

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.2.19](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.19)

УДК 539.3: 621.7-97: 666.1.001.5

## МЕТОД РАСЧЕТА ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕКЛОМЕТАЛЛОКОМПОЗИТЕ С УЧЕТОМ СТРУКТУРНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

О.Н. Любимова, М.А. Барботько

*Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия*

Исследуются технологические режимы отжига слоистого стеклометаллического композиционного материала – стеклометаллокомпозиата, которые включают нагрев до температуры размягчения стекла и последующее охлаждение с отжигом. Стеклометаллокомпозит цилиндрической формы с наружным металлическим и внутренним стеклянным сплошными цилиндрами используется как модельный образец при экспериментальных исследованиях сильно сжатых хрупких горных пород. Рассматривается математическая модель эволюции технологических и остаточных напряжений при его отжиге. Сложность при моделировании обусловлена процессом стеклования в стекле и упругопластичным поведением металла. Структурные и механические релаксационные процессы в стекле рассчитываются по методу Тула–Нарайсвами–Мойнихана–Мазурина, который основан на представлении о структурной температуре как дополнительном параметре, характеризующем состояние стекла, и принципе суперпозиции Больцмана–Вольтерры. Учитывается зависимость вязкости и коэффициента линейного температурного расширения от структурной температуры. Для металлического цилиндра упругое состояние в пространстве напряжений ограничено поверхностью предельного состояния Мизеса. На границе соединения стекла и металла выполняется условие идеального контакта. В работе предлагается конечно-разностная схема расчета структурных изменений и технологических напряжений в композите во всем интервале температурной обработки после нагрева. Для оценки точности предложенного алгоритма расчетов находилось аналитическое решение задачи с ядром Максвелла при отсутствии температурно-временной аналогии в стекле и упругого деформирования металлического слоя. Приведены расчеты технологических и остаточных напряжений в стеклометаллокомпозите, изготовленном из боросиликатного стекла и малоуглеродистой стали, при различных температурных режимах отжига. Предложенная математическая модель и метод расчета могут быть полезными, например, при расчетах остаточных напряжений при нанесении стеклянных покрытий на металлические трубы.

*Ключевые слова:* стеклометаллокомпозит, механические напряжения при отжиге стекла, структурная и механическая релаксации, стеклование, численное моделирование

## METHOD FOR CALCULATING STRESS EVOLUTION IN GLASS-METAL COMPOSITE TAKING INTO ACCOUNT STRUCTURAL AND MECHANICAL RELAXATION PROCESSES

O.N. Lyubimova and M.A. Barbotko

*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russian Federation*

Technological modes of annealing layered glass-metal composite material are investigated. A cylindrical glass-metal composite vessel with an internal glass cylinder is used as a model sample in the experimental studies of highly compressed fragile rocks mass. A mathematical model of the evolution of technological and residual stresses during its annealing is considered. The difficulty in modeling is due to the glass transition process and the elastic-plastic behavior of the metal. Structural and mechanical relaxation processes in glass are calculated using the Tula-Naariswami-Moynihan-Mazurin method, which is based on the concept of structural temperature, and the Boltzman-Volterra superposition principle. The dependence of viscosity and coefficient of linear temperature expansion on the structural temperature is taken into account. Elastic state in the stress space is limited by the surface of the Mises limit state for metal shell. In this paper, a finite-difference scheme for calculating structural changes and process stresses over the entire temperature treatment interval is proposed. To assess the accuracy of the developed calculation algorithm, we used an analytical solution of the problem with the Maxwell core in the absence of temperature-time analogy in glass and elastic deformation of the metal layer. Calculations of technological stresses in glass metal composite based on borosilicate glass and low carbon steel for various temperature regimes of annealing were carried out. The proposed mathematical model and calculation method can be used for evaluating residual stresses in the technology of applying glass coatings on metal pipes.

*Key words:* glass-metal composite, mechanical stresses during glass annealing, structural and mechanical relaxation, glass transition, mathematical modeling

### 1. Введение

Изучение возможности упрочнения стекла, входящего вместе со сталью в состав стеклометаллокомпозиата, привело к созданию стержней, состоящих из стеклянного сердечника и стальной оболочки. Они изготавливаются методом припаивания стекла к стали в окислительной среде при определенном температурном режиме [1–3]. Технология их изготовления подразумевает получение так называемого сжатого спая со специальными прочностными характеристиками и в этих целях использует варьирование температуры, механических характеристик и структуры соединяемых материалов. Изменения служат причиной появления технологических напряжений, которые могут вызывать образование дефектов, разупрочняющих стеклометаллокомпозит. В свете этого актуальна разработка математической модели, прогнозирующей механическое поведение материала при колебании значений параметров технологического режима с учетом процесса стеклования и пластического течения в металле.

