

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.3.24](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.3.24)

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ ФОРЦГЕЙМЕРА С ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНЫМИ ПОРИСТОСТЬЮ И ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Р.Р. Сираев

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Российская Федерация

Теоретически исследовалась фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде, основные характеристики которой – пористость и проницаемость – являются непрерывными функциями координат. Математическая модель базировалась на уравнении Форцгеймера с дополнительным слагаемым, учитывающим неоднородность среды. Численно изучалось влияние неоднородностей параметров пористой среды на фильтрацию в плоском канале. Для упрощения делалось предположение об отсутствии корреляции между пористостью и проницаемостью, которые затем считались независимыми параметрами среды. Полученные результаты свидетельствуют, что в неоднородных пористых средах изменения проницаемости и пористости по-разному влияют на фильтрацию несжимаемой жидкости. В первом случае жидкость, обтекая участки с малой проницаемостью, подчиняется закону Форцгеймера. При смене направления течения на противоположное структура гидродинамических полей (исключение составляет поле скорости) и расход жидкости остаются прежними. В средах с пористостью, зависящей от координат, существует асимметрия течения: скорость фильтрации в направлении возрастания пористости больше, чем в обратном направлении. При наличии внешнего периодического воздействия такая несимметричность может вызвать вторичное осредненное течение. Это проиллюстрировано на задаче фильтрации в канале, заполненном насыщенной пористой средой, при наличии периодического расхода жидкости. Рассмотрен случай, когда внешнее периодическое воздействие имеет высокую по сравнению с гидродинамическими временами частоту, что позволяет применить к системе процедуру осреднения. Получены уравнения, описывающие осредненное течение, существующее на фоне осциллирующего движения. Вторичное движение возникает под действием вибрационной силы, представляемой в уравнениях слагаемым с градиентом пористости, и может зародиться даже при отсутствии постоянного перепада давления. Для одномерного течения получено аналитическое решение. Интенсивность осредненного течения определяется проницаемостью и градиентом пористости среды, амплитудой и частотой периодического воздействия.

Ключевые слова: неоднородная пористая среда, математическая модель фильтрации, асимметрия течения, осциллирующее движение жидкости, вторичное осредненное течение

FLUID TRANSPORT IN FORCHHEIMER POROUS MEDIUM WITH SPATIALLY VARYING POROSITY AND PERMEABILITY

R.R. Siraev

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

Filtration of incompressible fluid in a saturated heterogeneous porous medium is theoretically studied. A mathematical model is based on the Forchheimer equation with an additional term that takes into account the heterogeneity of the medium. The effect of spatially varying permeability and porosity on the filtration in a flat channel is numerically investigated. For simplicity, we make an assumption about the lack of correlation between porosity and permeability and take them as independent parameters of the medium. The results show that the spatial variations of permeability and porosity affect transport in porous media in different ways. In the first case, the fluid flowing around the areas with low permeability obeys the Forchheimer law. The structure of the hydrodynamic fields and the flow rate do not vary when the flow direction changes to the opposite. In the media with varying porosity, the flow asymmetry is observed: filtration rate in the direction of increasing porosity is greater than in the opposite direction. This difference can cause a secondary flow, which is illustrated by the problem studying filtration in a channel with a periodic flow rate. We consider the case when the external periodic action has a high frequency as compared to hydrodynamic times, which provides an application of the averaging procedure to the system. Equations that describe the averaged flow arising on the background of an oscillating motion are obtained. Secondary flow arises on the background of the oscillating motion under the action of the force which is represented as a term with porosity gradient in the equations of the averaged flow and can evolve even in the absence of a constant pressure drop. For one-dimensional flow, an analytical solution is obtained. The intensity of the averaged flow is determined by the permeability and porosity gradient of the medium, as well as by the amplitude and frequency of periodic loads.

Key words: heterogeneous porous medium, mathematical model of fluid filtration, flow asymmetry, oscillating fluid motion, secondary averaged flow

1. Введение

Фильтрационные течения жидкости в неоднородных пористых средах широко распространены в природе и технике и постоянно вызывают повышенный интерес исследователей. Значительное количество работ посвящено изучению конвекции в неоднородной пористой среде, их обзор приводится в книге [1]. Д. Нилд и А. Кузнецов [2, 3] рассматривали влияние на конвекцию неоднородного распределения различных характеристик среды, таких как вязкость жидкости, коэффициент теплопроводности, коэффициент межфазного теплообмена, мощность внутренних источников тепла, проницаемость и пористость.

Другим важным направлением анализа является двухфазная фильтрация в неоднородных многослойных и трещиноватых средах. При совместном движении в неоднородной пористой среде двух несмешивающихся жидкостей возникает ряд факторов, обуславливающих обмен жидкостью между участками с разной проницаемостью. К таким факторам в подобных областях можно отнести как действие капиллярных сил, так и перераспределение давления вследствие различия их насыщенности жидкостью. Учет этих факторов потребовал разработки новых моделей фильтрации. Литература по данным вопросам обширна, обзоры и детальную теорию можно найти в [4–6].

Следует отметить, что модель неоднородной пористой среды используется при теоретическом описании процесса кристаллизации, см., например, [7, 8]. Область фазового перехода можно предполагать пористой средой, поскольку она содержит твердую фазу в виде нарастающих дендритов и жидкую — в виде расплава. При этом пористость меняется как в пространстве (от нуля на кристалле до единицы в расплаве), так и во времени (по мере кристаллизации). К числу распространенных направлений относится и изучение влияния перемешивания жидкой фазы на структуру слитка [9]. В некоторых работах рассматривается периодическое воздействие на область фазового перехода. Успех таких изысканий зависит от наличия работоспособной модели неоднородной пористой среды.

Другая гидродинамическая система, для которой широко используются различные модели однородных или неоднородных пористых сред, — это ячейка Хеле-Шоу (строго говоря, поток Хеле-Шоу возможен, если несжимаемая жидкость движется между двумя плоскими параллельными пластинами, разделенными узкой щелью). Уравнение движения жидкости в приближении Хеле-Шоу отличается от стандартного уравнения Навье–Стокса дополнительным слагаемым, пропорциональным скорости жидкости. Слагаемое описывает гидродинамическое сопротивление широких граней ячейки Хеле-Шоу и аналогично силе Дарси в пористой среде. В настоящее время активно изучаются потоки в гетерогенной ячейке Хеле-Шоу. Так, манипулирование различными физическими свойствами стенок ячейки (что фактически эквивалентно изменению свойств пористой среды в пространстве) позволило успешно контролировать хемогидродинамические потоки в плоском тонком реакторе [10, 11].

