\theta_d$  скорости ЛТФК  $u_{cl}$  и капиллярного числа  $Ca$ : 1 (линия 1), 0,01 (2), 0,001 (3), 0,0001 (4)



**Рис. 11.** Влияние граничных условий на ЛТФК (сплошная линия – прилипание, штриховая – скольжение) на профиль аксиальной и радиальной компоненты скорости на свободной поверхности при  $Re = 0,1$ ,  $W = 300$ ,  $Ca = 1$



**а**



**Рис. 12.** Поля касательных напряжений в окрестности свободной поверхности и ЛТФК для жидкости при  $Re = 0,1$ ,  $W = 50$ ,  $Ca = 5$  с заданием на ЛТФК граничных условий прилипания (а) и скольжения (б); справа в увеличенном масштабе показаны выделенные области

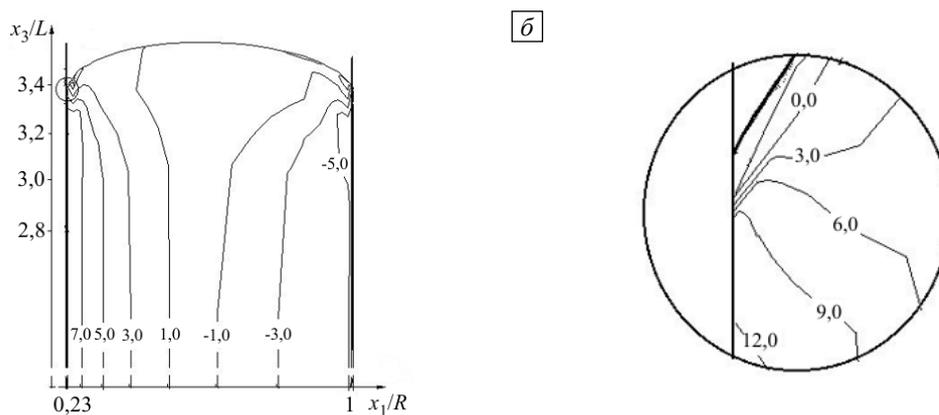


Рис. 12. Продолжение

## 5. Заключение

Предложена вариационная формулировка краевой задачи движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью и изменяющимися динамическими краевыми углами. Способы расчета движения ЛТФК основаны на задании условия скольжения, замене кривизны оператором Лапласа–Бельтрами с последующим интегрированием по частям, использовании сингулярного конечного элемента и на вычислении значения динамического краевого угла по экспериментальной зависимости, предложенной Джиангом. Для снижения погрешности при расчете эволюции свободной поверхности применяется схема предиктор–корректор с неявным интегрированием поверхностного натяжения. Из анализа полученных результатов следует, что установленные кинематические характеристики течения, имеющие место при заполнении кольцевого зазора, согласуются с экспериментальными данными. Для медленных условий заполнения наибольшее влияние на кинематические характеристики оказывают гравитационные и капиллярные силы. При этом доминирующая роль в эволюции свободной поверхности, начиная со значений капиллярного числа  $Ca < 0,1$ , переходит к капиллярным силам. Увеличение расхода жидкости ( $Re > 1$ ) приводит к значительному увеличению прогиба свободной поверхности. Численные эксперименты осуществлялись на вычислительном кластере ЦКП «Центр данных ДВО РАН» [27].

