

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.3.25](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.25)

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ РЕЛЕЯ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

А.М. Антонов, В.И. Ерофеев, А.В. Леонтьева

Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация

В настоящее время интенсивно развивается механика поврежденных сред, изучающая как напряженно-деформированное состояние самой среды, так и накопление повреждений ее материалом. В публикуемой работе для изотропного упругого полупространства при наличии поврежденности материала сформулирована самосогласованная задача, включающая динамическое уравнение теории упругости и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале. Считается, что повреждения в среде распределены равномерно. Исследуется распространение поверхностной волны вдоль свободной границы поврежденного полупространства. Волна движется горизонтально и затухает в вертикальном направлении. Полагается, что вдоль третьей оси все процессы однородны. Показано, что в этом случае самосогласованная система с граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства, сводится к комплексному дисперсионному уравнению. В предельном случае, когда поврежденность в материале отсутствует, полученное дисперсионное уравнение сводится к классическому дисперсионному уравнению для волны Релея в полиномиальной форме, при этом поверхностная волна распространяется вдоль границы полупространства без дисперсии и затухания. Если в среде присутствует поврежденность, то поверхностная волна затухает в направлении продвижения, а низкочастотные возмущения обладают частотно-зависимой диссипацией и дисперсией. Отмечено, что дисперсия имеет аномальный характер. Установлено, что в области высоких частот с уменьшением значения коэффициента поврежденности значение фазовой скорости растет, а групповой – падает. На низких частотах обе скорости увеличиваются при снижении коэффициента поврежденности.

Ключевые слова: затухающая поверхностная волна, волна Релея, полупространство, поврежденная среда, комплексное дисперсионное уравнение, низкочастотная дисперсия

INFLUENCE OF MATERIAL DAMAGE ON RAYLEIGH WAVE PROPAGATION ALONG HALF-SPACE BOUNDARY

A.M. Antonov, V.I. Erofeev and A.V. Leonteva

Mechanical Engineering Research Institute RAS, Nizhny Novgorod, Russian Federation

At present mechanics of damaged media studying both the stress-strain state of media and the accumulation of damages in materials develops intensively. In this paper, for an isotropic elastic half-space with damage in the material, a self-consistent problem is formulated, which includes the dynamic equation of the theory of elasticity and the kinetic equation of damage accumulation. We suppose that damage is uniformly distributed in the medium material. The study of surface wave propagation along the free boundary of the damaged half-space is performed. The wave propagates horizontally and decays in vertical directions. We assume that along the third axis all processes are homogeneous. It is shown that in this case a self-consistent system with boundary conditions expressing the absence of stresses at the boundary of a half-space is reduced to a complex dispersion equation. It is noted that in the limiting case, when there is no damage in the material, the dispersion equation obtained is reduced to the classical dispersion equation for the Rayleigh wave in polynomial form; the surface wave propagates along the half-space boundary without dispersion and attenuation. If damage is present in the medium, the surface wave attenuates in the direction of propagation, and low-frequency disturbances have frequency-dependent dissipation and dispersion. It is shown that dispersion has the abnormal character. It is established that with a decrease in the damage coefficient value, in the high-frequency region, the value of the phase velocity increases, and the group velocity decreases. At low frequencies, both speeds increase with decreasing damage rate

Key words: damped surface wave, Rayleigh wave, half-space, damaged medium, complex dispersion equation, low-frequency dispersion

1. Введение

Под поврежденностью обычно понимается уменьшение величины упругого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной его части к другой. Убывание площади обусловлено в свою очередь появлением и развитием рассеянного поля микродефектов (микротрещин — в упругости, дислокаций — в пластичности, микропор — при ползучести, поверхностных микротрещин — при усталости) [1–3].

Механика поврежденного континуума интенсивно развивается, начиная с основополагающих работ Л.М. Качанова, обобщенных в монографии [4], и Ю.Н. Работнова, обобщенных в монографии [5]. В традиционных расчетах за меру повреждаемости в процессе развития деформации принимается скалярный параметр повреждаемости $\psi(x, t)$, характеризующий относительную плотность равномерно рассеянных в единице объема микродефектов. Параметр равен нулю, когда повреждений нет, и близок к единице в момент разрушения.