Целью настоящей работы является теоретическое исследование фильтрации несжимаемой жидкости в пористой среде с переменными в пространстве пористостью и проницаемостью, представляемыми в виде непрерывных функций координат. Математическая модель основывается на уравнении Форцгеймера с дополнительным слагаемым, учитывающим неоднородность среды. Численно оценивается влияние неоднородности параметров пористой среды на фильтрацию в плоском канале. Изучен эффект асимметрии течения по отношению к направлению градиента пористости. Анализируются фильтрация в канале при наличии периодического расхода жидкости и вторичный усредненный поток, обусловленный колебательным движением.

2. Уравнения фильтрации

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости с плотностью ρ_f и динамической вязкостью μ в канале, заполненном пористым материалом, возникающее под воздействием перепада давления на входе в канал (in) и выходе (out) из него. Материал канала характеризуется коэффициентом пористости ε и проницаемостью K . Будем считать, что пористая среда неоднородна по пространству, то есть ε , K — непрерывные функции координат. Теоретическое изучение фильтрации жидкостей проводится на основе уравнения Дарси, устанавливающего связь между градиентом давления и скоростью фильтрации:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K} \mathbf{V}.$$

Закон Дарси может быть обоснован при помощи общих дифференциальных уравнений гидродинамики — уравнений Навье–Стокса, при условии пренебрежения силами инерции. Однако с увеличением скорости потока в пористой среде роль сил инерции возрастает. При движении жидкости по поровым каналам с высокой скоростью направления и величины скоростей отдельных частиц значительно меняются вследствие извилистости каналов и непостоянства их поперечных размеров, что приводит к нарушению закона Дарси и означает существование больших сил инерции. В этом случае часто используется уравнение Форцгеймера, в котором вследствие учета инерционных эффектов присутствует слагаемое, квадратичное по скорости фильтрации жидкости (см. [1]):

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K} \mathbf{V} - c_F K^{-1/2} \rho_f |\mathbf{V}| \mathbf{V}. \quad (1)$$

Впервые модификация закона Дарси в виде (1) предложена в [12], где считается, что c_F является

универсальной постоянной со значением 0,55. Но в последующем выяснилось, что величина этого коэффициента зависит от природы пористого материала и принимает значения от 0 до 1. Тем не менее авторы многих теоретических работ принимают $c_F = 0,55$.

Для высокопористой среды часто используют модель Бринкмана [13–15], в которой уравнение переноса импульса, наряду с силой сопротивления Дарси, включает силу вязкого трения. В известном смысле она играет роль промежуточной между моделями насыщенной пористой среды Дарси и обычной жидкости. В [13, 15] из уравнения Навье–Стокса методом локального усреднения по объему [16] получено уравнение Бринкмана–Форцгеймера:

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \left(\frac{\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}}{\varepsilon} \right) \right] = -\nabla P + \frac{\mu}{\varepsilon} \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{\mu}{K} \mathbf{V} - c_F K^{-1/2} \rho_f |\mathbf{V}| \mathbf{V}. \quad (2)$$

Численный анализ на основе этого уравнения и экспериментальное исследование [14] показали, что влияние твердой границы и сил инерции заметно проявляется в средах с высокой проницаемостью, в жидкостях с большим числом Прандтля, большими градиентами давления и в области пограничного слоя на передней кромке.

Нестационарное движение в пористой среде имеет ряд особенностей, которые не учитываются в уравнении Дарси. В частности, в осциллирующем течении скорость и ее производные по времени могут принимать большие значения, при этом возрастает роль сил инерции. В ряде работ, например, в [17], рассматриваются течения, в которых определяющую роль играют пульсации скорости, что свидетельствует о необходимости включить в уравнение слагаемые с ускорением. Этим требованиям удовлетворяет уравнение Бринкмана–Форцгеймера (2). Оно упрощается, если интерес представляют фильтрационные течения в пористых средах со средней и низкой проницаемостью, для которых параметр Дарси, равный отношению проницаемости к квадрату характерного размера, мал и в течении отсутствуют пристеночные пограничные слои. В этих случаях в уравнении Бринкмана–Форцгеймера справа слагаемое с вязким сопротивлением становится пренебрежимо малым по сравнению с остальными, а второе слагаемое в левой части представляется в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} \nabla \left(\frac{\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right).$$

Таким образом, для описания нестационарной фильтрации несжимаемой жидкости можно воспользоваться следующей системой уравнений ([18]):

$$\left[\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} \right] = -\frac{\nabla P}{\rho_f} - \frac{\nu}{K} \mathbf{V} - c_F K^{-1/2} |\mathbf{V}| \mathbf{V} - \frac{1}{2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right), \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{n} = \nabla \varepsilon / |\nabla \varepsilon|$ — единичный вектор, направленный вдоль градиента пористости. Последнее слагаемое в уравнении переноса импульса (3) учитывает эффекты, связанные с неоднородностью пористой среды. В предположении, что характеристики пористой среды — пористость и проницаемость, не зависят от координат, данное слагаемое обращается в нуль. Левая часть этого уравнения содержит ускорение, заметно отличающееся от нуля только в задачах с нестационарным движением жидкости, например осцилляциями, в пористой среде.

В системе (3), (4) перейдем к безразмерным величинам. Положим $K = K_0 \kappa$, где K_0 — среднее по каналу значение проницаемости, κ — безразмерная функция координат. Выберем в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости и давления, соответственно, L , L^2/ν , ν/L , $\rho_f \nu^2 / K_0$. Литерой L обозначен характерный размер канала. Тогда уравнения фильтрации, в пренебрежении слагаемыми с ускорением, принимают вид:

$$\nabla p = -\mathbf{v} - c_F (\text{Da} \cdot \kappa)^{1/2} |\mathbf{v}| \mathbf{v} - \frac{1}{2} (\text{Da} \cdot \kappa) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (5)$$

Запишем граничные условия на твердой границе Γ канала и на его входе и выходе:

$$\mathbf{v}_n|_{\Gamma} = 0, \quad p|_{\text{in}} = p_{\text{in}}, \quad p|_{\text{out}} = p_{\text{out}}. \quad (6)$$

В сформулированной задаче интенсивность и характер течения определяются свойствами пористой среды, разностью давлений $\Delta p = p_{\text{out}} - p_{\text{in}}$ и числом Дарси $Da = K_0/L^2$.

3. Фильтрация в неоднородной пористой среде

3.1. Фильтрация в плоском канале при наличии неоднородностей проницаемости и пористости

Краевая задача (5), (6) может быть решена для конкретной геометрии канала и граничных условий, если определена связь проницаемости с пористостью, а если корреляция не прослеживается, необходимо задать проницаемость и пористость как функции координат. В работе И. Козени [19] установлена функциональная зависимость между пористостью и проницаемостью, но только для фиктивных грунтов. Что же касается реальных горных пород, то общей функциональной связи для них не обнаружено; она наблюдается только у отдельных видов пород, например, у песчаников. Поэтому ограничимся предположением об отсутствии корреляции между пористостью и проницаемостью и будем рассматривать их как независимые параметры среды.

