

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.2.20](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.20)

УДК 532.51

## НЕЛИНЕЙНОЕ ИЗОБАРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОМ СЛОЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

В.В. Привалова<sup>1,2</sup>, Е.Ю. Просвиряков<sup>1,2</sup><sup>1</sup> *Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация*<sup>2</sup> *Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Екатеринбург, Российская Федерация*

В работе исследуется новое точное решение системы уравнений Навье–Стокса, описывающее изобарическое трехмерное нелинейное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном горизонтальном слое с проницаемыми границами. Проницаемые границы слоя позволяют реализовать отсос или вдув жидкости в вертикальном направлении. Осуществлено обобщение неоднородного слоистого течения типа течения Куэтта на трехмерный случай. Анонсируемое точное решение принадлежит классу Линя, в котором поле скоростей является линейной формой относительно двух пространственных горизонтальных координат с коэффициентами, зависящими от третьей (поперечной) координаты. Его можно рассматривать как представление трехмерного течения вертикально завихренной жидкости, применимое для изображения крупномасштабных процессов в океанологии и физике атмосферы. Вертикальная закрутка в невращающейся жидкости возникает вследствие учета сил инерции в уравнениях движения и неоднородного распределения скоростей на верхней недеформируемой проницаемой границе слоя. Проведено исследование неоднородного поля скоростей при использовании на нижней границе условия проскальзывания Навье. Особое внимание уделено случаю равенства нулю проскальзывания (условию прилипания). Изучено поле скоростей при произвольном значении параметра Навье. Построенное точное решение учитывает противотечения вязкой несжимаемой жидкости. Кроме того, в результате анализа решения показано существование застойных точек в течении вертикально завихренной жидкости в бесконечном слое с проницаемыми границами. При задании условий прилипания и проскальзывания Навье на нижней границе в потоке жидкости регистрируется только одна застойная точка. Таким образом, полученное точное решение уравнений Навье–Стокса моделирует новый механизм переноса момента импульса в жидкости, иллюстрирует возникновение вертикальной завихренности в невращающейся жидкости. Вертикальная закрутка индуцируется неоднородным полем скоростей на границах слоя жидкости.

*Ключевые слова:* точное решение, проницаемые границы, вертикальная закрутка, противотечение, застойная точка, условие проскальзывания Навье

## NONLINEAR ISOBARIC FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN A THIN LAYER WITH PERMEABLE BOUNDARIES

V.V. Privalova<sup>1,2</sup> and E.Yu. Prosviryakov<sup>1,2</sup><sup>1</sup> *Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*<sup>2</sup> *Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Ekaterinburg, Russian Federation*

A new exact solution of the Navier-Stokes equations system is investigated. This solution describes an isobaric three-dimensional nonlinear flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. Permeable layer boundaries allow one to realize fluid suction or injection in a vertical direction. Thus, a generalization of the non-uniform layered Couette-type flow to the three-dimensional case is obtained. The announced exact solution belongs to the Lin class. The velocity field is a linear form with respect to two spatial horizontal coordinates with coefficients depending on the third (transverse) coordinate in this class. The obtained exact solution describes a three-dimensional flow of a vertically vortex fluid, which can be used to describe large-scale processes in oceanology and in atmospheric physics. The obtained exact solution describes a large-scale flow of a vertical vortex fluid in the thin layer approximation. Vertical twist in a non-rotating fluid arises due to the inclusion of inertial forces in the motion equations and the velocities inhomogeneous distribution on the upper non-deformable permeable boundary of the layer. A non-uniform velocity field is studied using the Navier slip condition on the lower boundary. Additionally, the case of equality to zero of the slip length (sticking condition) is analyzed. The velocity field is studied for an arbitrary value of the Navier parameter. The obtained exact solution allows one to describe the counterflows of a viscous incompressible fluid. The obtained solution is analyzed and the existence of stagnation points in the vertical vortex fluid flow in an infinite layer with permeable boundaries is shown. Only one stagnation point is recorded in the fluid flow, when the no-slip and Navier slip conditions at the lower boundary are realized. Thus, the obtained exact solutions of the Navier–Stokes equations describe a new angular momentum transfer mechanism in a fluid. This exact solution illustrates the existence of vertical vorticity in a non-rotating fluid. Vertical twist is induced by a non-uniform velocity field at the boundaries of the fluid layer.

*Key words:* exact solution, permeable boundaries, vertical vortex, counterflow, stagnation point, Navier slip condition

### 1. Введение

Построение точных решений уравнений Навье–Стокса, дополненных уравнением несжимаемости, является актуальной и сложной задачей. Актуальность данной проблемы подтверждается применением результатов точного интегрирования уравнений Навье–Стокса при конструировании технических устройств, например, вискозиметра Куэтта, дискового электрода Левича [1]. Известно несколько методик нахождения точных решений уравнений гидродинамики [1–4]. Групповой анализ [1, 3] и классы точных решений [1] чаще всего используются для интегрирования уравнений Навье–Стокса.

Среди семейств точных решений особо выделяется класс решений Ц.Ц. Линя [5], который характеризуется линейной зависимостью скоростей от части координат. Он был предложен для интегрирования уравнений магнитной гидродинамики, хотя большинство полученных точных решений уравнений Навье–Стокса до публикации статьи [5] имело структуру поля скоростей, характерную для данного класса. Позднее показано [1, 6], что в этом классе существует еще много точных решений для изотермических течений жидкости. Поля скоростей Линя позволили построить классы точных решений для конвективных [7, 8] и термодиффузионных [9] течений вязкой несжимаемой жидкости. Обобщение решения Линя уравнений Навье–Стокса для поля скоростей, зависящего нелинейно от части координат, приведено в статьях [10, 11].

Классы точных решений, опубликованные в [1, 9, 11], и их частные случаи применяются при описании крупномасштабных течений в Мировом океане и движений в атмосфере [7, 12, 13, 15]. Именно это семейство точных решений дает возможность исследовать потоки в тонком слое жидкости [14–19]. Для изучения течений в тонком слое жидкости наиболее часто прибегают к квазидвумерным моделям сдвиговых течений, которые могут быть распространены и на крупномасштабные процессы [7, 15, 20]. В этом случае пренебрегают поперечной скоростью потока (или считают постоянной вертикальную скорость жидкости), упрощая таким образом процесс интегрирования уравнений Навье–Стокса [17].

Изобарические потоки вязкой несжимаемой жидкости вызывают наибольший интерес в крупномасштабных течениях [21, 22]. Точные решения, линейные по части координат, соответствуют потоку вертикально завихренной жидкости. Вертикально ориентированный вихрь в жидкости возникает из-за учета сил инерции и неравномерного распределения скоростей или касательных напряжений на границах слоя жидкости. Это решение позволяет описать встречные потоки и усиление скоростей в тонком слое вязкой несжимаемой жидкости. По всей видимости, это точное решение уравнений Навье–Стокса моделирует новый механизм переноса момента импульса в жидкости [8, 16, 19, 23].