## Литература

1. Rose W. Fluid-fluid interfaces in steady motion // Nature. 1961. Vol. 191. P. 242-243.
2. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line // J. Colloid Interface Sci. 1971. Vol. 35. P. 85-101. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(71\)90188-3](https://doi.org/10.1016/0021-9797(71)90188-3)
3. Dussan V. E.B., Davis S.H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 65. P. 71-95. <https://doi.org/10.1017/S0022112074001261>
4. Пухначев В.В., Солонников В.А. К вопросу о динамическом краевом угле // ПИММ. 1982. Т. 46, № 6. С. 961-971. (English version [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90059-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90059-4))
5. Shikhmurzaev Y.D. Moving contact lines in liquid/liquid/solid structure // J. Fluid Mech. 1997. Vol. 334. P. 211-249. <https://doi.org/10.1017/S0022112096004569>
6. Mitsoulis E. Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters // AIChE J. 2010. Vol. 56. P. 1147-1162. <https://doi.org/10.1002/aic.12038>
7. Борзенко Е.И., Рыльцев И.А., Шрагер Г.Р. Кинематика течения жидкости Балкли-Гершеля со свободной поверхностью при заполнении канала // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 5. С. 53-64. <https://doi.org/10.7868/S0568528117050061>
8. Булгаков В.К., Чехонин К.А., Липанов А.М. Заполнение области между вертикальными коаксиальными цилиндрами аномально вязкой жидкостью в неизометрических условиях // ИФЖ. 1989. Т. 57, № 4. С. 577-583. (English version <https://doi.org/10.1007/BF00871133>)
9. Чехонин К.А., Сухинин П.А. Движение нелинейно-вязкопластичной жидкости со свободной поверхностью при заполнении осесимметричного объема // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, № 3. С. 89-102.
10. Chekhonin K.A., Sukhinin P.A. Numerical modeling of filling axially symmetric channel with non-linearly viscoelastic fluid taking into account  $\pi$  effect // ИФЖ. 1999. Т. 72, № 5. С. 881-885. (English version <https://doi.org/10.1007/BF02699405>)
11. Wörner M. Numerical modeling of multiphase flow in microfluidics and micro process engineering: a review of methods and applications // Microfluid. Nanofluid. 2012. Vol. 12. P. 841-886. <https://doi.org/10.1007/s10404-012-0940-8>
12. Булгаков В.К., Чехонин К.А. Основы теории метода смешанных конечных элементов. Хабаровск: Изд-во Хабар. политех. ин-та, 1999. 283 с.
13. Fukai J., Shiiba Y., Yamamoto T., Miyatake O., Poulikakos D., Megaridis C.M., Zhao Z. Wetting effects on the spreading of a liquid droplet colliding with a flat surface: experiment and modeling // Phys. Fluid. 1995. Vol. 7. P. 236-247. <https://doi.org/10.1063/1.868622>
14. Renardy M., Renardy Y., Li J. Numerical simulation of moving contact line problems using a volume-of-fluid method // J. Comput. Phys. 2001. Vol. 171. P. 243-263. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6785>
15. Ruschak K.J. A method for incorporating free boundaries with surface tension in finite element fluid-flow simulators // Int. J. Numer. Meth. Eng. 1980. Vol. 15. P. 639-648. <https://doi.org/10.1002/nme.1620150502>