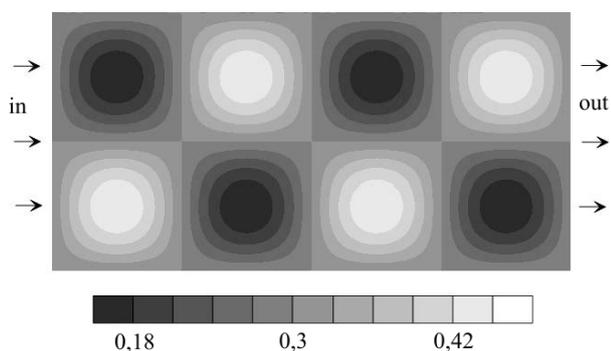


Рис. 1. Распределение функции $k(x, y)$ в канале

Распределение $k(x, y)$ показано на рисунке 1. Темным цветом изображены менее проницаемые участки, светлым — более проницаемые.

Краевая задача (5), (6) решалась численно с использованием метода конечных объемов. На рисунке 2 представлены рассчитанное поле и распределение амплитуды фильтрационной скорости при значениях параметров задачи $Da = 10^{-6}$, $\Delta p = -10^6$, $c_F = 0,55$. Штриховые линии (Рис. 2б) изображают границы между участками с повышенной и пониженной проницаемостью. Скорость фильтрации возрастает на участках с большей проницаемостью и уменьшается там, где проницаемость ниже. Поле амплитуды скорости не изменяется при смене направления скорости на противоположное. Линии тока фильтрационного течения слегка искривлены: жидкость обтекает участки с малой проницаемостью.

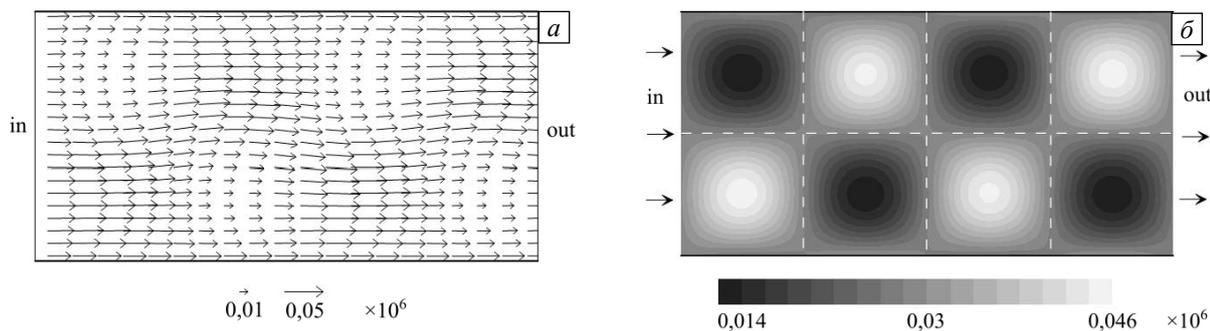


Рис. 2. Поле фильтрационной скорости (а) и распределение ее амплитуды (б) при неоднородной проницаемости канала

Теперь рассмотрим ситуацию, когда пространственная неоднородность среды обусловлена изменением пористости $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon(x, y)$ при постоянной проницаемости $k = 1$. Положим $\varepsilon_0 = 0,3$, тогда $\varepsilon(x, y) = (1 + 0,5 \cdot \sin(2\pi x) \sin(2\pi y))$. На рисунке 3 приводятся распределения амплитуды фильтрационной скорости в канале для противоположных направлений течения жидкости. Из рисунка видно, что скорость

Исследуем установившееся плоское движение жидкости в канале прямоугольной формы с длиной сторон 2:1. Введем декартову систему координат (x, y) с осью x , направленной вдоль канала; вход и выход канала имеют координаты: $x_{\text{in}} = 0$, $x_{\text{out}} = 2$. Пористый материал слоя неоднороден по пространству. Предположим сначала, что проницаемость изменяется по закону

$$K = K_0 k(x, y) = K_0 (1 + 0,5 \cdot \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)),$$

а значение пористости постоянно: $\varepsilon = 0,3$.

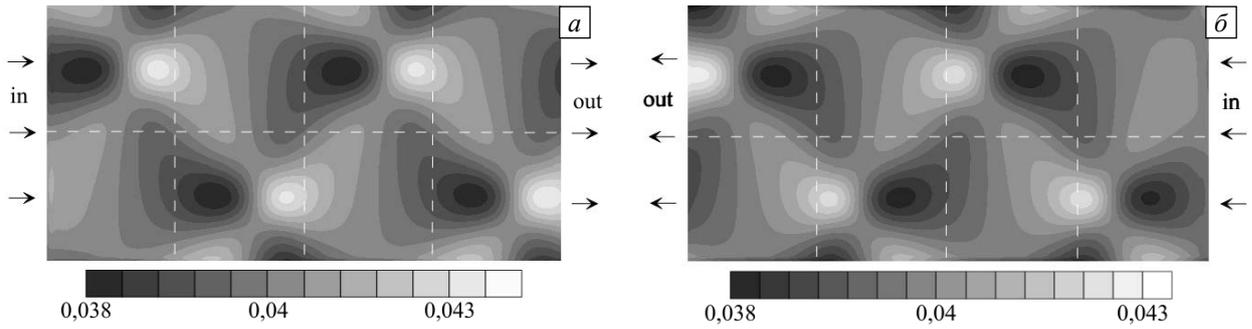


Рис. 3. Распределение амплитуды фильтрационной скорости при неоднородной пористости канала и значениях параметров $Da = 10^{-6}$, $c_F = 0,55$ для противоположных направлений течения жидкости: $\Delta p = -10^6$ (а) и $\Delta p = 10^6$ (б)

возрастает на участках, где градиент пористости положителен, и убывает там, где градиент пористости отрицателен. Таким образом, в случае, когда неоднородность среды определяется пористостью, наблюдается асимметрия течения: жидкость движется в направлении роста пористости среды с большей чем в обратном направлении скоростью. Исследуем этот эффект детальнее на примере одномерного течения.