При рассмотрении задач течения слоя жидкости, соприкасающегося с твердой поверхностью, отдельным вопросом встает выбор граничных условий. Исторически так сложилось, что к середине прошлого века при решении подобных задач наиболее часто использовалось условие прилипания на границах соприкосновения жидкостей с твердыми поверхностями [24]. Условие прилипания, как известно, обращает поле скоростей жидкости на неподвижной границе в нуль. Однако, экспериментальные данные [25, 26] показывают нарушение условия прилипания на твердой стенке, в результате чего реализуется условие проскальзывания. Необходимо отметить, что Навье при моделировании процессов течения жидкости рассматривал условия проскальзывания [27, 28]. В последние десятилетия граничные условия, основанные на гипотезе о проскальзывании, получают все большее распространение. Согласно этой гипотезе, касательная составляющая скорости отлична от нуля и связана с компонентами тензора напряжений.

В настоящее время существует большое количество математических работ, посвященных исследованиям задач гидродинамики ньютоновских жидкостей, учитывающих условия проскальзывания на твердых границах, среди которых можно отметить работы [29–32]. В своей статье [33] К.Р. Раджагопал, один из ведущих специалистов по проблемам современной гидромеханики, отмечает особую важность учета эффекта проскальзывания жидкости вдоль границы.

В данной статье обсуждаются точные решения уравнений Навье–Стокса и физический смысл этих решений для трехмерных изобарических течений с вертикальной закруткой вязкой несжимаемой жидкости при условиях прилипания и проскальзывания Навье.

## 2. Постановка задачи

Запишем уравнение Навье–Стокса и уравнение несжимаемости для установившегося движения вязкой жидкости, спроецированные на оси прямоугольной декартовой системы координат. Получим следующую стационарную систему нелинейных уравнений в частных производных [13]:

$$\begin{aligned}
 V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right), \\
 V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right), \\
 V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right), \\
 \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь:  $V_x, V_y, V_z$  — компоненты вектора скорости;  $P$  — давление, отнесенное к постоянной плотности  $\rho$ , в которое аддитивно включен потенциал силы тяжести;  $\nu$  — кинематическая (молекулярная) вязкость. Координата  $z$  является вертикальной (поперечной), координаты  $x$  и  $y$  — горизонтальными (продольными). Далее будет рассматриваться трехмерное по скоростям течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно протяженном горизонтальном слое. Слой жидкости ограничен двумя проницаемыми недеформируемыми горизонтальными поверхностями. Ось  $Oz$ , перпендикулярная границам слоя жидкости, направлена вверх.

Точное решение системы (1) будем искать в виде [1, 7, 16, 18, 19, 33]:

$$\begin{aligned} V_x &= U(z) + yu(z), & V_y &= V(z), \\ V_z &= w(z), & P &= P_0(z). \end{aligned} \quad (2)$$

В монографии [34] полиномиальное поле скоростей (2) называется точным решением с пространственным ускорением. Роль пространственного ускорения играет функция  $u$ . С учетом того, что искомые функции  $U, V, u, w, P_0$  в точном решении (2) зависят только от поперечной координаты  $z$ , обозначим частные производные в уравнениях системы (1) штрихом. Подставим точное решение (2) в нелинейную систему (1). Полученные выражения спроецируем на оси  $Ox$  (ось абсцисс),  $Oy$  (ось ординат) и  $Oz$ :

$$\begin{aligned} Vu + w(U' + yu') &= \nu(U'' + yu''), & 1 \\ wV' &= \nu V'', & 2 \\ ww' &= -P_0' + \nu w'', & 3 \\ w' &= 0. & 4 \end{aligned} \quad (3)$$

Из системы уравнений (3) следует, что при выборе решений в виде (2) вертикальная компонента скорости  $V_z$  и давление  $P_0$  являются постоянными функциями, заданными, например, на границе слоя жидкости. Примем давление равным атмосферному давлению, действующему на верхней границе слоя жидкости, а постоянную поперечную скорость  $V_z = w$  далее будем полагать отличной от нуля. Таким образом построим точное решение только двух первых уравнений системы (3), описывающее нелинейное трехмерное течение вязкой несжимаемой жидкости с проницаемыми границами. Для этого приравняем нулю в уравнении (3)<sub>1</sub> системы коэффициенты при независимой переменной  $y$  и свободные члены в уравнениях (3)<sub>1</sub> и (3)<sub>2</sub>. В результате получим систему для определения трех неизвестных функций:

$$\begin{aligned} \nu u'' - wu' &= 0, & 1 \\ \nu V'' - wV' &= 0, & 2 \\ \nu U'' - wU' &= Vu. & 3 \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) записаны в том порядке, в котором они будут интегрироваться. Заметим, что система (4) состоит из трех уравнений типа уравнений Эйлера, из которых два первых — (4)<sub>1</sub> и (4)<sub>2</sub>, линейные, однородные. Уравнение (4)<sub>3</sub> является неоднородным. С учетом существующего в этой системе разделения переменных последнее уравнение также можно считать линейным.

### 3. Общее решение системы уравнений

Приведем систему уравнений (4) к безразмерному виду. Для этого выберем следующие масштабные переменные: горизонтальную координату  $y$ , которая характеризуется масштабом  $l$ , и вертикальную координату  $z$ , для которой масштаб служит толщина слоя жидкости  $h$ . Масштаб горизонтальных скоростей обозначим как  $[U]$ . Использование двух масштабных переменных длины существенно расширяет классические методы приведения к безразмерным переменным [35].

Безразмерные переменные и функции запишем с помощью тех же символов, что и размерные. В результате система уравнений (4), записанная в безразмерных переменных, будет выглядеть так:

$$u'' = \text{Re}_w u', \quad (5)$$

$$V'' = \text{Re}_w V', \quad (6)$$

$$U'' = \text{Re}_w U' + \delta^2 \text{Re}_U V u. \tag{7}$$

Здесь:  $\text{Re}_U = [U]l/\nu$ ,  $\text{Re}_w = wh/\nu$  — числа Рейнольдса, при этом нижний индекс указывает на скорость, относительно которой они введены;  $\delta = h/l$  — отношение вертикального и горизонтального характерных размеров.

Заметим, что система уравнений (5)–(7) является слабосвязанной, поскольку скорость  $U$  вычисляется из уравнения (7) после интегрирования для определения функции  $u$  и  $V$  изолированных уравнений (5) и (6) соответственно.