Явление стеклования, несмотря на большой накопленный экспериментальный опыт, не имеет общей теории, кроме гипотезы Г. Таммана, что стекло — это переохлажденная жидкость [4]. Тем не менее, теоретические исследования стеклования выделились из общей теории фазовых переходов в отдельное направление, вклад в развитие которого связывается с именами Александрова А.П., Лазуркина Ю.С. [5], Шмельцера Ю.В.П. [4, 7] Мазурина О.В. [6, 9, 10, 12], Старцева Ю.К. [8, 11], Тула А. [13], Нарайанасвами О. [14], Мойнихана К., Маседо П. [15] и других. Обзоры современного состояния теорий стеклования приведены в работах [4–6]. Неоднозначность подходов к моделированию явления стеклования, как справедливо отмечает Старцев Ю.К. [7], приводит к ряду трудностей. Специалистам, занимающимся изучением свойств стеклообразных материалов, и технологам при изготовлении и эксплуатации приходится сталкиваться с непростой проблемой сравнительного анализа и выбора теории, в рамках которой будет выполняться решение актуальной научной и/или технологической задачи.

Разумным и эффективным при моделировании конкретного технологического процесса представляется выбор в пользу теоретического подхода, который апробирован экспериментально и близок по постановке задачи к исследуемой технологии и материалу. По результатам обзора методов математического описания технологических напряжений в стекломаталлокомпозитных стержнях было выбрано направление научной школы Института химии силикатов им. И.В. Гребенщикова АН СССР. Релаксационная теория стеклования и метод определения свойств стекол при переходе через фазу стеклования, разрабатываемые группой О.В. Мазурина [9–11], проверены на обширном экспериментальном материале, в том числе при отжиге спаев стекла с другими материалами [12]. В основе метода лежит идея А. Тула о введении в модель изменения структуры стекла в фазе стеклования структурного параметра, характеризующего состояние системы, — «фиктивной» температуры  $T_f$ . Параметр связан с приведенной изобарической теплоемкостью системы [13].

Аналогичный подход развивался за рубежом в работах Нарайанасвами О. [14], Мойнихана К. [15] (известен как ТНМ метод — метод Тула–Нарайанасвами–Мойнихана). В рамках релаксационной теории отжига спаев стекла с другими материалами разработаны методы расчета напряжений при температурной обработке, например, плоских вакуумноплотных двухслойных спаев стекла с металлом, которые эффективно применяются при расчетах напряжений в аморфных покрытиях [16, 17]. Справедливости ради считаем нужным использовать далее следующее сокращенное название метода: метод ТНММ — метод Тула–Нарайанасвами–Мазурина–Мойнихана. Существующие модели представления механических характеристик в спае, находимых по методу ТНММ, разработаны для плоских спаев и имеют следующие ограничения: опасными считаются растягивающие напряжения в стекле, поэтому контролируется напряженно-деформируемое состояние только в стекле (с целью предотвращения его разрушения), а эволюция напряженно-деформированного состояния металлических слоев не принимается во внимание, спаи считаются вакуумно плотными, поэтому на границе соединения стекла и металла предполагается идеальный контакт [12, 16, 17]. Похожие технологические задачи с учетом терморелаксационных переходов решаются в работах механиков пермской школы (см. моделирование конструкционной прочности силового кварцевого оптического волокна, неоднородно легированного по радиусу [18, 19], и полимерных материалов [20]) и в работах, опубликованных в зарубежных изданиях [21–24]. Между тем в стекломаталлокомпозитах в процессе изготовления возможно развитие упругопластического напряженно-деформируемого состояния (в металле), приводящего иногда даже к разрушению металлического слоя при неправильно подобранных параметрах технологического процесса и размеров металлического слоя. Попытки описать изменение геометрии рассматриваемых спаев и упругопластическое деформирование металлического элемента спаев требуют усложнения задачи и доработки метода ТНММ.

Целью данной работы является математическое моделирование и создание метода расчета эволюции напряженно-деформируемого состояния стекломаталлокомпозита с учетом как процесса стеклования и релаксации напряжений в стекле, так и пластического течения в металле.