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики поврежденных материалов рассматриваются отдельно от задач накопления повреждений. При разработке же методов решения принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности. Фазовая скорость волны и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты и линейными функциями поврежденности [6]. При несомненных достоинствах (простоте) такой подход обладает целым рядом недостатков как и любой подход, не опирающийся на математические модели процессов и систем.

Авторы работ [7–9] считают задачу самосогласованной, включающей в себя, кроме уравнения развития поврежденности, динамическое уравнение теории упругости. В такой постановке решен ряд задач волновой динамики поврежденных материалов и элементов конструкций [7–18], в частности, в [17, 18] рассматривались элементы конструкций, работающие в условиях взаимодействия с внешним магнитным полем, оказывающим влияние на процесс формирования и распространения упругих волн.

2. Трехмерная самосогласованная задача динамики поврежденного материала

В трехмерной постановке самосогласованная задача описывается уравнениями Ламе и кинетическим уравнением накопления повреждений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= \left(K + \frac{1}{3} G \right) \text{grad div } \mathbf{u} + G \Delta \mathbf{u} - \beta_1 \text{grad } \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \psi - \beta_2 \left(K + \frac{4}{3} G \right) \text{div } \mathbf{u} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: \mathbf{u} — вектор перемещений; K — модуль всестороннего сжатия; G — модуль сдвига; ρ — плотность материала; t — время; $\alpha = 1/\tau_*$, β_1 , β_2 — постоянные параметры, характеризующие поврежденность материала и связь циклических процессов с процессами накопления повреждений ($\alpha > 0$); τ_* — время релаксации.

3. Связь модели поврежденного материала с моделью наследственной среды

Если образец материала выполнен в виде стержня, по которому может распространяться продольная упругая волна, то считается, что стержень подвергается циклическим испытаниям, и в его материале может накапливаться поврежденность. В этом случае справедлива следующая система уравнений [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}, & 1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \psi &= \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x}. & 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь: $u(x, t)$ — перемещение частиц срединной линии стержня; $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ — скорость, с которой распространялась бы продольная волна при отсутствии повреждений в материале; $E = \frac{9KG}{3K+G}$ — модуль Юнга; ρ — плотность материала.

Система уравнений (2) получается из (1) при одномерности волнового процесса, выполнении гипотезы плоских сечений: $u_1(x, y, z, t) = u(x, t)$, и условия одноосного деформированного состояния:

$$u_2(x, y, z, t) = -\nu y \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad u_3(x, y, z, t) = -\nu z \frac{\partial}{\partial x} u(x, t),$$

которое характерно для растяжения (сжатия)

стержней. Здесь: $u_{1,2,3}$ — компоненты вектора перемещений; $\nu = \frac{3K-2G}{2K-2G}$ — коэффициент Пуассона;

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3.$$

Уравнение (2)₂ может быть переписано в эквивалентной форме:

$$\psi(x, t) = \beta_2 E \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} u(x, \xi) e^{(\xi-t)/\tau} d\xi = \beta_2 E R(t) * \frac{\partial}{\partial x} u(x, t), \quad (3)$$

где символ * означает свертку функции $R(t)$, являющейся функцией релаксации:

$$R(t) = e^{-t/\tau}, \quad (4)$$

с функцией деформации $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Уравнение (3) описывает процесс роста поврежденности в зависимости от истории деформирования, и можно утверждать, что постоянная $\tau > 0$ — это время релаксации [9]. Здесь предполагается, что история накопления повреждений начинается в момент времени $\tau = 0$, поскольку в начале процесса в материале стержня нет никаких повреждений ($\psi = 0$). При времени $t \gg \tau$ из уравнения (3) можно найти зависимость, определяющую процесс роста поврежденности в случае медленного изменения напряжений:

$$\psi = \tau \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (5)$$

Используя уравнение (3), перепишем уравнение (2)₁ в виде:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \rho \beta_1 \beta_2 R * \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (6)$$

Учитывая классическое уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad (7)$$

где σ — продольная компонента тензора напряжений, придем к определяющему уравнению для поврежденной среды:

$$\sigma = E(1 - \rho \beta_1 \beta_2 R *) \frac{\partial u}{\partial x} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \rho \beta_1 \beta_2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} u(x, \xi) e^{(\xi-t)/\tau} d\xi \right). \quad (8)$$

Описываемые с помощью этого уравнения материалы, в которых текущее напряженно-деформированное состояние зависит от истории деформаций, получили название материалов, обладающих памятью [5].