Общее решение системы (5)–(7), в которой уравнения следуют в порядке интегрирования, имеет вид:

$$u = \frac{\exp(\text{Re}_w z)}{\text{Re}_w} C_1 + C_2, \quad V = \frac{\exp(\text{Re}_w z)}{\text{Re}_w} C_3 + C_4,$$

$$U = \frac{\text{Re}_U \delta^2}{2\text{Re}_w^4} C_1 C_3 \exp(2\text{Re}_w z) - \frac{\text{Re}_U \delta^2}{\text{Re}_w} C_2 C_4 z + \frac{\exp(\text{Re}_w z)}{\text{Re}_w^3} \text{Re}_U \delta^2 (\text{Re}_w z - 1)(C_2 C_3 + C_1 C_4) + \frac{\exp(\text{Re}_w z)}{\text{Re}_w} C_5 + C_6. \tag{8}$$

#### 4. Краевая задача

Рассмотрим краевую задачу для полученного общего решения (8) системы уравнений (5)–(7) с различными граничными условиями. Краевая задача отвечает течению вязкой несжимаемой жидкости в бесконечно протяженном горизонтальном слое толщиной  $h$ . Пусть на нижней границе исследуемого слоя вязкой несжимаемой жидкости имеет место условие проскальзывания Навье [25–32], представленное в безразмерной форме:

$$\alpha \frac{\partial V_x}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=0} = V_x(0, x, y), \quad \alpha \frac{\partial V_y}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{z=0} = V_y(0, x, y).$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — вектор нормали, направленный от нижней границы в жидкость [25–32]. Получим запись условия Навье в виде:

$$\alpha \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_x(0, x, y),$$

$$\alpha \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = V_y(0, x, y). \tag{9}$$

В граничные условия (9) введен безразмерный параметр  $\alpha = \beta/h$ , где  $\beta$  является длиной скольжения. На верхней границе зададим компоненты скорости следующим образом [16]:

$$V_x(1) = \cos \varphi + \frac{\text{Ta}}{2\text{Re}_U} y,$$

$$V_y(1) = \sin \varphi. \tag{10}$$

Здесь:  $\varphi$  — произвольный угол между проекцией скорости жидкости на плоскость  $Oxy$  и осью  $Ox$ ;  $\text{Ta} = 2\Omega l^2/\nu$  — модифицированное число Тейлора [36];  $\Omega$  — вертикальная компонента завихренности. Подставим решения (2) в граничные условия (9) и (10). Таким образом, граничные условия на нижней границе примут вид:

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = U(0), \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = u(0), \quad \alpha \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_{z=0} = V(0). \tag{11}$$

На верхней границе выполняются следующие условия:

$$U(1) = \cos \varphi, \quad u(1) = \frac{\text{Ta}}{2\text{Re}_w}, \quad V(1) = \sin \varphi. \quad (12)$$

Подставим краевые условия (11), (12) в общее решение (8). Получим значения постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\text{Re}_w \text{Ta}}{2\text{Re}_w \Psi_1}, & C_2 &= \frac{(\alpha \text{Re}_w - 1)\text{Ta}}{2\text{Re}_w \Psi_1}, & C_3 &= \frac{\text{Re}_w \sin \varphi}{\Psi_1}, & C_4 &= \frac{(\alpha \text{Re}_w - 1)\sin \varphi}{\Psi_1}, \\ C_5 &= \frac{\text{Re}_w \cos \varphi}{\Psi_1} - \frac{\delta^2 \text{Ta} \sin \varphi}{4\text{Re}_w (\Psi_1)^3} \times \\ &\times [-5 + \exp(2\text{Re}_w) - 2\text{Re}_w(1 - 2\alpha) - 4\exp(\text{Re}_w)(\text{Re}_w - 1)(1 - \text{Re}_w \alpha) - 2\alpha \text{Re}_w^2 (\alpha + 1)(2 - \text{Re}_w \alpha)], \\ C_6 &= -\frac{(1 - \alpha \text{Re}_w)\cos \varphi}{\Psi_1} + \frac{\delta^2 \text{Ta} \sin \varphi}{4\text{Re}_w^2 (\Psi_1)^3} \left[ \exp(2\text{Re}_w)(1 - \alpha \text{Re}_w) - 2\text{Re}_w(1 - \alpha \text{Re}_w)^3 + \right. \\ &\left. + \exp(\text{Re}_w)(-1 - 4\text{Re}_w(\alpha + 1) + 8\text{Re}_w^2(\alpha + 1)\alpha - 2\text{Re}_w^3(\alpha + 2)\alpha^2) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

В формулах (13) введено обозначение:  $\Psi_1 = \exp(\text{Re}_w) + \alpha \text{Re}_w - 1$ .

Подставим постоянные интегрирования (13) в общее решение (8). В результате найдем частное решение краевой задачи (5)–(7), (11), (12):

$$\begin{aligned} u &= \frac{\text{Ta}(\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1)}{2\text{Re}_w \Psi_1}, & V &= \frac{(\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1)\sin \varphi}{\Psi_1}, \\ U &= \frac{(\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1)\cos \varphi}{\Psi_1} - \frac{\delta^2 \text{Ta} \sin \varphi}{4\text{Re}_w^2 \Psi_1^3} \{ \exp(\text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z) + \\ &+ 2\text{Re}_w [2\exp(\text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z) + 1] + \\ &+ \exp(2\text{Re}_w) [\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1] - 2\alpha^2 \text{Re}_w^3 [\alpha \text{Re}_w + \exp(\text{Re}_w z)] + \\ &+ [2\text{Re}_w z (1 - \alpha \text{Re}_w)(1 + 2\exp(\text{Re}_w z) - \alpha \text{Re}_w) - \exp(2\text{Re}_w z)] \Psi_1 - \\ &- 2\text{Re}_w (1 - \alpha \text{Re}_w) [3\alpha \text{Re}_w + 2\exp(\text{Re}_w + \text{Re}_w z)] + \\ &+ 2[\exp(\text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z)] \alpha \text{Re}_w (2 + 4\alpha \text{Re}_w + \alpha^2 \text{Re}_w^2) - \\ &- 4\text{Re}_w^2 \alpha [\exp(\text{Re}_w)(2 - \alpha \text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z)] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что функции  $u$  и  $V$  не зависят от параметра геометрической анизотропии  $\delta$ . Осуществив в (14) предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$ , для компоненты скорости  $U$  придем к формуле:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} U = \frac{(\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1)\cos \varphi}{\exp(\text{Re}_w) + \alpha \text{Re}_w - 1},$$

из которой видно, что течение жидкости, определяемое соотношением (14), даже в очень тонком слое жидкости является трехмерным и неоднородным. Полученное точное решение (14) проанализируем для двух типов граничных условий на нижней границе в зависимости от значения коэффициента  $\alpha$ .