16. Spelt P.D.M. A level-set approach for simulations of flows with multiple moving contact lines with hysteresis // *J. Comput. Phys.* 2005. Vol. 207. P. 389-404. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.016>
17. Šikalo S., Wilhelm H.-D., Roisman I.V., Jakirlić S., Tropea C. Dynamic contact angle of spreading droplets: Experiments and simulations // *Phys. Fluid.* 2005. Vol. 17. 062103. <https://doi.org/10.1063/1.1928828>
18. Dziuk G. An algorithm for evolutionary surfaces // *Numer. Math.* 1990. Vol. 58. P. 603-611. <https://doi.org/10.1007/BF01385643>
19. Dziuk G., Elliott C.M. Finite elements on evolving surfaces // *IMA J. Numer. Anal.* 2007. Vol. 27. P. 262-292. <https://doi.org/10.1093/imanum/drl023>
20. Gross S., Reusken A. Finite element discretization error analysis of a surface tension force in two-phase incompressible flows // *SIAM J. Numer. Anal.* 2007. Vol. 45. P. 1679-1700. <https://doi.org/10.1137/060667530>
21. Saksono P.H., Perić D. On finite element modelling of surface tension: Variational formulations and applications - Part II: Dynamic problems // *Comput. Mech.* 2006. Vol. 38. P. 251-263. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0745-7>
22. Slikkerveer P.J., Van Lohuizen E.P., O'Brien S.B.G. An implicit surface tension algorithm for Picard solvers of surface-tension-dominated free and moving boundary problems // *Int. J. Numer. Meth. Fluid.* 1996. Vol. 22. P. 851-865. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19960515\)22:9<851::AID-FLD380>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19960515)22:9<851::AID-FLD380>3.0.CO;2-R)
23. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1982. Vol. 32. P. 199-259. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8)
24. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.* 1986. Vol. 7. P. 856-869. <https://doi.org/10.1137/0907058>
25. Jiang T.-S., Oh S.-G., Slattery J.C. Correlation for dynamic contact angle // *J. Colloid Interface Sci.* 1979. Vol. 69. P. 74-77. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(79\)90081-X](https://doi.org/10.1016/0021-9797(79)90081-X)
26. Georgiou G.C., Olson L.G., Schultz W.W., Sagan S. A singular finite element for Stokes flow: The stick-slip problem // *Int. J. Numer. Meth. Fluid.* 1989. Vol. 9. P. 1353-1367. <https://doi.org/10.1002/flid.1650091105>
27. Центр коллективного пользования «Центр данных ДВО РАН». URL: <http://lits.ccfbras.ru> (дата обращения: 10.04.2019).

## References

1. Rose W. Fluid-fluid interfaces in steady motion. *Nature*, 1961, vol. 191, pp. 242-243.
2. Huh C., Scriven L.E. Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. *J. Colloid Interface Sci.*, 1971, vol. 35, pp. 85-101. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(71\)90188-3](https://doi.org/10.1016/0021-9797(71)90188-3)
3. Dussan V. E.B., Davis S.H. On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 65, pp. 71-95. <https://doi.org/10.1017/S0022112074001261>
4. Pukhnachev V.V., Solonnikov V.A. On the problem of dynamic contact angle. *J. Appl. Math. Mech.*, 1982, vol. 46, pp. 771-779. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(82\)90059-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(82)90059-4)
5. Shikhmurzaev Y.D. Moving contact lines in liquid/liquid/solid structure. *J. Fluid Mech.*, 1997, vol. 334, pp. 211-249. <https://doi.org/10.1017/S0022112096004569>
6. Mitsoulis E. Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters. *AIChE J.*, 2010, vol. 56, pp. 1147-1162. <https://doi.org/10.1002/aic.12038>
7. Borzenko E.I., Ryl'tsev I.A., Shrager G.R. Kinematics of Bulkley-Herschel fluid flow with a free surface during the filling of a channel. *Fluid dyn.*, 2017, vol. 52, no 5, pp. 646-656. <https://doi.org/10.1134/S0015462817050064>
8. Bulgakov V.K., Lipanov A.M., Chekhonin K.A. Filling the region between vertical coaxial cylinders of an anomalously viscous fluid under nonisothermal conditions. *Journal of Engineering Physics*, 1989, vol. 57, pp. 1169-1175. <https://doi.org/10.1007/BF00871133>
9. Chekhonin K.A., Sukhinin P.A. Dvizheniye nelineynno-vyazkoplastichnoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu pri zapolnenii osesimmetrichnogo ob'yema [Non-linear visco-plastic fluid flow with free surface under filling up the axi symmetric channel]. *Mat. Modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 2001, vol. 13, no. 3, pp. 89-102.
10. Chekhonin K.A., Sukhinin P.A. Numerical modeling of filling of an axisymmetric channel with a nonlinear viscoplastic fluid with allowance for the  $\pi$ -effect. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 1999, vol. 72, pp. 851-855. <https://doi.org/10.1007/BF02699405>
11. Wörner M. Numerical modeling of multiphase flow in microfluidics and micro process engineering: a review of methods and applications. *Microfluid. Nanofluid.*, 2012, vol. 12, pp. 841-886. <https://doi.org/10.1007/s10404-012-0940-8>
12. Bulgakov V.K., Chekhonin K.A. *Osnovy teorii metoda smeshannykh konechnykh elementov* [Fundamentals of the theory of mixed finite element method]. Khabarovsk: Izd-vo Khabar. politekh. in-ta, 1999. 283 p.
13. Fukai J., Shiiba Y., Yamamoto T., Miyatake O., Poulikakos D., Megaridis C.M., Zhao Z. Wetting effects on the spreading of a liquid droplet colliding with a flat surface: experiment and modeling. *Phys. Fluid.*, 1995, vol. 7, pp. 236-247. <https://doi.org/10.1063/1.868622>
14. Renardy M., Renardy Y., Li J. Numerical simulation of moving contact line problems using a volume-of-fluid method. *J. Comput. Phys.*, 2001, vol. 171, pp. 243-263. <https://doi.org/10.1006/jcph.2001.6785>
15. Ruschak K.J. A method for incorporating free boundaries with surface tension in finite element fluid-flow simulators. *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1980, vol. 15, pp. 639-648. <https://doi.org/10.1002/nme.1620150502>
16. Spelt P.D.M. A level-set approach for simulations of flows with multiple moving contact lines with hysteresis. *J. Comput. Phys.*, 2005, vol. 207, pp. 389-404. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.01.016>
17. Šikalo S., Wilhelm H.-D., Roisman I.V., Jakirlić S., Tropea C. Dynamic contact angle of spreading droplets: Experiments and simulations. *Phys. Fluid.*, 2005, vol. 17, 062103. <https://doi.org/10.1063/1.1928828>
18. Dziuk G. An algorithm for evolutionary surfaces. *Numer. Math.*, 1990, vol. 58, pp. 603-611. <https://doi.org/10.1007/BF01385643>