Модель материала с памятью может быть построена путем замены постоянных упругих параметров твердых тел на зависящие от времени операторы. Так, в случае поврежденного материала уменьшается упругий отклик внутренних связей на какое-либо внешнее воздействие; поврежденность делает материал более деформируемым. Это явление можно учесть, заменив постоянный модуль Юнга оператором:

$$E_0(t) = E(1 - \rho \beta_1 \beta_2 R *). \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) перепишется в виде:

$$\sigma(\varepsilon) = E_0(t) \varepsilon. \quad (10)$$

Из уравнения (10) следует, что если $t \ll \tau$, то для быстрого нагружения определяющее уравнение представляется как

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = E_d \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (11)$$

Здесь E_d — динамический модуль Юнга.

Напротив, в случае медленного нагружения, когда $t \gg \tau$, определяющее уравнение принимает вид:

$$\sigma = E_d (1 - \tau \rho \beta_1 \beta_2) \frac{\partial u}{\partial x} = \delta E_d \frac{\partial u}{\partial x} = E_s \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12)$$

где $E_s = \delta E_d$ — статический модуль Юнга, а $\delta = 1 - \tau\beta_1\beta_2$ — параметр, характеризующий поврежденность материала, изменяющийся в пределах $[0;1]$. При отсутствии повреждений $\delta = 1$, в то время как разрушенному материалу соответствует значение $\delta = 0$.

4. Особенности распространения поверхностной волны

Будем рассматривать распространение поверхностной волны Релея в изотропном упругом полупространстве при наличии поврежденности его материала (ограничимся двумерным случаем, когда все процессы, направленные по оси x_2 , однородны). Система уравнений (1) становится при этом двумерной:

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = -\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad (13)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} = -\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_3}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha \psi = \beta_2 (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \quad (15)$$

где $u_1(x_1, x_3, t)$, $u_3(x_1, x_3, t)$ — компоненты вектора смещений вдоль осей x_1 и x_3 соответственно; λ , μ — константы Ламе.

Систему уравнений (13)–(15) необходимо дополнить граничными условиями, выражающими отсутствие напряжений на границе полупространства:

$$\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right]_{x_3=0} = 0, \quad (16)$$

$$\left[\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \left(1 - 2 \frac{c_\tau^2}{c_l^2} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]_{x_3=0} = 0, \quad (17)$$

где $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ — скорости распространения волн дилатации и сдвига в безграничной среде.

Исключив функцию поврежденности из системы уравнений (13)–(15), получим два уравнения относительно продольных и поперечных смещений:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_l^2 \left(1 - \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \left(c_m^2 - c_l^2 \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} - \frac{c_l^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial t} - \frac{c_l^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_3^2 \partial t} - \frac{c_m^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_3 \partial t} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} - c_l^2 \left(1 - \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - \left(c_m^2 - c_l^2 \frac{\beta_1 \beta_2}{\alpha} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^3 u_3}{\partial t^3} - \frac{c_l^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} - \frac{c_l^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial t} - \frac{c_m^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_3 \partial t} = 0, \quad (19)$$

где $c_m = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$ (при этом $c_\tau < c_m < c_l$ и $c_m^2 = c_l^2 - c_\tau^2$).