## 5. Краевая задача с условием прилипания на нижней границе слоя жидкости

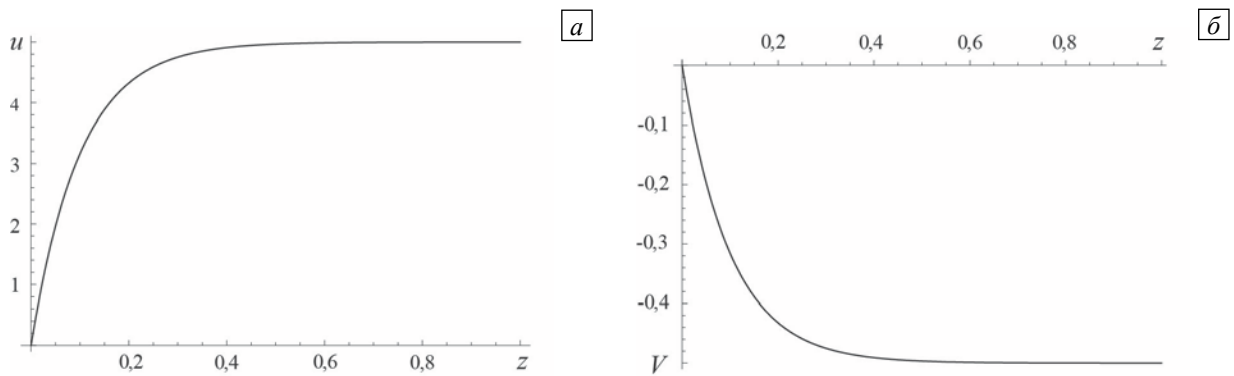
Первым рассмотрим случай, когда в краевых условиях (11) параметр  $\alpha = 0$  в и, следовательно, задано условие прилипания на нижней границе:

$$U(0) = u(0) = V(0) = 0. \quad (15)$$

На верхней — недеформируемой — границе выполняются граничные условия (12). Таким образом, точное решение краевой задачи (5)–(7) с граничными условиями (12), (15) принимает вид:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{\exp(\text{Re}_w z) - 1}{2\text{Re}_w \Psi_1} \text{Ta}, & V &= \frac{\exp(\text{Re}_w z) - 1}{\Psi_1} \sin \varphi, \\
 U &= \frac{[\exp(\text{Re}_w z) - 1] \cos \varphi}{\Psi_1} - \frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{\Psi_1} \left\{ \frac{z [1 + 2\exp(\text{Re}_w z)]}{2\text{Re}_w \Psi_1} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{[\exp(\text{Re}_w z) - 1] [-\Psi_1 (1 - \exp(\text{Re}_w z) + \Psi_1) + \text{Re}_w (6 + 4\Psi_1)]}{4\text{Re}_w^2 \Psi_1^2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Проведем анализ полученного решения (16). Функции  $u$  и  $V$  — монотонно возрастающие или убывающие по толщине слоя жидкости. Характер монотонности (убывание, возрастание) зависит от условий на верхней границе. Графики функций  $u$  и  $V$  показаны на рисунке 1. На этом и последующих рисунках выбранные значения чисел подобия и безразмерных параметров соответствуют общепринятым для описания крупномасштабных течений в Мировом океане масштабам [12, 13, 15, 16, 20, 23, 34, 36].



**Рис. 1.** График функции  $u$  для значений параметров  $\text{Re}_w = 10^5$ ,  $\text{Re}_w = -10$ ,  $\text{Ta} = 10^5$  (а) и функции  $V$  для значений параметров  $\varphi = -5\pi/6$ ,  $\text{Re}_w = -10$  (б) при условии прилипания на нижней границе

Для исследования точного решения (16) с позиции качества выясним существование и локализацию нулей на интервале  $z \in (0;1)$  у функции  $U$ . Итак, сначала изучим течение жидкости в сечении плоскостью  $y = 0$ , а затем рассмотрим свойства скорости, параллельной оси  $Ox$  и являющейся суперпозицией двух полей:  $U$  и  $u$ . Для этого представим функцию  $U$  в мультипликативном виде:

$$U(z) = z \cdot f_1(z).$$

Достаточным условием существования одного нуля у функции  $f_1$  (соответственно у компоненты скорости  $U$ ) является условие:

$$f_1(0) \cdot f_1(1) < 0.$$

Значения функции  $f_1$  в точках  $z = 0$  и  $z = 1$  вычислим следующим образом:

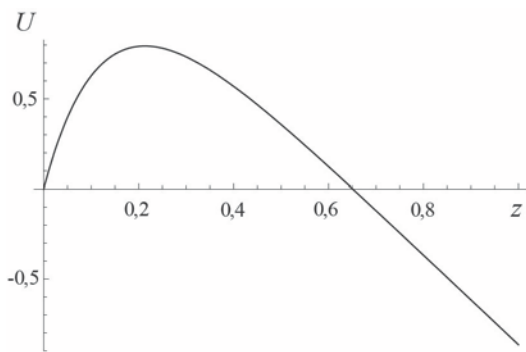
$$\begin{aligned}
 f_1(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{U(z)}{z} = \frac{\text{Re}_w \cos \varphi}{\Psi_1} + \frac{[(\text{Re}_w - \Psi_1)(6 + \Psi_1) + 3\text{Re}_w \Psi_1] \text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{4\Psi_1^3 \text{Re}_w}, \\
 f_1(1) &= \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Следовательно, расслоение поля компоненты скорости  $U$  (существование точки с нулевой скоростью) в плоскости  $y = 0$  происходит при связи между граничными условиями и управляющими параметрами краевой задачи (5)–(7), (12), (15) такого вида:

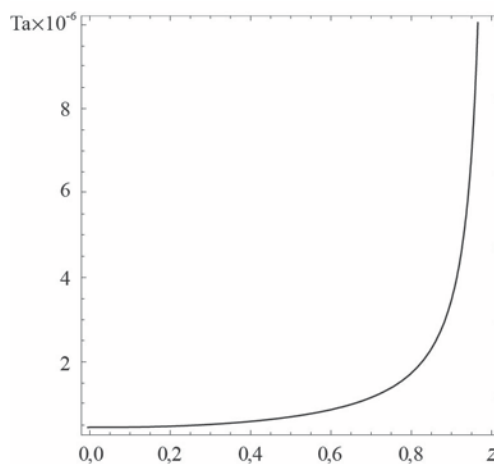
$$\frac{\text{Re}_w \cos^2 \varphi}{\Psi_1} + \frac{[(\text{Re}_w - \Psi_1)(6 + \Psi_1) + 3\text{Re}_w \Psi_1] \text{Ta} \delta^2 \cos \varphi \sin \varphi}{4\Psi_1^3 \text{Re}_w} < 0. \quad (17)$$

Рисунок 2 иллюстрирует противотечение в бесконечном слое в сечении плоскостью  $y = 0$ , которое формируется в тонком пограничном слое в случае основного течения с полем скорости  $U$ . Значения управляющих параметров, при которых существует точка с нулевой скоростью  $U$ , определяются неравенством (17).

На рисунке 3 показана зависимость распределения нулевых значений функции  $U$  на интервале  $z \in (0;1)$  от модифицированного числа Тейлора  $\text{Ta}$  для фиксированного значения вертикального числа Рейнольдса  $\text{Re}_w$ . Из физического смысла модифицированного числа Тейлора  $\text{Ta}$  следует, что при значительном, по сравнению с силами вязкого трения, возрастании центробежных сил решение (16) для компоненты скорости  $U$  будет локализоваться вблизи верхней границы. Следовательно, полученное точное решение (16) при определенных величинах управляющих параметров описывает локализованное (погранслоное) течение, которое может существовать вблизи обеих горизонтальных поверхностей, ограничивающих слой жидкости.