19. Dziuk G., Elliott C.M. Finite elements on evolving surfaces. *IMA J. Numer. Anal.*, 2007, vol. 27, pp. 262-292. <https://doi.org/10.1093/imanum/drl023>
20. Gross S., Reusken A. Finite element discretization error analysis of a surface tension force in two-phase incompressible flows. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2007, vol. 45, pp. 1679-1700. <https://doi.org/10.1137/060667530>
21. Saksono P.H., Perić D. On finite element modelling of surface tension: Variational formulations and applications - Part II: Dynamic problems. *Comput. Mech.*, 2006, vol. 38, pp. 251-263. <https://doi.org/10.1007/s00466-005-0745-7>
22. Slikkerveer P.J., Van Lohuizen E.P., O'Brien S.B.G. An implicit surface tension algorithm for Picard solvers of surface-tension-dominated free and moving boundary problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluid.*, 1996, vol. 22, pp. 851-865. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0363\(19960515\)22:9<851::AID-FLD380>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0363(19960515)22:9<851::AID-FLD380>3.0.CO;2-R)
23. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1982, vol. 32, pp. 199-259. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90071-8](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90071-8)
24. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. and Stat. Comput.*, 1986, vol. 7, pp. 856-869. <https://doi.org/10.1137/0907058>
25. Jiang T.-S., Oh S.-G., Slattery J.C. Correlation for dynamic contact angle. *J. Colloid Interface Sci.*, 1979, vol. 69, pp. 74-77. [https://doi.org/10.1016/0021-9797\(79\)90081-X](https://doi.org/10.1016/0021-9797(79)90081-X)
26. Georgiou G.C., Olson L.G., Schultz W.W., Sagan S. A singular finite element for Stokes flow: The stick-slip problem. *Int. J. Numer. Meth. Fluid.*, 1989, vol. 9, pp. 1353-1367. <https://doi.org/10.1002/flid.1650091105>
27. <http://lits.ccfеbras.ru> (accessed 10 April 2019).

*Поступила в редакцию 04.06.2019; после доработки 16.09.2019; принята к опубликованию 16.09.2019*