Рассмотрим возмущение, которое распространяется вдоль границы $x_3 = 0$ и затухает в направлении оси x_3 . Компоненты вектора перемещений будут иметь вид:

$$u_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta}{\partial x_3}, \quad u_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \quad (20)$$

где φ — скалярный потенциал ($\text{rot grad } \varphi = 0$), $\theta = \{0, \theta, 0\}$ — ненулевая компонента векторного потенциала ($\text{div rot } \theta = 0$). Выражения для потенциалов следующие:

$$\varphi = A_1 \exp(-q_1 x_3 + i(kx_1 - \omega t)), \quad (21)$$

$$\theta = A_2 \exp(-q_2 x_3 + i(kx_1 - \omega t)), \quad (22)$$

где ω — частота, k — волновое число, q_1, q_2 — положительные коэффициенты, характеризующие убывание возмущений вглубь полупространства, A_1, A_2 — произвольные постоянные.

Из системы (16)–(19) с учетом (20)–(22) найдем дисперсионное уравнение

$$-c_\tau^2 (k^2 - q_1^2)(k^2 + q_2^2) + 2c_\tau^2 k^2 (k^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2) = 0, \tag{23}$$

в котором коэффициенты q_1, q_2 определяются как

$$q_1^2 = k^2 - \frac{(i\omega - \alpha)\omega^2}{(i\omega - \alpha + \beta_1\beta_2)c_\tau^2}, \quad q_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c_\tau^2}. \tag{24}$$

Из соотношений (23), (24) следует, что волновое число k является комплексным: $k = k_1 + ik_2$. Подставив это выражение в комплексное дисперсионное уравнение и выделив действительную и мнимую части, получим систему двух нелинейных алгебраических уравнений.

В предельном случае, когда поврежденность в материале отсутствует, система алгебраических уравнений сводится к дисперсионному уравнению для волны Релея [19, 20], и зависимость волнового числа от частоты имеет вид:

$$\omega^6 - 8k_1^2\omega^4 + 8k_1^4(3 - 2a_1^2)\omega^2 - 16k_1^6(1 - a_1^2) = 0, \tag{25}$$

где $a_1 = c_\tau/c_l$. Дисперсионное уравнение (25) записано в безразмерных переменных $\bar{\omega}, \bar{k}$ ($\omega = \alpha\bar{\omega}, k = (\alpha/c_\tau)\bar{k}$), надчеркивания над символами в записи (25) и в выражениях далее опущены. Безразмерная скорость распространения волны Релея определяется как $c_r = \omega/k_1$. Известно, что классическая волна Релея распространяется вдоль свободной границы полупространства без затухания и не обладает дисперсией, ее скорость является постоянной величиной для каждого материала [19]. Из (23) и (24) видно, что при наличии поврежденности в материале волна Релея затухает в процессе распространения.

Зависимости действительной и мнимой частей волнового числа от частоты при изменении параметра поврежденности и фиксированном параметре a_1 представлены на рисунках 1, 2. Параметр a_1 выражается через коэффициент Пуассона (ν): $a_1 = \sqrt{(1-2\nu)/(2-2\nu)}$, и его значение изменяется в пределах $0 \leq a_1 \leq \sqrt{2}/2$. Безразмерный параметр $a_2 = (\beta_1\beta_2)/\alpha$ характеризует поврежденность материала, его знак