## 2. Постановка задачи

Температурный режим изготовления стекломаталлокомпозитных стержней (Рис. 1а, б) включает нагрев, охлаждение и последующий отжиг. На этапе нагрева стекло, доведенное до размягченного состояния, под действием приложенной нагрузки продавливается и плотно прилегает к внутренней поверхности металла. При охлаждении вязкость стекла возрастает, происходит процесс стеклования. Разница свойств соединенных стекла и металла приводит к значительным неравномерно распределенным остаточным напряжениям, для отслеживания которых необходимо осуществлять контролируемое охлаждение (отжиг). Обычно отжигу подвергается готовое изделие, которое дополнительно нагревается и затем охлаждается с разными скоростями. Стеклomatаллокомпозиты отжигаются при изготовлении спаев на этапе его охлаждения, поскольку существенное отличие механических характеристик соединяемых материалов ограничивает температуру повторного нагрева и заметно сужает температурно-временной интервал обработки изделия отжигом. Процесс отжига можно разделить на три последовательных операции (Рис. 1в): I — охлаждение от максимальной температуры  $T_{max}$  до температуры отжига  $T_{от}$ ; II — выдержка; III — охлаждение до температуры окружающей среды  $T_{cp}$ .

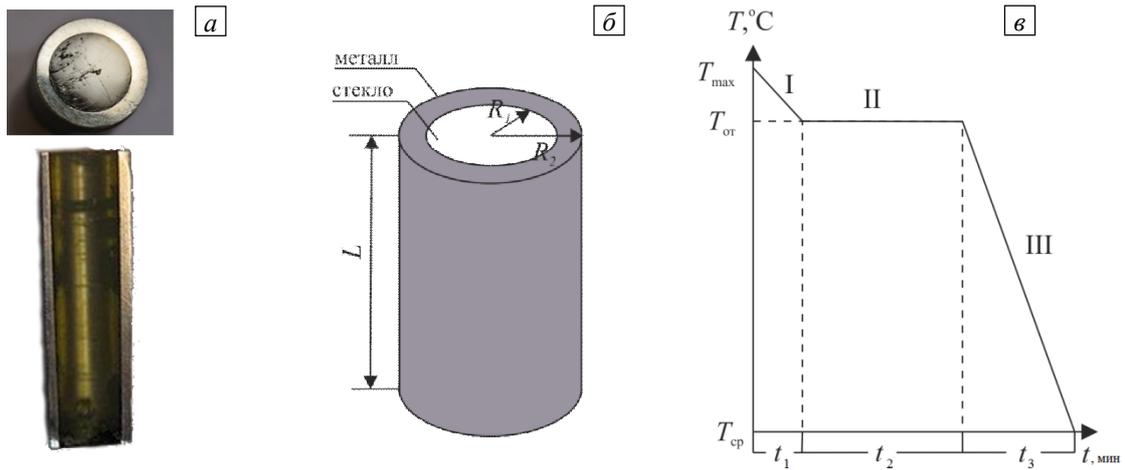


Рис. 1. Фотографии экспериментальных образцов из [3] (а); геометрия образцов (б); температурный режим отжига (в)

При охлаждении от температуры  $T_{\max}$ , которая может совпадать с температурой плавления стекла  $T_l$  или быть несколько меньше ее, непрерывно изменяются структура и свойства стекла. Такой процесс называют стеклованием, и он протекает в некотором интервале  $(T_g^-, T_g^+)$ , одна из температур находится в его средней части и называется температурой стеклования —  $T_g$ . Ее положение зависит от скорости охлаждения, а границы интервала стеклования обычно соотносят с границами гистерезисной петли, характеризующей изменение свойства  $P$  при равномерном охлаждении и нагреве от равновесного состояния расплава к замороженной структуре (Рис. 2). Важным свойством, определяющим специфику стеклообразного состояния, является вязкость. Температуре стеклования  $T_g$  при различных составах стекла обычно соответствует температура при скорости охлаждения, равной 3 К/мин, и вязкость из диапазона  $10^{13} \div 10^{13,3}$  Па·с, температуре размягчения  $T_l$  — вязкость  $4 \times (10^8 \div 10^9)$  Па·с [11, 18, 25].