3.2. Асимметрия течения в канале с изменяющейся пористостью

Рассмотрим одномерное установившееся движение жидкости вдоль оси x декартовой системы координат. Уравнения (5) принимают вид:

$$p' = -v_x - c_F (Da \cdot \kappa)^{1/2} |v_x| v_x - \frac{1}{2} (Da \cdot \kappa) v_x^2 (\varepsilon^{-2})', \quad v_x' = 0. \quad (7)$$

Здесь штрих означает производную по координате x . На входе в канал $x = x_1$ и на выходе $x = x_2$ выполняются граничные условия:

$$x = x_1: p = p_{in}; \quad x = x_2: p = p_{out}. \quad (8)$$

Предположим, что проницаемость среды постоянна и равна: $\kappa = 1$. В этом случае задача (7), (8) имеет решение вида:

$$v_x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad b = x_2 - x_1, \quad c = \Delta p;$$

$$p_1 > p_2: a = \frac{1}{2} Da (\varepsilon_2^{-2} - \varepsilon_1^{-2}) + Da^{1/2} (x_2 - x_1); \quad (9)$$

$$p_1 < p_2: a = \frac{1}{2} Da (\varepsilon_2^{-2} - \varepsilon_1^{-2}) - Da^{1/2} (x_2 - x_1).$$

Для большинства пористых сред число Дарси является малой величиной. В связи с этим, в силу малости произведения $Da \Delta p$, разложим решение (9) в ряд по параметру $4ac/b^2$:

$$v_x = \frac{-b \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}}{2a} \approx \frac{-b \pm b \left(1 + \frac{2ac}{b^2} + \frac{2a^2 c^2}{b^4} \right)}{2a}. \quad (10)$$

В первом приближении разложения должен получиться закон Дарси. Очевидно, что нижний знак «-» в выражении (10) не удовлетворяет этому закону, и ветвь решения с этим знаком должна быть игнорирована как нефизическая. Тогда, раскрывая скобки в (10), получим

$$v_x \approx \frac{c}{b} + a \frac{c^2}{b^3}. \quad (11)$$

Первое слагаемое в (11) соответствует закону Дарси, второе — связано с отклонением от этого закона в силу как инерционных эффектов, так и неоднородности пористой среды. Поскольку коэффициент a содержит число Дарси, то второе слагаемое представляет собой малую добавку, которая проявляется только при относительно больших значениях Da или больших перепадах давления. На рисунке 4 представлена зависимость скорости фильтрации от разности давлений Δp для случая, когда $\varepsilon_1 = 0,3$, $\varepsilon_2 = 0,6$, $Da = 10^{-6}$, $c_F = 0,55$, $x_2 - x_1 = 1$. Существует асимметрия решения при положительных и отрицательных значениях Δp . Для характеристики асимметрии течения введем величину $As = (v_+ + v_-)/v_+$, где v_+ и v_- — значения скорости при положительном и отрицательном Δp . С учетом (11) для небольших перепадов давления ($Da\Delta p \ll 1$) получаем:

$$As \approx Da(\varepsilon_2^{-2} - \varepsilon_1^{-2}) \frac{c}{b^2}. \quad (12)$$

Уравнение фильтрации (7) отличается от уравнения Форцгеймера наличием слагаемого с градиентом пористости. Результаты свидетельствуют, что, если отличие в решениях этих уравнений характеризовать отношением $(v_+ + v_-)/v_0$, где v_0 — скорость, рассчитанная по уравнению Форцгеймера, то оно с точностью до множителя 1/2 совпадает с выражением для характеристики асимметрии точного решения — As . В рассмотренной области параметров величина As мала и имеет значения $10^{-5} \div 7 \cdot 10^{-3}$. Она увеличивается с ростом Δp , график приведен на рисунке 5. Более интенсивное движение жидкости реализуется при $p_{in} > p_{out}$, то есть когда жидкость течет в направлении увеличения пористости среды. Подход, позволяющий учитывать неоднородность пористой среды, является распространенным. В частности, он может быть реализован с помощью CFD-пакетов.

В качестве примера решена задача трехмерного течения в канале квадратного сечения с изменяющейся пористостью на основе пакета ANSYS CFX. Канал имел длину $L = 0,1$ м, вдвое меньшие поперечные размеры, проницаемость заполняющей его пористой среды была постоянной и равнялась $K = 10^{-8} \text{ м}^2$, пористости на входе и выходе различались: $\varepsilon_1 = 0,3$ и $\varepsilon_2 = 0,6$, число Дарси составляло $Da = 10^{-6}$. При описании задачи в ANSYS CFX создавался пористый домен, заполненный водой при температуре 25°C . На входе и выходе канала задавались статические давления p_{in} и p_{out} , на боковой поверхности канала имели место условия непротекания и проскальзывания. В начальный момент жидкость покоилась. Для решения был выбран метод установления стационарного режима. Турбулентность не учитывалась. Количество узлов сетки было не менее $5 \cdot 10^5$. Результаты численного решения представлены на рисунках 4 и 5 треугольными маркерами.

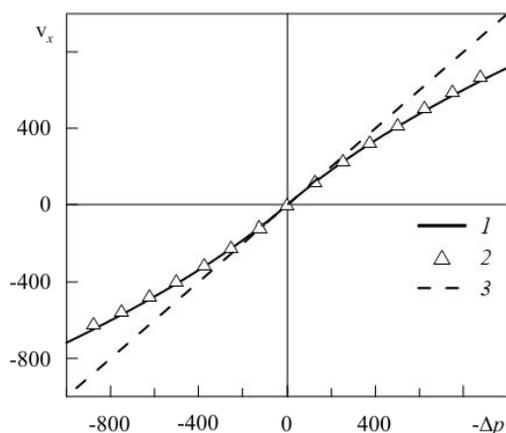


Рис. 4. Зависимость скорости фильтрации от перепада давления: 1 — аналитическое решение, 2 — численное решение, 3 — закон Дарси

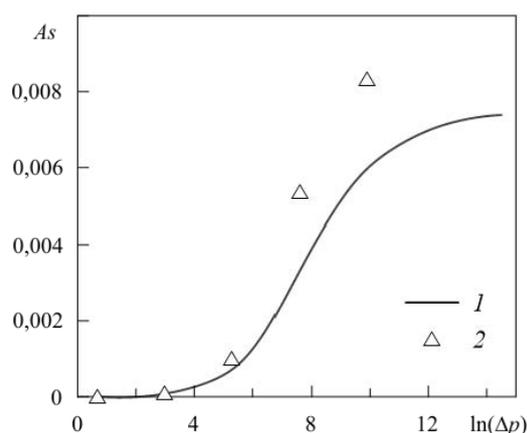


Рис. 5. Показатель асимметрии As в зависимости от $\ln(\Delta p)$: 1 — аналитическое решение, 2 — численное решение

Как видно, в данной задаче применение ANSYS CFX также выявляет асимметрию течения в канале с изменяющейся пористостью. Рассчитанное при этом значение параметра асимметрии превосходит результат, полученный при анализе решения (9). Так, при $\Delta p = 10^3$ разница составляет 36%, и с увеличением Δp она растёт.