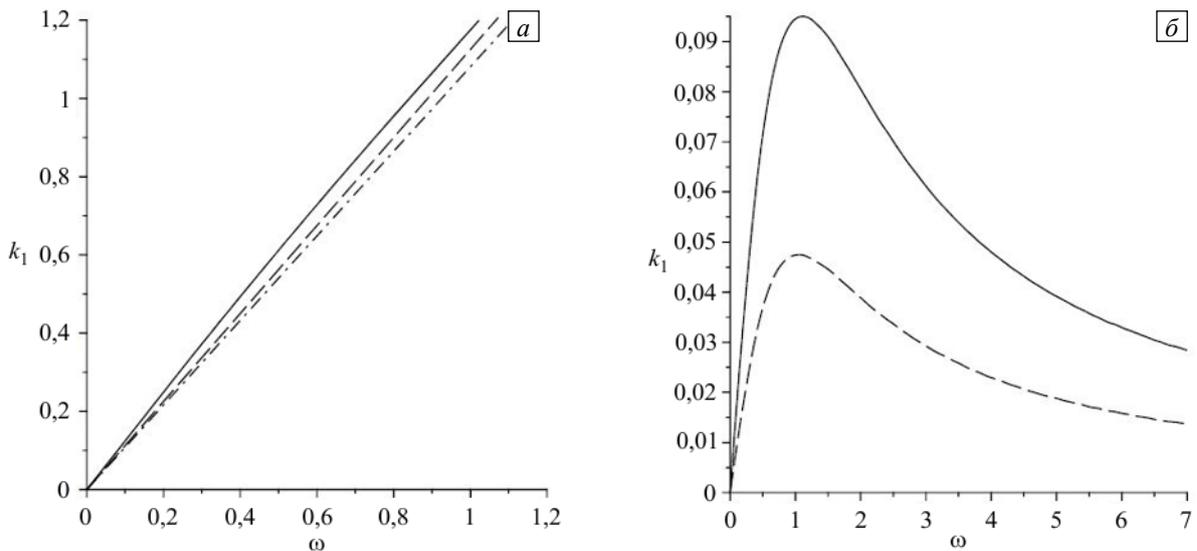


Рис. 1. Зависимости действительной части волнового числа от частоты $k_1(\omega)$ при различных значениях параметра a_2 : -1 (сплошная линия), $-1 < a_2 < 0$ (штриховая линия); асимптота (штрихпунктирная линия) (а) и отклонения рассматриваемой кривой от дисперсионной прямой, соответствующей классической волне Релея (б)

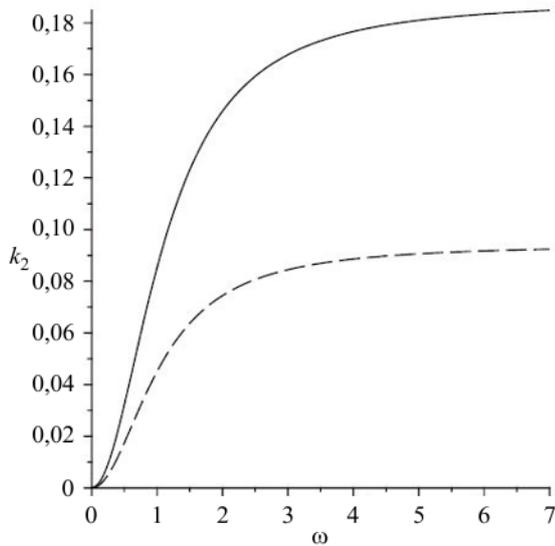


Рис. 2. Зависимости мнимой части волнового числа k_2 от частоты ω при различных значениях параметра a_2 : -1 (сплошная линия), $-1 < a_2 < 0$ (штриховая линия)

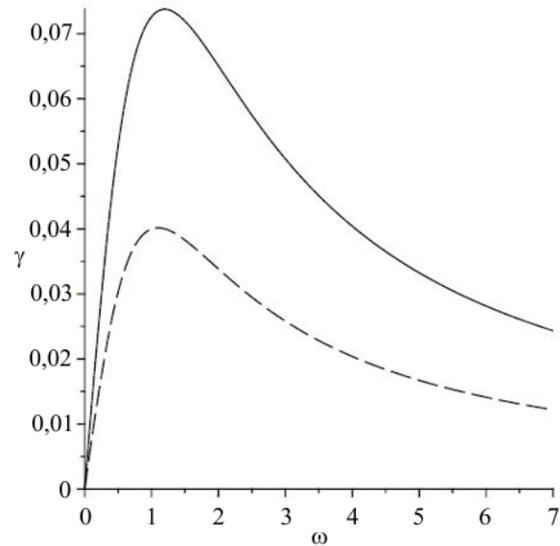


Рис. 3. Зависимости коэффициента затухания $\gamma(\omega)$ при различных значениях параметра a_2 : -1 (сплошная линия), $-1 < a_2 < 0$ (штриховая линия)

зависит от знаков исходных параметров β_1 , β_2 , чаще $a_2 < 0$. При положительных и отрицательных значениях этого параметра дисперсионные кривые имеют принципиально различный вид.