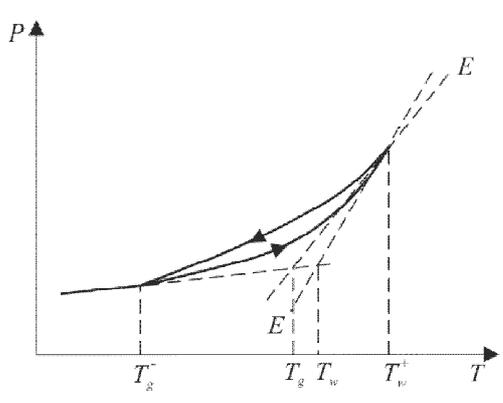


Рис. 2. Характер температурной зависимости изменения некоторого свойства стекла ( $P$ ) при равномерном охлаждении и нагревании:  $T_g$  — температура стеклования в режиме охлаждения, а  $T_w$  — в режиме нагрева; ( $E-E$ ) — равновесная температурная зависимость свойства

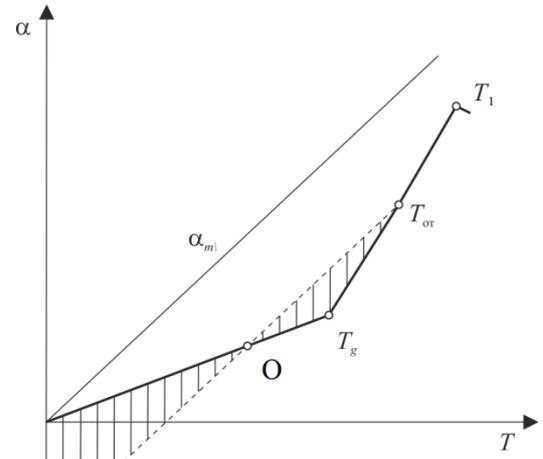


Рис. 3. Отжиг сжатых спаев металл–стекло, когда  $\alpha_m \gg \alpha_g$

При изготовлении стеклометаллокомпозита вследствие разницы линейных коэффициентов температурного расширения и модулей Юнга даже при равномерном распределении температуры возникают напряжения. Анализ зависимостей линейных коэффициентов температурного расширения стекла ( $\alpha_g$ ) и металла ( $\alpha_m$ ) от температуры (Рис. 3) показывает, что в стекле при охлаждении возникают растягивающие напряжения, и только начиная от точки О напряжение меняет знак и становится сжимающим. Поэтому технологи рекомендуют выбирать режим отжига так, чтобы напряжения растяжения, возникающие при охлаждении, снижались, пусть даже за счет увеличения сжимающих напряжений [19]. Значит, температура отжига  $T_{от}$  должна быть близкой по значению температуре

стеклования  $T_g$ , тогда точка О сместится в сторону более высоких температур. Поскольку стекломаталлокомпози́ты получают в печах, режим их отжига необходимо отрегулировать таким образом, чтобы в области между  $T_i$  и точкой  $T_{от}$  скорость снижения температуры была наименьшей.

Кроме термического расширения, на образование напряжений существенное влияние оказывают размеры стеклянного и металлического цилиндров, изменение свойств стекла при переходе через интервал стеклования, а также возможность развития необратимых деформаций и пластического течения в металле. Учитывая все перечисленные особенности, рассмотрим задачу определения технологических и остаточных напряжений при отжиге стекломаталлокомпози́тных стержней.

### 3. Математическая модель

При математическом моделировании напряженно-деформированного состояния составного цилиндра (Рис. 1б) с разными механическими свойствами его частей (термовязкоупругого со структурными изменениями — во внутреннем стеклянном цилиндре, и термоупругопластического — в металлическом внешнем цилиндре) принимались следующие предположения:

– соблюдается температурный режим изготовления стекломаталлокомпози́тных стержней, то есть они равномерно нагреваются, и изменение температуры имеет невысокую скорость, до  $0,25^\circ\text{C}/\text{с}$  (в работе [27] показано, что при определенных диаметрах ( $d < 80 \times 10^{-3}$  м) разница в изменении температуры по радиусу составляет  $10^{-2}^\circ\text{C}$ , что позволяет считать температурное распределение известным и одинаковым во всей расчетной области и соответствующим режиму изменения температуры  $T(t)$  в среде (печи));

– в стеклянном компоненте преобразования структуры и колебания температуры приводят к изменению вязкости стекла и, соответственно, времени релаксации; для описания физико-механических явлений, связанных со стеклованием и структурной релаксацией, применима модель ТНММ;

– рассматриваются стержни с отношением диаметра к длине менее 1:10, при этом их торцы свободны от нагрузок; выполняется гипотеза об обобщенном плоском деформируемом состоянии ( $\varepsilon_z = \text{const}$ );

– на границе соединения стекла со сталью соединение идеальное;

– материал металлического слоя идеально упругопластический (без упрочнения).