Эффекты асимметрии течения могут играть заметную роль при нестационарных течениях в пористой среде. Если течение в канале асимметрично по отношению к разности давлений на входе и выходе, то периодические изменения разности давлений или расхода жидкости могут привести к возникновению осредненного течения.

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в канале, заполненном неоднородной пористой средой. Движение жидкости является результатом действия постоянного перепада давления на входе в канал и выходе из него, а также переменного расхода жидкости, зависящего от времени по гармоническому закону с частотой Ω , амплитудой скорости \mathbf{V}_m и амплитудой скорости фильтрации $\varepsilon \mathbf{V}_m$.

4. Фильтрация в неоднородной пористой среде при наличии периодического воздействия

Фильтрация жидкости в неоднородной среде описывается уравнениями (5). В осциллирующем течении скорость и ее производные по времени могут принимать большие значения, при этом возрастает роль сил инерции. Для анализа воспользуемся системой уравнений (5) и будем учитывать слагаемые с ускорением:

$$\kappa \text{Da} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p - \mathbf{v} - c_F (\kappa \text{Da})^{1/2} |\mathbf{v}| \mathbf{v} - \frac{1}{2} \kappa \text{Da} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (13)$$

Граничные условия сформулируем так: на твердой стенке Γ канала обнулیم нормальную к ней компоненту скорости; на входе (in) зададим скорость и давление, на выходе (out) давление:

$$\mathbf{v}_n|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{v}|_{in} = \varepsilon \mathbf{v}_m \cos(\omega t), \quad p|_{in} = p_{in}, \quad p|_{out} = p_{out}, \quad (14)$$

где $\mathbf{v}_m = \mathbf{V}_m L / \nu$ и $\omega = \Omega L^2 / \nu$ — безразмерные амплитуда скорости и частота вибрации; вектор \mathbf{v}_m направлен по нормали к входной границе.

Дальнейший интерес представляет случай, когда внешнее периодическое воздействие имеет высокую по сравнению с гидродинамическими временами частоту, что позволяет применить процедуру осреднения к системе (13). Помимо ограничения частоты снизу, связанного с применимостью метода осреднения, на частоту накладывается ограничение сверху, обусловленное использованием модели несжимаемой жидкости (при этом длина звуковой волны должна быть намного больше характерного размера). Таким образом, частота вибрации удовлетворяет неравенствам:

$$V_m / L \ll \Omega \ll c / L, \quad v_m \ll \omega \ll cL / \nu, \quad (15)$$

где c — скорость звука.

Для получения осредненных уравнений воспользуемся методом многих масштабов [20]. При высокочастотных вибрациях система (13) содержит малый параметр $\alpha = \omega^{-1}$. Движение можно разбить на быстро и медленно осциллирующие части. Возникает иерархия времен: $t_0 = \alpha^{-1}t$, $t_1 = t$, $t_2 = \alpha t$, $t_3 = \alpha^2 t$, ..., где t_0 — «быстрое» время, порядок величины которого равен периоду вибраций; t_1 , t_2 , t_3 , ... — времена медленных процессов, характерных для вторичных (осредненных) течений.

Разложим переменные, описывающие движение, в ряд по α :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \alpha \mathbf{v}_1 + \dots, \quad p = p_0 + \alpha p_1 + \dots, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial t_0} + \frac{\partial}{\partial t_1} + \alpha \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad (16)$$

Необходимо учитывать, что уравнение (13) содержит два малых безразмерных параметра: α (обусловлен высокой частотой вибраций) и Da (мал вследствие низкой проницаемости пористой среды). Возможны три различных случая соотношения этих параметров: $\alpha \gg \text{Da}$, $\text{Da} = O(\alpha)$ и $\alpha \ll \text{Da}$. Выбор одного из них накладывает ограничение на число Дарси, и, следовательно, на проницаемость пористой среды. Чтобы понять, как это сказывается на течении, проведем оценку. Предположим, что $L \sim 1$ м, $\nu \sim 10^{-6}$ м²/с, $c \sim 1,5 \cdot 10^3$ м/с, $V_m \sim 10^{-3}$ м/с. Тогда, в соответствии с (15), $10^3 \ll \omega \ll 1,5 \cdot 10^9$. Очевидно, что соотношение $\alpha \ll \text{Da}$ соответствует большим значениям числа Дарси, при которых не выполняется взятое в настоящей работе за основу уравнение (3), и в дальнейшем этот случай не рассматривается.

Предположим сначала, что $Da = O(\alpha) = \alpha Da_*$, где Da_* представляет собой новый безразмерный конечный параметр задачи. В дальнейшем будем считать проницаемость постоянной: $\kappa = 1$. Подставляя ряд (16) в уравнение (13), в главном порядке разложения по α получим:

$$Da_* \varepsilon^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial t_0} = -\nabla p_0 - \mathbf{v}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0.$$

Решения системы можно записать в виде:

$$\mathbf{v}_0 = \operatorname{Re}(\mathbf{w} e^{i t_0}), \quad p_0 = \operatorname{Re}(q e^{i t_0}).$$

Уравнения для амплитуд пульсационных полей \mathbf{w} и q имеют вид [21]:

$$i Da_* \varepsilon^{-1} \mathbf{w} = -\nabla q - \mathbf{w}, \quad \nabla \cdot \operatorname{Re}(\mathbf{w}) = 0. \quad (17)$$

Изменим масштаб переменной \mathbf{w} , выделив из нее множитель $\mathbf{w} = \mathbf{w}_r (1 - Da_* \varepsilon^{-1})$. Тогда вместо (17) получим:

$$\left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2}\right) \mathbf{w}_r = -\nabla q, \quad \nabla \cdot \mathbf{w}_r = 0. \quad (18)$$

Первое уравнение этой системы можно преобразовать как

$$-\nabla \cdot \left(\left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2}\right)^{-1} \nabla q \right) = \nabla \cdot \mathbf{w}_r = 0.$$

Поскольку в результате действия линейного действительного оператора на поле q получается нуль, это поле вещественно. Из (18) следует, что \mathbf{w}_r также вещественно. Модуль \mathbf{w}_r связан с модулем \mathbf{w} соотношением:

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{w}_r| \sqrt{1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2}}.$$

Для того чтобы получить замкнутые уравнения для осредненных величин, запишем разложение по α следующего порядка:

$$\frac{Da_*}{\varepsilon^2} (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_1 - \mathbf{v}_1 - c_F Da_*^{1/2} \alpha^{-1/2} |\mathbf{v}_0| \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} Da_* (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right), \quad (19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