**Рис. 2.** График функции  $U$  при условии прилипания на нижней границе для значений параметров:  $\delta = 0.01$ ,  $\varphi = -5\pi/6$ ,  $\text{Re}_w = -10$ ,  $\text{Ta} = 10^6$



**Рис. 3.** Распределение нулевых значений функции  $U$  в зависимости от модифицированного числа Тейлора  $\text{Ta}$ , изменяющегося в интервале  $(46 \cdot 10^4; 10^7)$ , при условии прилипания на нижней границе для значений параметров:  $\delta = 0.01$ ,  $\varphi = -5\pi/6$ ,  $\text{Re}_w = -10$

Аналогичные исследования справедливы для течений жидкости в сечениях плоскостями  $y \neq 0$ . В этом случае противотечения в жидкости в направлении оси абсцисс регистрируются при выполнении следующего неравенства:

$$\frac{1}{4[\exp(\text{Re}_w) - 1]^3 \text{Re}_w} \left( \frac{\text{Ta}}{2\text{Re}_w} y + \cos \varphi \right) \left\{ \frac{2[\exp(\text{Re}_w) - 1]^2 \text{Re}_w^2 \text{Ta}}{\text{Re}_w} y + \right. \\ \left. + 4[\exp(\text{Re}_w) - 1]^2 \text{Re}_w^2 \cos \varphi - [\exp(2\text{Re}_w) - 5 - 4\exp(\text{Re}_w)(\text{Re}_w - 1) - 2\text{Re}_w] \text{Ta} \delta^2 \sin \varphi \right\} < 0.$$

Для иллюстрации влияния вертикальной компоненты завихренности —  $u$ , на структуру течения вязкой несжимаемой жидкости вычислим функцию тока, отвечающую системе уравнений (5)–(7):

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = V_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -V_y. \quad (18)$$

Проинтегрируем систему уравнений (18), подставим в нее решения принятого вида (2). Тогда получим функцию тока [16]

$$\psi = Uy + \frac{y^2}{2}u - Vx.$$

Характерные линии тока при выполнении условия прилипания на нижней границе приведены на рисунке 4. Изменение направления движения наблюдается практически при любом значении толщины  $z$ , что свидетельствует о существовании зоны противотечения во всем слое жидкости. Множество застойных точек (точек, в которых удельная кинетическая энергия жидкости равняется нулю), согласно формулам (16), определяется следующим образом:

$$V_x^2 + V_y^2 = (U + uy)^2 + V^2 = \left( \frac{[\exp(\text{Re}_w z) - 1] \cos \varphi}{\Psi_1} + y \frac{\exp(\text{Re}_w z) - 1}{2\text{Re}_w \Psi_1} \text{Ta} - \frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{\Psi_1} \left\{ \frac{z[1 + 2\exp(\text{Re}_w z)]}{2\text{Re}_w \Psi_1} - \frac{[\exp(\text{Re}_w z) - 1][\text{Re}_w(6 + 4\Psi_1) - \Psi_1(1 - \exp(\text{Re}_w z) + \Psi_1)]}{4\text{Re}_w^2 \Psi_1^2} \right\} \right)^2 + \left( \frac{\exp(\text{Re}_w z) - 1}{\Psi_1} \sin \varphi \right)^2 = 0.$$

Расслоение поля скоростей обуславливается не только числами подобия Рейнольдса  $\text{Re}_w$  и Тейлора  $\text{Ta}$ , но и углом  $\varphi$ . Было проведено исследование существования нулевых значений  $u$  компоненты скорости  $U$  при фиксированном угле  $\varphi$  и произвольных вертикальных числах Рейнольдса  $\text{Re}_w$  и модифицированных числах Тейлора  $\text{Ta}$ . Например, при  $\varphi = -5\pi/6$  получается область существования корней, показанная на рисунке 5а. Рассматривались следующие значения чисел подобия Рейнольдса:  $\text{Re}_w \in [-10; 4]$ , и Тейлора:  $\text{Ta} \in [300\,000; 1\,000\,000]$ . На рисунке 5б изображены области существования застойных точек компоненты скорости  $U$  при фиксированном вертикальном числе Рейнольдса  $\text{Re}_w = 1$  и различных углах  $\varphi \in [0; 2\pi]$  и модифицированных числах Тейлора из интервала  $\text{Ta} \in [10\,000; 300\,000]$ .

Осуществим в выражениях (16) предельный переход для компонент скорости  $u$ ,  $V$  и  $U$ , полагая при фиксированном коэффициенте кинематической вязкости  $\nu$  и толщине слоя  $h$  жидкости вертикальное

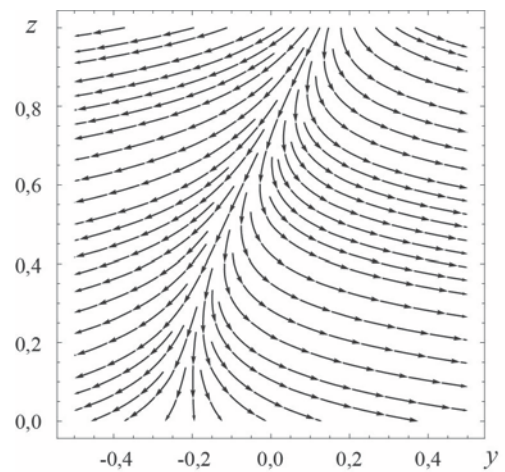


Рис. 4. Линии тока при условии прилипания на нижней границе для следующих значений параметров:  $\delta = 0.01$ ,  $\varphi = -5\pi/6$ ,  $\text{Re}_w = -10$ ,  $\text{Re}_U = 10^5$ ,  $\text{Ta} = 10^6$

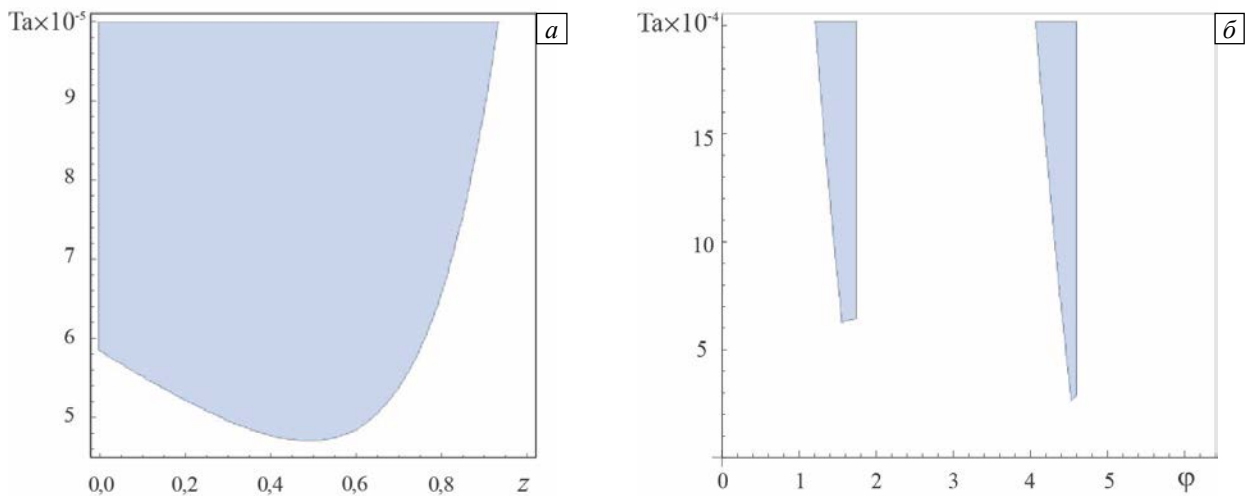


Рис. 5. Области существования точек противотечения функции  $U$  при условии прилипания на нижней границе и разных параметрах течения: для фиксированного угла  $\varphi$  и различных значений  $\text{Re}_w$  и  $\text{Ta}$  (а); для фиксированного  $\text{Re}_w = 1$  и различных значений  $\varphi$  и  $\text{Ta}$  (б)