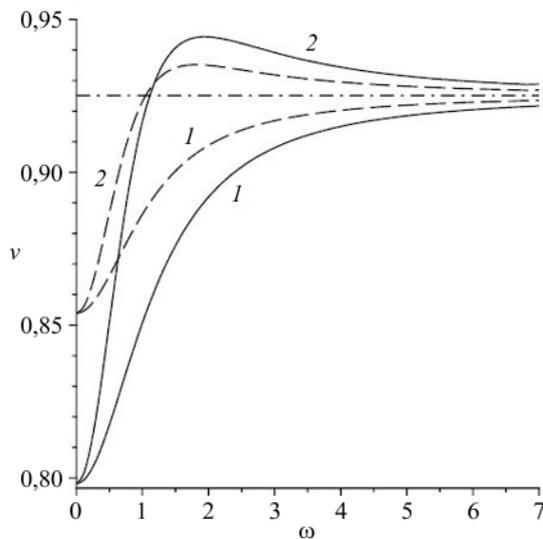


Рис. 4. Зависимости фазовой $v_{ph}(\omega)$ (1) и групповой $v_{gr}(\omega)$ (2) скоростей при различных значениях параметра a_2 : -1 (сплошная линия), $-1 < a_2 < 0$ (штриховая линия); асимптота (штрихпунктирная линия)

$v_{gr} = d\omega/dk_1$ скоростей от частоты изображены на рисунке 4. Видно, что при фиксированном, но не нулевом значении параметра a_2 кривая групповой скорости расположена выше кривой фазовой скорости; на низких частотах очевидна дисперсия. При уменьшении по абсолютной величине значения коэффициента поврежденности у обеих кривых амплитуды уменьшаются, при этом значение фазовой скорости возрастает во всем частотном диапазоне, а значение групповой скорости увеличивается на более низких частотах и уменьшается на более высоких частотах; значение максимума функции групповой скорости падает и сдвигается в сторону низких частот. При $a_2 = 0$ кривые фазовой и групповой скоростей совпадают $v_{ph} = v_{gr} = \text{const}$, и эта константа определяется уравнением (25) и зависит только от коэффициента Пуассона.

При $a_2 \neq 0$ дисперсионные зависимости действительной и мнимой частей от частоты обладают двумя ветвями, причем положительным значениям k_1 соответствуют положительные значения k_2 , а отрицательным k_1 — отрицательные k_2 . Поэтому достаточно рассмотреть эти зависимости в первой четверти. На рисунке 1 изображены функции $k_1(\omega)$ при различных значениях параметра a_2 (Рис. 1а), здесь же (Рис. 1б) приведены две зависимости, которые наглядно показывают существующие отклонения рассматриваемой кривой от дисперсионной прямой [19], соответствующей классической волне Релея. Из рисунка 2 видно, что зависимость $k_2(\omega)$ имеет горизонтальную асимптоту при $\omega \rightarrow +\infty$, а коэффициент затухания $\gamma = k_2/k_1$ стремится к нулю при больших значениях ω (см. Рис. 3). При $a_2 = 0$ графиком зависимости действительной части волнового числа от частоты является прямая, мнимая часть при этом отсутствует.

Зависимости фазовой $v_{ph} = \omega/k_1$ и групповой

В работе [21] приведены результаты исследования распространения волны Релея на частотах 2,5 и 10 МГц вдоль границы образца из стали марки Ст3пс в ненагруженном состоянии и подвергнутом растяжению до появления пластической деформации ($\sigma_{02} < \sigma < \sigma_g$, где $\sigma_g = 470$ МПа — предел прочности, $\sigma_{02} = 300$ МПа — условный предел текучести). Установлено, что в случае ненагруженных образцов и при напряжениях, не превышающих предел упругости, скорость волны Релея не зависит от частоты, то есть дисперсия отсутствует. В области же пластической деформации прослеживалась значимая зависимость скорости от частоты.

5. Заключение

При наличии в среде поврежденности поверхностные волны затухают в процессе распространения вдоль границы полупространства и обладают дисперсией. Поврежденность способствует появлению дисперсии в низкочастотном диапазоне, которая тем меньше, чем меньше коэффициент поврежденности. Дисперсия носит аномальный характер. В отсутствие поврежденности в среде поверхностная волна распространяется без дисперсии и затухания.