В уравнениях (19) проведем осреднение по времени быстрых процессов — t_0 . Средние от нелинейных по скорости слагаемых вычисляются следующим образом:

$$\frac{Da_*}{\varepsilon^2} \left\langle \nabla \left(\frac{\mathbf{v}_0 \otimes \mathbf{v}_0}{\varepsilon} \right) \right\rangle = \frac{Da_*}{\varepsilon^2} \left\langle \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{Da_*}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2} \right) (\mathbf{w}_r \nabla) \mathbf{w}_r + \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2} \right) \right) (\mathbf{w}_r \cdot \mathbf{n})^2 \right],$$

$$c_F Da_*^{1/2} \alpha^{-1/2} \langle |\mathbf{v}_0| \mathbf{v}_0 \rangle = 0,$$

где угловые скобки означают осреднение по времени. Опустим индекс '1' у величины p_1 , индекс 'r' у переменной \mathbf{w}_r и переобозначим \mathbf{v}_1 в \mathbf{u} . В результате получим систему:

$$\begin{aligned} \nabla p = -\mathbf{u} - \frac{1}{2} \frac{Da_*}{\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2} \right) (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} + \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2} \right) (\mathbf{w} \mathbf{n})^2 \right) \right], \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{w} = -\nabla q, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения (20) описывают осредненное течение, возникающее на фоне осциллирующего движения. Вторичное движение является результатом действия вибрационной силы, которая представлена в уравнениях слагаемым с градиентом пористости.

Граничные условия в безразмерных переменных принимают вид:

$$u_n|_{\Gamma} = 0, \quad w_n|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{w}|_{in} = \mathbf{v}_m \varepsilon / \sqrt{1 + Da_*^2 / \varepsilon^2}, \quad \Delta p = p_{out} - p_{in}. \quad (21)$$

В краевой задаче (20), (21) интенсивность и характер течения определяются свойствами пористой среды, разностью давлений Δp , амплитудой пульсаций скорости v_m , безразмерной частотой ω и числом Da_* .

Рассмотрим еще один случай соотношения малых параметров: $\alpha \gg Da$. Для уменьшения общности сузим его до $Da = \alpha^n Da_*$, где $1 < n < 2$. В разложении с нулевым порядком α имеем:

$$0 = -\nabla p_0 - \mathbf{v}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0.$$

Решения системы с учетом граничного условия (14) будем искать в виде:

$$\mathbf{v}_0 = \text{Re}(\mathbf{w} e^{i t_0}), \quad p_0 = \text{Re}(q e^{i t_0}).$$

Тогда уравнения для амплитуд запишутся как

$$\mathbf{w} = -\nabla q, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0.$$

В разложении при следующих степенях α необходимо оставить слагаемые, порядок которых по малым параметрам равен 2. При этом в осредненные уравнения не войдет слагаемое с силой, вызывающей вторичное течение, содержащее α более высокого порядка. Но, поскольку целью работы является оценка именно эффекта, вторичного течения, повысим порядок разложения путем включения слагаемых с α до 3-й степени. После сокращения на общий множитель α^2 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{Da_*}{\varepsilon^2} (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_1 - \mathbf{v}_1 - \alpha^{(1/2)^{n-1}} c_F Da_*^{1/2} |\mathbf{v}_0| \mathbf{v}_0 - \alpha^{n-1} \frac{1}{2} Da_* (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n})^2 \nabla \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

В уравнении фильтрации в (22), как и в (19), содержится слагаемое с полуцелым порядком по α , меньшим, чем в остальных слагаемых. Однако при осреднении это слагаемое исчезает. Уравнения осредненного течения приобретают вид:

$$\begin{aligned} \nabla p = -\mathbf{u} + \frac{\alpha^{n-1}}{2} Da_* \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon^3} (\mathbf{w} \mathbf{n})^2 - \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{w} \nabla) \mathbf{w} \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{w} = -\nabla q, \quad \nabla \cdot \mathbf{w} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Они содержат параметр α^{n-1} , который становится малым по мере увеличения степени от 0 до 1. Это говорит о том, что вторичное течение в неоднородной пористой среде при периодическом силовом воздействии имеет смысл учитывать при $Da = O(\alpha)$, в то время как при малых числах Дарси $\alpha \gg Da$ оно становится пренебрежимо слабым.

В дальнейшем будем считать $Da = O(\alpha) = \alpha Da_*$.

4.1. Пример осредненного течения: одномерный фильтрационный поток

Рассмотрим одномерное движение жидкости вдоль оси x декартовой системы координат. Оно описывается уравнениями:

$$p' = -u_x - \frac{1}{2} \frac{Da_*}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2} \right) \right)' w_x^2, \quad w_x = -q', \quad w_x' = 0, \quad u_x' = 0. \quad (24)$$

В уравнениях (24) штрих означает производную по координате x . На входе в канал $x = x_1$ и на выходе $x = x_2$ выполняются граничные условия (21). Решение данной задачи имеет вид:

$$u_x = - \left(\Delta p + \frac{1}{2} Da_* v_m^2 \sigma \right) / (x_2 - x_1), \quad \text{где } \sigma \equiv -\ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + \ln \frac{1 + Da_*^2 / \varepsilon_2^2}{1 + Da_*^2 / \varepsilon_1^2}. \quad (25)$$

Предположим, что канал состоит из двух частей: прямолинейного участка насыщенной пористой среды между точками $x = x_1$, $x = x_2$ и замыкающего его жидкого контура с низким сопротивлением; внешний градиент давления отсутствует: $p_{in} = p_{out}$. Тем не менее, если на входе и выходе из канала пористость среды различна, возникает вторичное осредненное течение жидкости с постоянной скоростью, направленной в сторону увеличения пористости. Величина размерной осредненной скорости U_x определяется из выражений (16) и (25) и равна

$$U_x = \alpha u_x \frac{v}{L} = \frac{1}{2} \frac{Da_* V_m^2}{L \Omega} \sigma. \quad (26)$$

Оценим эту скорость. Допустим, что канал длиной 10^{-1} м заполнен пористым материалом с постоянной проницаемостью 10^{-7} м^2 и неоднородной пористостью, меняющейся от значения 0,2 на входе до значения 0,3 на выходе. Пористый материал канала насыщен средой с кинематической вязкостью $10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$; амплитуда пульсации скорости на входе в канал составляет 10^{-2} м/с , частота — 10 Гц. В этом случае $v_m = 10^3$, $\omega = 10^5$, $Da = 10^{-5}$, $Da_* = 1$, $\sigma \approx 1,17$. Безразмерная осредненная скорость в отсутствие разности давлений Δp , согласно выражениям (25) и (16), будет равняться 5,85, а размерная скорость — $5,85 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$, что составляет 0,6% от амплитуды периодического воздействия. Из (26) следует, что отношение U_x / V_m пропорционально амплитуде колебаний скорости V_m .