Базовым понятием модели ТНММ является «фиктивная» температура (fictive)  $T_f$ , которая в стабилизированном состоянии равна фактической температуре ( $T$ ), в условиях замороженной структуры постоянна ( $T_f = \text{const}$ ), при равномерном охлаждении уменьшается вплоть до нижней границы интервала стеклования, минуя ее, далее остается постоянной [9, 13].

Фиктивная или структурная температура (температура, связанная со структурными изменениями в материале) в релаксационной теории имеет следующую математическую интерпретацию [14]:

$$T_f = T_0 + \int_0^t (1 - M_s(\xi - \xi')) \frac{dT}{d\xi'} d\xi', \quad (1)$$

$T_0$  — температура, от которой начинается охлаждение. Функция структурной релаксации свойств стекол хорошо описывается функцией Кольрауша [11, 21]:

$$M_s(\xi) = e^{-(\xi/\tau_r)^b} = e^{-(\xi K_r/\eta_r)^b}, \quad (2)$$

здесь  $b$  — постоянная величина для стекол определенных составов ( $0 < b < 1$ ), и вместо текущего времени  $t$  используется «приведенное» время  $\xi$ , которое, согласно методу температурно-временной аналогии [27], связано с текущим временем безразмерной универсальной функцией  $f(T)$  соотношением  $d\xi = f(T) dt$ . Но обычно «приведенное» время выражают через сдвиговую вязкость или время релаксации свойств:

$$\xi(t) = \int_0^t \frac{\eta_r}{\eta(t')} dt' \quad \text{или} \quad \xi(t) = \int_0^t \frac{\tau_r}{\tau(t')} dt',$$

где  $\eta_r$  — вязкость сравнения (сдвиговая вязкость при произвольно выбранной температуре сравнения  $T_r$ ),  $\eta(t)$  — текущая вязкость,  $\tau_r$  — время релаксации при температуре сравнения,  $K_r = \eta_r/\tau_r$ .

Изменение структурной температуры сказывается на изменении вязкости  $\eta$  и линейного коэффициента температурного расширения  $\alpha$  через аналитические соотношения, предложенные в работах [9, 13]:

$$\begin{aligned} \lg \eta &= \lg \eta_0 + B_e (T_f^{(-1)} - T_0^{(-1)}) + B_f (T^{(-1)} - T_f^{(-1)}), \\ \alpha &= \alpha_e + (\alpha_f - \alpha_e) (dT_f/dT), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\eta_0$  — вязкость при  $T_0$ , а  $B_e, \alpha_e, B_f, \alpha_f$  — коэффициенты, характеризующие температурные зависимости  $\eta$  и  $\alpha$  в условиях равновесной и замороженной структур соответственно (Рис. 4).

В цилиндрической системе координат (см. Рис. 2) при осевой симметрии с учетом принятых предположений компоненты тензоров перемещений и деформаций представляются как

$$\begin{aligned} u_r &= u(r, t), \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = w(z, t), \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z(t), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично вводится тензор напряжений, имеющий три ненулевых компоненты  $\sigma_{rr} = \sigma_r(r, t)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_\varphi(r, t)$ ,  $\sigma_{zz} = \sigma_z(r, t)$  из уравнения равновесия при отсутствии массовых сил невырожденным остается одно:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0. \quad (5)$$

Определяющие соотношения для  $0 \leq r \leq R_1$  (в стекле) могут быть описаны на основе принципа суперпозиции Больцмана–Вольтерры [27]:

$$\begin{aligned} s_r &= 2G \left( e_r - \int_0^t M(\eta(t, t')) e_r dt' \right), \\ s_\varphi &= 2G \left( e_\varphi - \int_0^t M(\eta(t, t')) e_\varphi dt' \right), \\ s_z &= 2G \left( e_z - \int_0^t M(\eta(t, t')) e_z dt' \right), \end{aligned} \quad (6)$$