Работа выполнена в рамках государственного задания на проведение фундаментальных научных исследований на 2013–2020 г. по теме № 0035-2014-0402 (госрегистрация №01201458047) и при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-08-00715-а).

Литература

1. *Maugin G.A.* The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge University Press, 1992. 368 p.
2. *Lemaitre J.* A course on damage mechanics. Springer-Verlag, 1992. 229 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02761-5>
3. *Krajcinovic D.* Damage mechanics. Elsevier, 1996. 774 p.
4. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 312 с.
5. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. *Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н.* Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
7. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А.* Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // Акустический журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 554-557. (English version <https://doi.org/10.1134/S106377101004024X>)
8. *Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V.* Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum // Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats / Ed. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Springer, 2010. P. 143-148. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8_15
9. *Stulov A., Erofeev V.* Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // Generalized continua as models for classical and advanced materials / Ed. H. Altenbach, S. Forest. Springer, 2016. P. 413-423. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2_19
10. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А.* Локализация волны деформации, распространяющейся в поврежденном материале // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 6. С. 60-62. (English version <https://doi.org/10.3103/S1052618810060087>)
11. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Смирнов С.И.* Акустоупругость поврежденных материалов // Контроль. Диагностика. 2012. № 3. С. 24-26.
12. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Хазов П.А.* Дисперсия и затухание акустической волны, распространяющейся в поврежденном материале // Приволжский научный журнал. 2014. № 4. С. 22-28.
13. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Хазов П.А.* Влияние поврежденности материала на эволюцию акустической волны // Приволжский научный журнал. 2015. № 2. С. 32-41.
14. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е., Хазов П.А.* Анализ дисперсионных свойств упругой волны, распространяющейся в поврежденной струне, лежащей на упругом основании // Приволжский научный журнал. 2016. № 1. С. 45-50.
15. *Ерофеев В.И., Лисенкова Е.Е.* Возбуждение волн нагрузкой, движущейся по поврежденной гибкой одномерной направляющей, лежащей на упругом основании // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2016. № 6. С. 14-18. (English version <https://doi.org/10.3103/S1052618816060054>)
16. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Хазов П.А.* Влияние поврежденности материала на дисперсию, диссипацию и нелинейность акустических волн // Вестник научно-технического развития. 2016. № 5(105). С. 3-11.
17. *Ерофеев В.И., Леонтьева А.В., Мальханов А.О.* Влияние поврежденности материала на распространение продольной магнитоупругой волны в стержне // Вычисл. мех. сплош. сред. 2018. Т. 11, № 4. С. 397-408. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.30>
18. *Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O., Shekoyan A.V.* Nonlinear longitudinal magnetoelastic waves in a rod with account of damage in its material // Material Physics and Mechanics. 2018. Vol. 35. P. 44-52. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.3512018_6
19. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.
20. *Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н.* Волновые процессы в сплошных средах. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2012. 258 с.
21. *Ерофеев В.И., Ильяхинский А.В., Никитина Е.А., Пахомов П.А., Родюшкин В.М.* Метод ультразвукового зондирования при оценке предельного состояния металлоконструкций, связанного с появлением пластических деформаций // Физ. мезомех. 2019. Т. 22, № 3. С. 65-70. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-13007>