число Рейнольдса  $Re_w$  равным нулю. В этом случае вертикальная скорость жидкости становится равной нулю:  $V_z = w = 0$ . Перейдя к пределу в (16), получим следующие выражения для компонент поля скорости:

$$\begin{aligned} \lim_{Re_w \rightarrow 0} u &= \lim_{Re_w \rightarrow 0} \frac{\exp(Re_w z) - 1}{2Re_w \Psi_1} Ta = \frac{zTa}{2Re_w}, \\ \lim_{Re_w \rightarrow 0} V &= \lim_{Re_w \rightarrow 0} \frac{\exp(Re_w z) - 1}{\Psi_1} \sin \varphi = z \sin \varphi, \\ \lim_{Re_w \rightarrow 0} U &= \lim_{Re_w \rightarrow 0} \left( \frac{[\exp(Re_w z) - 1] \cos \varphi}{\Psi_1} - \frac{Ta \delta^2 \sin \varphi}{\Psi_1} \left\{ \frac{z[1 + 2\exp(Re_w z)]}{2Re_w \Psi_1} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{[\exp(Re_w z) - 1] [-\Psi_1 (1 - \exp(Re_w z) + \Psi_1) + Re_w (6 + 4\Psi_1)]}{4Re_w^2 \Psi_1^2} \right\} \right) = z \cos \varphi + \frac{z}{24} Ta (z^3 - 1) \delta^2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (19)$$

Формулы (19) описывают нелинейное слоистое течение вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости, которое изучалось в статье [16].

## 6. Краевая задача с условием частичного проскальзывания на нижней границе слоя жидкости

Перейдем к анализу течений жидкости, когда поле скоростей имеет вид (14) и выполняются условия проскальзывания Навье (11), где  $0 < \alpha < \infty$ . Функции  $u$  и  $V$  монотонны и могут обращаться в нуль не более чем в одной точке отрезка  $[0; 1]$ . Таким образом, условия существования нулевых значений у компонент скоростей  $u$ ,  $V$ , соответственно, выводятся по аналогии с решением (16):

$$u(0) \cdot u(1) < 0, \quad V(0) \cdot V(1) < 0.$$

Следовательно, подстановка координат  $z = 0$  и  $z = 1$  в выражения (14) даст условия существования нулевого значения функций  $u$  и  $V$ , которые одинаковы и имеют следующий вид:

$$\frac{\alpha Re_w}{\exp(Re_w) + \alpha Re_w - 1} < 0.$$

Полученное неравенство не разрешимо ни при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $Re_w$ . Следовательно, функции  $u$  и  $V$  не обращаются в нуль на отрезке  $[0; 1]$  ни при каких параметрах, задаваемых граничными условиями.

Далее, при исследовании компоненты вектора скорости  $U$  представим ее в удобном виде:

$$U(z) = \exp(2Re_w z) \frac{\delta^2 Re_w C_1 C_3}{2Re_w^4} + \exp(Re_w z) \left[ \frac{C_5}{Re_w} + \frac{\delta^2 Re_w (C_2 C_3 + C_1 C_4) (Re_w z - 1)}{Re_w^3} \right] - \frac{C_2 C_4 Re_w z \delta^2}{Re_w} + C_6.$$

Здесь постоянные  $C_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) вычисляются по формулам (13). Функция  $U$  имеет корни во всех точках интервала  $(0; 1)$ , где выполняется равенство  $U = 0$ . Для существования одной нулевой точки у функции  $U$  должно выполняться неравенство:

$$U(0) \cdot U(1) < 0,$$

которое в силу построенного точного решения (14) запишется следующим образом:

$$\frac{Re_w \alpha \cos^2 \varphi}{\Psi_1} - \frac{\alpha Ta \delta^2 \cos \varphi \sin \varphi}{2Re_w \Psi_1^3} \times$$

$$\times \left\{ \exp(\text{Re}_w) [2 + \text{Re}_w^2 (2 + \alpha) \alpha - 2\text{Re}_w (1 + 2\alpha)] - \frac{1}{2} [5 - \exp(2\text{Re}_w) - 2\text{Re}_w^2 \alpha (2 - \alpha - \text{Re}_w \alpha) + 2\text{Re}_w (1 - 4\alpha)] \right\} < 0.$$

Область противотечений жидкости в направлении оси абсцисс (при одном нулевом значении у скорости  $V_x$ ) устанавливается так же, как и в направлении оси ординат и определяется неравенством:

$$\left( \frac{\text{Ta}}{2\text{Re}_U} y + \cos \varphi \right) \left\{ \frac{\alpha \text{Re}_w (\text{Ta} y + 2\text{Re}_U \cos \varphi)}{2\text{Re}_U \Psi_1} + [5 - \exp(\text{Re}_w) [\exp(\text{Re}_w) + 2(\text{Re}_w^2 (2 + \alpha) \alpha - 2\text{Re}_w (1 + 2\alpha) + 2)] + 2\text{Re}_w^3 \alpha^2 - 2\text{Re}_w^2 \alpha (2 - \alpha) + 2\text{Re}_w (1 - 4\alpha)] \frac{\alpha \delta^2 \text{Ta} \sin \varphi}{4\text{Re}_w \Psi_1^3} \right\} < 0.$$

Выше было получено, что учет частичного проскальзывания жидкости (11) не приводит к возникновению дополнительных возвратных течений в потоке вертикально завихренной жидкости, движущейся между проницаемыми горизонтальными.