4.2. Плоскорадиальный поток

Рассмотрим одномерное движение вдоль радиального направления цилиндрической системы координат. Такое течение возникает, например, в нефтедобыче, когда скважина радиусом r_1 располагается в центре горизонтального кругового пласта постоянной толщины с внешним радиусом r_2 . Уравнения (20) в этом случае принимают вид:

$$p' = -u_r - \frac{1}{2} \frac{Da_*}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} \left(1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2} \right) \right)' w_r^2, \quad w_r = -q', \quad (r w_r)' = 0, \quad (r u_r)' = 0.$$

Здесь штрих означает производную по радиальной координате r .

При заданных на внутренней цилиндрической границе $r = r_1$ пульсационной компоненте скорости $w_r = v_m$ и давлении p_{in} , на внешней границе $r = r_2$ — давлении p_{out} решение задачи будет следующим:

$$u_r = \frac{1}{r \ln(r_2 / r_1)} \left(-\Delta p + \frac{1}{2} Da_* (r_1 v_m)^2 \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\varepsilon'}{r^2 \varepsilon} dr - \int_{r_1}^{r_2} \frac{\varphi'}{r^2 \varphi} dr \right) \right), \quad \varphi \equiv 1 + \frac{Da_*^2}{\varepsilon^2}.$$

5. Заключение

В неоднородных пористых средах изменения проницаемости и пористости по-разному влияют на фильтрацию несжимаемой жидкости. В первом случае скорость фильтрации возрастает на участках с большей проницаемостью и уменьшается там, где проницаемость ниже. Жидкость обтекает участки с малой проницаемостью и подчиняется закону Форцгеймера. В средах с изменяющейся пористостью уравнение фильтрации следует дополнять слагаемым с градиентом пористости. При этом скорость

фильтрации в направлении возрастания пористости имеет большее значение, чем в противоположном направлении. Эффект асимметрии относительно слабый: различие в скоростях составляет десятые доли процента. При наличии периодического воздействия в неоднородной пористой среде возникает вторичное течение, направленное в сторону увеличения пористости.

Влияние неоднородности пористых сред на структуру фильтрационного течения может быть использовано для управления этими течениями. Так обсуждаемая в подразделе 4.2 задача моделирует реальную ситуацию, имеющую место в нефтедобыче. Как правило, скважины в нефтеносном пласте бурят либо вблизи естественных трещин, либо создают их искусственно. Это позволяет улучшить характеристики скважин. Однако проблемой остается то, что нефть, расположенная вдали от трещины в слоях с низкой пористостью, остается недоступной. В качестве одного из решений проблемы можно предложить применение периодического воздействия на течение в скважине, вследствие чего может образоваться переток жидкости из низкопористых слабопроницаемых участков в зоны с высокой пористостью, например, в трещины. Интенсивность этого течения зависит как от перепада пористости, так и от амплитуды периодического воздействия.

Результаты, показанные в данной статье, могут иметь отношение не только к пористым средам. Например, известно, что течение в ячейке Хеле-Шоу при узком зазоре между пластинами носит потенциальный характер, который присущ и течениям при малых числах Рейнольдса. Уравнение потенциального течения жидкости в ячейке Хеле-Шоу по структуре совпадает с законом фильтрации Дарси, что позволяет связать характеристики ячейки и пористой среды. Так, проницаемость ячейки Хеле-Шоу определяется выражением $K = b^2/12$, где b — величина зазора между пластинами. Таким образом, течение в пористой среде с изменяющимся коэффициентом проницаемости эквивалентно потенциальному течению в ячейке Хеле-Шоу при изменяющемся зазоре между пластинами.

Автор благодарит заведующего кафедрой прикладной физики Д.А. Брацуна (Пермь) за полезное обсуждение.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Правительства Пермского края (соглашение №С-26/174.2).

Литература

1. *Nield D.A., Bejan A.* Convection in porous media. Springer-Verlag, 2017. 988 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0>
2. *Nield D.A., Kuznetsov A.V., Barletta A., Celli M.* The onset of convection in a sloping layered porous medium: Effects of local thermal non-equilibrium and heterogeneity // *Transp. Porous. Med.* 2016. Vol. 114. P. 87-97. <https://doi.org/10.1007/s11242-016-0728-5>
3. *Nield D.A., Kuznetsov A.V., Barletta A., Celli M.* Local thermal non-equilibrium and heterogeneity effects on the onset of double-diffusive convection in an internally heated and soluted porous medium // *Transp. Porous. Med.* 2015. Vol. 109. P. 393-409. <https://doi.org/10.1007/s11242-015-0525-6>
4. *Coutelieis F.A., Delgado J.M.P.Q.* Transport processes in porous media. Springer-Verlag, 2012. 236 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-27910-2>
5. *Multiphase flow handbook: 2nd edition / Ed. C.T. Crowe, J.D. Schwarzkopf.* Taylor&Francis, 2016. 1420 p.
6. *van Duijn C.J., Cao X., Pop I.S.* Two-phase flow in porous media: Dynamic capillarity and heterogeneous media // *Transp. Porous. Med.* 2016. Vol. 114. P. 283-308. <https://doi.org/10.1007/s11242-015-0547-0>
7. *Boussinot G., Apel M.* Phase field and analytical study of mushy zone solidification in a static thermal gradient: From dendrites to planar front // *Acta Mater.* 2017. Vol. 122. P. 310-321. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.09.053>
8. *Александров Д.В., Александрова И.В., Иванов А.А., Малыгин А.П., Низовцева И.Г.* Нелинейный анализ устойчивости затвердевания с областью фазового перехода // *Расплавы.* 2014. № 2. С. 27-43. (English version <https://doi.org/10.1134/S0036029514080035>)
9. *Zhang Y.H., Rübiger D., Eckert S.* Solidification of pure aluminium affected by a pulsed electrical field and electromagnetic stirring // *J. Mater. Sci.* 2016. Vol. 51. P. 2153-2159. <https://doi.org/10.1007/s10853-015-9525-8>
10. *Брацун Д.А., Де Вум А.* Об управлении хемоконвективными структурами в плоском реакторе // *ЖТФ.* 2008. Т. 78, № 2. С. 6-13. (English version <https://doi.org/10.1134/S1063784208020023>)
11. *Брацун Д.А., Сираев Р.Р.* Управление перемешиванием в проточном микрореакторе с заданным варьированием ширины зазора // *Вестник ПГУ. Физика.* 2017. № 4 (38). С. 26-36. <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2017-4-26-36>
12. *Ward J.C.* Turbulent flow in porous media // *Journal of the hydraulics division.* 1964. Vol. 90. No. 5. P. 1-12.
13. *Vafai K., Tien C.L.* Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1981. Vol. 24. P. 195-203. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(81\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(81)90027-2)
14. *Vafai K., Tien C.L.* Boundary and inertia effects on convective mass transfer in porous media // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1982. Vol. 25. P. 1183-1190. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(82\)90212-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(82)90212-5)
15. *Hsu C.T., Cheng P.* Thermal dispersion in a porous medium // *Int. J. Heat Mass Tran.* 1990. Vol. 33. P. 1587-1597. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(90\)90015-M](https://doi.org/10.1016/0017-9310(90)90015-M)
16. *Whitaker S.* The method of volume averaging. Springer Science & Business Media, 1999. 221 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3389-2>
17. *Сираев Р.Р., Якушин В.И.* Исследование конвекции в горизонтальном цилиндрическом слое насыщенной пористой среды // *Изв. РАН. МЖГ.* 2008. № 2. С. 240-247. (English version <https://doi.org/10.1134/S0015462808020087>)