References

1. Maugin G.A. *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, 1992. 368 p.
2. Lemaitre J. *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, 1992. 229 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02761-5>
3. Krajcinovic D. *Damage mechanics*. Elsevier, 1996. 774 p.
4. Kachanov L.M. *Osnovy mekhaniki razrusheniya* [Fundamentals of fracture mechanics]. Moscow, Nauka, 1974. 312 p.
5. Rabotnov Yu.N. *Creep problems in structural members*. North-Holland Publishing Company, 1969. 822 p.
6. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii* [Acoustic control of equipment during its manufacture and operation]. Moscow, Nauka, 2009. 280 p.
7. Erofeev V.I., Nikitina E.A. The self-consistent dynamic problem of estimating the damage of a material by an acoustic method. *Acoust. Phys.*, 2010, vol. 56, pp. 584-587. <https://doi.org/10.1134/S106377101004024X>
8. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Sharabanova A.V. Wave propagation in damaged materials using a new generalized continuum. *Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats*, ed. G.A. Maugin, A.V. Metrikine. Springer, 2010. P. 143-148. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-5695-8_15
9. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages. *Generalized continua as models for classical and advanced materials*, ed. H. Altenbach, S. Forest. Springer, 2016. P. 413-423. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31721-2_19
10. Erofeev V.I., Nikitina E.A. Localization of a strain wave propagating in damaged material. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2010, vol. 39, pp. 559-561. <https://doi.org/10.3103/S1052618810060087>
11. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Smirnov S.I. Acoustoelasticity of damaged materials. *Kontrol'. Diagnostika – Control. Diagnostics*, 2012, no. 3, pp. 24-26.
12. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Khazov P.A. Dispersion and attenuation of acoustic waves propagating in the damaged material. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal – Privolzhsky Scientific Journal*, 2014, no. 4, pp. 22-28.
13. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Khazov P.A. Influence of material damage on evolution of an acoustic wave. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal – Privolzhsky Scientific Journal*, 2015, no. 2, pp. 32-41.
14. Erofeev V.I., Lisenkova E.E., Khazov P.A. Analysis of dispersion properties of elastic waves propagating in a damaged string on an elastic foundation. *Privolzhskiy nauchnyy zhurnal – Privolzhsky Scientific Journal*, 2016, no. 1, pp. 45-50.
15. Erofeev V.I., Lisenkova E.E. Excitation of waves by a load moving along a damaged one-dimensional guide lying on an elastic foundation. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2016, vol. 45, pp. 495-499. <https://doi.org/10.3103/S1052618816060054>
16. Erofeev V.I., Nikitina E.A., Khazov P.A. Vliyaniye povrezhdennosti materiala na dispersiyu, dissipatsiyu i nelineynost' akusticheskikh voln [The impact of damage of the material on the dispersion, dissipation and nonlinearity of acoustic waves]. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya – Bulletin of scientific and technological development*, 2016, no. 5(105), pp. 3-11.
17. Erofeev V.I., Leonteva A.V., Malkhanov A.O. Influence of material damage on propagation of a longitudinal magnetoelastic wave in a rod. *Vychisl. mekh. splosh. Sred – Computational Continuum Mechanics*, 2018, vol. 11, no. 4, pp. 397-408. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2018.11.4.30>
18. Erofeev V.I., Leontieva A.V., Malkhanov A.O., Shekoyan A.V. Nonlinear longitudinal magnetoelastic waves in a rod with account of damage in its material. *Material Physics and Mechanics*, 2018, vol. 35, pp. 44-52. http://dx.doi.org/10.18720/MPM.3512018_6
19. Viktorov I.A. *Zvukovyye poverkhnostnyye volny v tverdykh telakh* [Sound surface waves in solids]. Moscow, Nauka, 1981. 287 p.
20. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Soldatov I.N. *Volnovyye protsessy v sploshnykh sredakh* [Wave processes in continuous media]. Sarov, Izd-vo RFYaTs-VNIIEF, 2012. 258 p.
21. Erofeev V.I., Ilyakhinsky A.V., Nikitina E.A., Pakhomov P.A., Rodyushkin V.M. Ultrasonic sensing method for evaluating the limit state of metal structures associated with the onset of plastic deformation. *Fiz. Mezomekh. – Physical Mesomechanics*, 2019, vol. 22, no. 3, pp. 65-70. <https://doi.org/10.24411/1683-805X-2019-13007>

Поступила в редакцию 02.07.2019; после доработки 03.09.2019; принята к опубликованию 09.09.2019

Сведения об авторах

Антонов Артем Михайлович, асп., Институт проблем машиностроения РАН (ИПМ РАН), 603024, г. Нижний Новгород, ул. Белинского, д. 85; e-mail: artem.antonov@autoramblor.ru

Ерофеев Владимир Иванович, дфмн, проф., дир., ИПМ РАН; e-mail: erof.vi@yandex.ru

Леонтьева Анна Викторовна, ктн, снс, ИПМ РАН; e-mail: aleonav@mail.ru