Аналогично анализу, проведенному в краевой задаче с условием прилипания на нижней границе (19), осуществим предельный переход для компонент скорости  $u$ ,  $V$  и  $U$  в выражениях (14) при фиксированном коэффициенте кинематической вязкости  $\nu$  и заданной толщине слоя  $h$  жидкости, полагая вертикальное число Рейнольдса  $\text{Re}_w$  равным нулю. Переход к пределу в формулах (14) дает выражения для компонент поля скорости:

$$\begin{aligned} \lim_{\text{Re}_w \rightarrow 0} u &= \lim_{\text{Re}_w \rightarrow 0} \frac{\text{Ta} [\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1]}{2\text{Re}_U \Psi_1} = \frac{\text{Ta} (z + \alpha)}{2\text{Re}_U (1 + \alpha)}, \\ \lim_{\text{Re}_w \rightarrow 0} V &= \lim_{\text{Re}_w \rightarrow 0} \frac{\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1}{\Psi_1} = \frac{(z + \alpha)}{1 + \alpha} \sin \varphi, \\ \lim_{\text{Re}_w \rightarrow 0} U &= \lim_{\text{Re}_w \rightarrow 0} \left( \frac{(\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1) \cos \varphi}{\Psi_1} - \frac{\delta^2 \text{Ta} \sin \varphi}{4\text{Re}_w^2 \Psi_1^3} \{ \exp(\text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z) + \right. \\ &\quad \left. + 2\text{Re}_w [2\exp(\text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z) + 1] + \right. \\ &\quad \left. + \exp(2\text{Re}_w) [\exp(\text{Re}_w z) + \alpha \text{Re}_w - 1] - 2\alpha^2 \text{Re}_w^3 [\alpha \text{Re}_w + \exp(\text{Re}_w z)] + \right. \\ &\quad \left. + [2\text{Re}_w z (1 - \alpha \text{Re}_w) (1 + 2\exp(\text{Re}_w z) - \alpha \text{Re}_w) - \exp(2\text{Re}_w z)] \Psi_1 - \right. \\ &\quad \left. - 2\text{Re}_w (1 - \alpha \text{Re}_w) [3\alpha \text{Re}_w + 2\exp(\text{Re}_w + \text{Re}_w z)] + \right. \\ &\quad \left. + 2 [\exp(\text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z)] \alpha \text{Re}_w (2 + 4\alpha \text{Re}_w + \alpha^2 \text{Re}_w^2) - \right. \\ &\quad \left. - 4\text{Re}_w^2 \alpha [\exp(\text{Re}_w) (2 - \alpha \text{Re}_w) - \exp(\text{Re}_w z)] \right\} = \frac{z + \alpha}{1 + \alpha} \cos \varphi - \\ &\quad - \frac{\text{Ta} \delta^2 \sin \varphi}{24(1 + \alpha)^3} (z - 1) \left[ z^3 (1 + \alpha) + z^2 (1 + 5\alpha + 4\alpha^2) + \alpha (1 + 4\alpha + 6\alpha^2) + z (1 + 5\alpha + 10\alpha^2 + 6\alpha^3) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Полиномиальное точное решение (21) описывает нелинейное слоистое течение типа течения Куэтта вертикально завихренной вязкой несжимаемой жидкости с учетом отличной от нуля длины скольжения  $\beta$ . Полагая в решении (21) параметр проскальзывания равным нулю ( $\alpha = 0$ ), получим выражения (19). Исследование поля скоростей (21) аналогично анализу точного решения (14), моделирующего трехмерное по скоростям течение вязкой несжимаемой жидкости.

## 7. Заключение

В данной статье построено обобщение на трехмерные нелинейные течения вязкой несжимаемой жидкости установившегося классического решения Куэтта. Показано, что в изобарическом течении при определении класса точных решений с линейно растущими по горизонтальным координатам скоростями для заданных граничных условий прилипания и частичного проскальзывания Навье возможно возникновение не более одной застойной точки в слое жидкости. Выявлено, что при локализации застойных точек у компонент вектора скорости в приграничных областях слоя жидкости зона противотечения может проходить через всю толщину рассматриваемого слоя. Полученные решения при условиях прилипания и проскальзывания Навье

приведены в случае равенства нулю вертикальной (продольной) скорости. Проведенный анализ решений применим для исследований потоков жидкости в тонких слоях.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в части изучения нелинейных эффектов в вязких несжимаемых средах (грант 19-19-00571).

## Литература

1. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ. 2009. Т. 43, № 5. С. 547-566. (English version [DOI](#))
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Пухначев В.В. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае // ПМТФ. 1960. № 1. С. 83-90.
4. Андреев В.К., Гапоненко Ю.А., Гончарова О.Н., Пухначев В.В. Современные математические модели конвекции. М.: Физматлит, 2008. 368 с. (English version [DOI](#))
5. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Rational Mech. Anal. 1957. Vol. 1. P. 391-395. [DOI](#)
6. Сидоров А.Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // ПМТФ. 1989. № 2. С. 34-40. (English version [DOI](#))
7. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь.: Пермский ун-т, 2006. 155 с.
8. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // НД. 2013. Т. 9, № 4. С. 651-657. (English version [DOI](#))
9. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // ТОХТ. 2016. Т. 50, № 3. С. 294-301. [DOI](#)
10. Князев Д.В. Решения уравнений движения вязкой жидкости с нелинейной зависимостью вектора скорости от некоторых пространственных переменных // ПМТФ. 2018. Т. 59, № 5. С. 185-190. [DOI](#)
11. Просвиряков Е.Ю. Новый класс точных решений уравнений Навье–Стокса со степенной зависимостью скоростей от двух пространственных координат // ТОХТ. 2019. Т. 53, № 1. С. 112-120. [DOI](#)
12. Горшков А.В., Просвиряков Е.Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54, № 2. С. 213-220. [DOI](#)
13. Shtern V. Counterflows. Paradoxical fluid mechanics phenomena. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 470 p. [DOI](#)
14. Goncharova O.N., Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer system // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. Vol. 1. P. 317-338. [DOI](#)
15. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
16. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Неоднородные течения Куэтта // НД. 2014. Т. 10, № 2. С. 177-182. (English version [DOI](#))
17. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препр. / АН СССР. Ин-т механики сплошных сред. Свердловск: ИМСС, 1987. 47 с.
18. Аристов С.Н., Фрик П.Г. Крупномасштабная турбулентность в тонком слое неизотермической вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 48-55. (English version [DOI](#))
19. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Нестационарные слоистые течения завихренной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 25-31. (English version [DOI](#))
20. Шварц К.Г., Шкляев В.А. Математическое моделирование мезомасштабных и крупномасштабных процессов переноса примеси в бароклинной атмосфере. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. 156 с.
21. Berker R. Sur quelques cas d'intégration des equations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible / Le grade de docteur es sciences mathematiques. Paris-Lille: l'Universite de Lille, 1936. 169 p.
22. Шмыглевский Ю.Д. Об изобарических плоских течениях вязкой несжимаемой жидкости // ЖВММФ. 1985. Т. 25, № 12. С. 1895-1898. (English version [DOI](#))
23. Аристов С.Н., Привалова В.В., Просвиряков Е.Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // НД. 2016. Т. 12, № 2. С. 167-178. (English version [DOI](#))
24. Goldstein S. Modern developments in fluid mechanics. Oxford: Oxford At The Olarendon Press, 1938. 409 p.
25. Neto C., Evans D.R., Bonaccorso E., Butt H.-J., Craig V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies // Rep. Progr. Phys. 2005. Vol. 68. P. 2859-2897. [DOI](#)
26. Янков В.И., Боярченко В.И., Перадчук В.П., Глот И.О., Шакиров Н.В. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. М.-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 264 с.
27. Navier C.L.M.H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluides // M'em. Acad. R. Sci. Inst. de France. 1822. Vol. 2, no. 6. P. 389-440.
28. Navier C.L.M.H. Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques // M'em. Acad. R. Sci. Inst. de France. 1827. Vol. 7. P. 375-393.
29. Борзенко Е.И., Дьякова О.А., Шрагер Г.Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2014. № 2(28). С. 35-44.
30. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary conditions in Holder spaces // J. Math. Fluid Mech. 2003. Vol. 5. P. 275-301. [DOI](#)