18. Сираев Р.Р. Фильтрация жидкости в неоднородной пористой среде // *Фундаментальные исследования*. 2013. № 11-3. С. 451-455.
19. Kozeny J. Uber Kapillare Leitung der Wasser in Boden // *Royal Academy of Science, Vienna, Proc. Class I*. 1927. Vol. 136. P. 271-306.
20. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений. М: Мир, 1984. 535 с.
21. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Муратов И.Д., Шишкина Е.А. Влияние вибраций на возникновение конвекции в системе горизонтального слоя чистой жидкости и слоя пористой среды, насыщенной жидкостью // *Изв. РАН. МЖГ*. 2008. № 5. С. 132-143. (English version <https://doi.org/10.1134/S001546280805013X>)

References

1. Nield D.A., Bejan A. *Convection in porous media*. Springer-Verlag, 2017. 988 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-49562-0>
2. Nield D.A., Kuznetsov A.V., Barletta A., Celli M. The onset of convection in a sloping layered porous medium: Effects of local thermal non-equilibrium and heterogeneity. *Transp. Porous. Med.*, 2016, vol. 114, pp. 87-97. <https://doi.org/10.1007/s11242-016-0728-5>
3. Nield D.A., Kuznetsov A.V., Barletta A., Celli M. Local thermal non-equilibrium and heterogeneity effects on the onset of double-diffusive convection in an internally heated and soluted porous medium. *Transp. Porous. Med.*, 2015, vol. 109, pp. 393-409. <https://doi.org/10.1007/s11242-015-0525-6>
4. Coutelieres F.A., Delgado J.M.P.Q. *Transport processes in porous media*. Springer-Verlag, 2012. 236 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-27910-2>
5. *Multiphase flow handbook: 2nd edition*, ed. C.T. Crowe, J.D. Schwarzkopf. Taylor&Francis, 2016. 1420 p.
6. van Duijn C.J., Cao X., Pop I.S. Two-phase flow in porous media: Dynamic capillarity and heterogeneous media. *Transp. Porous. Med.*, 2016, vol. 114, pp. 283-308. <https://doi.org/10.1007/s11242-015-0547-0>
7. Boussinot G., Apel M. Phase field and analytical study of mushy zone solidification in a static thermal gradient: From dendrites to planar front. *Acta Mater.*, 2017, vol. 122, pp. 310-321. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2016.09.053>
8. Alexandrov D.V., Alexandrova I.V., Ivanov A.A., Malygin A.P., Nizovtseva I.G. Nonlinear analysis of the stability of solidification with a mushy zone. *Russ. Metall.*, 2014, vol. 2014, pp. 606-617. <https://doi.org/10.1134/S0036029514080035>
9. Zhang Y.H., Rübiger D., Eckert S. Solidification of pure aluminium affected by a pulsed electrical field and electromagnetic stirring. *J. Mater. Sci.*, 2016, vol. 51, pp. 2153-2159. <https://doi.org/10.1007/s10853-015-9525-8>
10. Bratsun D.A., De Wit A. Control of chemoconvective structures in a slab reactor. *Tech. Phys.*, 2008, vol. 53, pp. 146-153. <https://doi.org/10.1134/S1063784208020023>
11. Bratsun D.A., Siraev R.R. Control of mixing in a continuous-flow microreactor with a varied gap width. *Vestnik PGU. Fizika – Bulletin of Perm University. Physics*, 2017, no. 4 (38), pp. 26-36. <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2017-4-26-36>
12. Ward J.C. Turbulent flow in porous media. *Journal of the hydraulics division*, 1964, vol. 90, no. 5, pp. 1-12.
13. Vafai K., Tien C.L. Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1981, vol. 24, pp. 195-203. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(81\)90027-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(81)90027-2)
14. Vafai K., Tien C.L. Boundary and inertia effects on convective mass transfer in porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1982, vol. 25, pp. 1183-1190. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(82\)90212-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(82)90212-5)
15. Hsu C.T., Cheng P. Thermal dispersion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 1990, vol. 33, pp. 1587-1597. [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(90\)90015-M](https://doi.org/10.1016/0017-9310(90)90015-M)
16. Whitaker S. *The method of volume averaging*. Springer Science & Business Media, 1999. 221 p. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3389-2>
17. Siraev R.R., Yakushin V.I. Investigation of convection in a horizontal cylindrical layer of a saturated porous medium. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, pp. 240-247. <https://doi.org/10.1134/S0015462808020087>
18. Siraev R.R. Filtration of incompressible fluid in a heterogeneous porous medium. *Fundamental'nyye issledovaniya – Fundamental research*, 2013, no. 11-3, pp. 451-455.
19. Kozeny J. Uber Kapillare Leitung der Wasser in Boden. *Royal Academy of Science, Vienna, Proc. Class I*, 1927, vol. 136, pp. 271-306.
20. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, 1981. 519 p.
21. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Muratov I.D., Shishkina E.A. Vibration effect on convection onset in a system consisting of a horizontal pure liquid layer and a layer of liquid-saturated porous medium. *Fluid Dyn.*, 2008, vol. 43, pp. 789-798. <https://doi.org/10.1134/S001546280805013X>

Поступила в редакцию 21.05.2019; после доработки 02.09.2019; принята к опубликованию 03.09.2019

Сведения об авторе

Сираев Рамиль Рифгатович, кфмн, доц., Пермский национальный исследовательский политехнический университет (ПНИПУ), 614990, г. Пермь, Комсомольский пр-т, д. 29; e-mail: RRSiraev@pstu.ru, ORCID: 0000-0002-0756-4795