31. *Beirão da Veiga H.* Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions // *Adv. Differ. Equat.* 2004. Vol. 9. P. 1079-1114.
32. *Fujita H.* Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type // *J. Comput. Math.* 2001. Vol. 19, No. 1. P. 1-8.
33. *Раджагопал К.Р.* О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей // *УМН.* 2003. Т. 58, № 2. С. 111-121. [DOI](#)
34. *Гольдштейн М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989, 336 с.
35. *Привалова В.В., Просвирыков Е.Ю.* Точные решения, описывающие конвективное ползущее течение Куэтта-Хименца при линейном распределении температуры на верхней границе // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures.* 2018. № 2. P. 92-109. [DOI](#)
36. *Mehdizadeh A., Oberlack M.* Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates // *Phys. Fluid.* Vol. 22. 105104. [DOI](#)

## References

1. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2009, vol. 43, pp. 642-662. [DOI](#)
2. Ovsyannikov L.V. *Group analysis of differential equations.* New York, Academic Press, 1982. 417 p.
3. Pukhnachev V.V. Group properties of the equations of Navier-Stokes in the planar case. *PMTF – Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1960, no. 1, pp. 83-90.
4. Andreev V.K., Gaponenko Ya.A., Goncharova O.N., Pukhnachev V.V. *Mathematical models of convection.* Berlin, Boston, De Gruyter Publ., 2012. 420 p. [DOI](#)
5. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1957, vol. 1, pp. 391-395. [DOI](#)
6. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, pp. 197-203. [DOI](#)
7. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevyye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical flows of the advective nature in a rotating fluid layer]. Perm, Perm State University, 2006. 155 p.
8. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. On laminar flows of planar free convection. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 4, pp. 651-657. [DOI](#)
9. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, pp. 286-293. [DOI](#)
10. Knyazev D.V. Solving the motion equations of a viscous fluid with a nonlinear dependence between a velocity vector and some spatial variables. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2018, vol. 59, pp. 928-933. [DOI](#)
11. Prosviryakov E.Yu. New class of exact solutions of Navier-Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2019, vol. 53, pp. 107-114. [DOI](#)
12. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Ekman convective layer flow of a viscous incompressible fluid. *Izv. Atmos. Ocean. Phys.*, 2018, vol. 54, pp. 189-195. [DOI](#)
13. Shtern V. *Counterflows. Paradoxical fluid mechanics phenomena.* Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 470 p. [DOI](#)
14. Goncharova O.N., Hennenberg M., Rezanova E.V., Kabov O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer system. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2013, vol. 1, pp. 317-338. [DOI](#)
15. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevyye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortical flows in thin fluid layers]. Kirov, VyatGU, 2011, 207 p.
16. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Inhomogeneous Couette flows. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177-182. [DOI](#)
17. Aristov S.N., Frik P.G. *Dinamika krupnomasshtabnykh techeniy v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Dynamics of large-scale flows in thin liquid layers]. Preprint, Academy of Sciences S.S.S.R. Institute of Continuous Media Mechanics. Sverdlovsk, 1987. 47 p.
18. Aristov S.N., Frick P.G. Large-scale turbulence in thin layer of non-isothermal rotating fluid. *Fluid Dyn.*, 1988, vol. 23, pp. 522-528. [DOI](#)
19. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dyn.*, 2016, vol. 51, pp. 148-154. [DOI](#)
20. Shvarts K.G., Shklyaev V.A. *Matematicheskoye modelirovaniye mezomasshtabnykh i krupnomasshtabnykh protsessov perenosa primesi v baroklinnoy atmosfere* [Mathematical modeling of mesoscale and large-scale process of transfer of impurities in a baroclinic atmosphere]. Izhevsk, Izhevskiy institut komp'yuternykh issledovaniy, 2015. 156 p.
21. Berker R. *Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible* [On some cases of integration of the equations of the movement of an incompressible viscous fluid]. PhD Dissertation in mathematics. Paris-Lille: the University of Lille, 1936. 169 p.
22. Shmyglevskii Yu.D. On isobaric plane flows of a viscous incompressible fluid. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1985, vol. 25, no. 6, pp. 191-193. [DOI](#)
23. Aristov S.N., Privvalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2016, vol. 12, no. 2, pp. 167-178. [DOI](#)
24. Goldstein S. *Modern developments in fluid mechanics.* Oxford, Oxford At The Clarendon Press, 1938. 409 p.
25. Neto C., Evans D.R., Bonaccorso E., Butt H.-J., Craig V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Rep. Progr. Phys.*, 2005, vol. 68, pp. 2859-2897. [DOI](#)

26. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchuk V.P., Glot I.O., Shakirov N.V. *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techeniye polimerov v kanalakh* [Processing of fiber-forming polymers. Bases of polymer rheology and polymer flow in channels]. Moscow-Izhevsk, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2008. 264 p.
27. Navier C.L.M.H. M'emoire sur les Lois du Mouvement des Fluides. *M'em. Acad. R. Sci. Inst. de France*, 1822, vol. 2, no. 6, pp. 389-440.
28. Navier C.L.M.H. Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. *M'em. Acad. R. Sci. Inst. de France*, 1827, vol. 7, pp. 375-393.
29. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tom. gos. un-ta. Matematika i mekhanika – Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2014, no. 2(28), pp. 35-44.
30. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary conditions in Holder spaces. *J. Math. Fluid Mech.*, 2003, vol. 5, pp. 275-301. [DOI](#)
31. Beirão da Veiga H. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Adv. Differ. Equat.*, 2004, vol. 9, pp. 1079-1114.
32. Fujita H. Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type. *J. Comput. Math.*, 2001, vol. 19, no. 1, pp. 1-8.
33. Rajagopal K.R. On some unresolved issues in non-linear fluid dynamics. *Russ. Math. Surv.*, 2003, vol. 58(2), pp. 319-330. [DOI](#)
34. Gol'dshtik M.A., Shtern V.N., Yavorskiy N.I. *Vyazkiye techeniya s paradoksal'nymi svoystvami* [Viscous flows with paradoxical properties]. Novosibirsk, Nauka, 1989. 336 p.
35. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, no. 2, pp. 92-109. [DOI](#)
36. Mehdizadeh A., Oberlack M. Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates. *Phys. Fluid.*, vol. 22, 105104. [DOI](#)

Поступила в редакцию 27.03.2019; после доработки 23.05.2019; принята к опубликованию 28.05.2019