но, поскольку стеклообразные материалы практически не обнаруживают объемных релаксационных свойств, их физическое поведение может быть представлено уравнением Дюамеля–Неймана:

$$\sigma(r, t) = 3K\theta. \quad (7)$$

В (6) и (7) приняты обозначения:  $\sigma = (\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)/3$ ;  $\varepsilon = (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)/3$ ;  $\theta = 3\varepsilon - \int_{T_0}^T \alpha(T) dT$ ;  $s_r = \sigma_r - \sigma$ ,  $s_\varphi = \sigma_\varphi - \sigma$ ;  $e_r = \varepsilon_r - \varepsilon$ ,  $e_\varphi = \varepsilon_\varphi - \varepsilon$ ,  $e_z = \varepsilon_z - \varepsilon$ ;  $G$  — модуль сдвига;  $K$  — модуль объемной деформации;  $M(\eta(t, t'))$  — релаксационное ядро, характеризующее снижение к моменту времени  $t$  сдвиговых напряжений, вызванных деформацией в момент времени  $t'$ , аналитическая запись которого неэкспоненциального вида, принятого в (2), при этом параметры  $b$  и  $K_r$  отличаются от значений, используемых при отыскании структурного параметра  $T_f$ . Изменение структуры и температуры приводит к изменению вязкости  $\eta$  согласно формуле (3).

Для внешнего цилиндра ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ) определяющие соотношения запишем в рамках модели Прандтля–Рейса с учетом тепловых явлений и разделением малых деформаций на обратимую (упругую  $\varepsilon_{ij}^e$ ) и необратимую (пластическую  $\varepsilon_{ij}^p$ ) составляющие (здесь и далее точка над символом означает дифференцирование по времени):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (8)$$

Упругое состояние в пространстве напряжений ограничим поверхностью предельного состояния Мизеса и условием активного нагружения

$$f(\sigma, T) = (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 - 2\sigma_r^2(T) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_r} \dot{\sigma}_r + \frac{\partial f}{\partial \sigma_\varphi} \dot{\sigma}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} \dot{\sigma}_z + \frac{\partial f}{\partial T} \dot{T} > 0,$$

предел прочности при растяжении  $\sigma_r(T)$  зависит только от температуры. Пластические составляющие компонент тензора деформаций определим согласно закону ассоциированного течения:

$$\dot{\varepsilon}_r^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_\varphi}, \quad \dot{\varepsilon}_z^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \quad (10)$$

здесь  $\Lambda$  имеет смысл множителя Лагранжа при нахождении максимума удельной мощности деформирования с ограничением (9).

Учитывая соотношения (4) и (8), упругие деформации перепишем в виде:

$$\varepsilon_r^e = \frac{\partial u}{\partial r} - \varepsilon_r^p, \quad \varepsilon_\varphi^e = \frac{u}{r} - \varepsilon_\varphi^p, \quad \varepsilon_z^e = \varepsilon_z - \varepsilon_z^p.$$

Тогда напряжения и деформации в слое  $0 \leq r \leq R_1$  будут связываться согласно формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left( \frac{4}{3}G + 3K \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( 3K - \frac{2}{3}G \right) \left( \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) - 2G\varepsilon_r^p - 3K \int_{T_0}^T \alpha(T) dT, \\ \sigma_\varphi &= \left( 3K - \frac{2}{3}G \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left( \frac{4}{3}G + 3K \right) \frac{u}{r} + \left( 3K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_z - 2G\varepsilon_\varphi^p - 3K \int_{T_0}^T \alpha(T) dT, \\ \sigma_z &= \left( 3K - \frac{2}{3}G \right) \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \left( \frac{4}{3}G + 3K \right) \varepsilon_z - 2G\varepsilon_z^p - 3K \int_{T_0}^T \alpha(T) dT. \end{aligned} \quad (11)$$

Краевые условия установим исходя из условий отсутствия нагрузки на внешних поверхностях стержня и равенства радиальных напряжений и перемещений при переходе через границу стекла с металлом при идеальном контакте:

$$\begin{aligned} u(R_1-, t) &= u(R_1+, t), \quad \sigma_r(R_1-, t) = \sigma_r(R_1+, t), \\ \sigma_r(R_2, t) &= 0, \\ \int_0^{R_1} \sigma_z(r, t) r dr + \int_{R_1}^{R_2} \sigma_z(r, t) r dr &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В начале процесса отжига считаем, что напряжения, перемещения и скорости их изменения во времени равны нулю:

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 0, \quad \dot{u}(r, 0) = 0, \\ \sigma_r(r, 0) &= 0, \quad \sigma_\varphi(r, 0) = 0, \quad \sigma_z(r, 0) = 0, \\ \dot{\sigma}_r(r, 0) &= 0, \quad \dot{\sigma}_\varphi(r, 0) = 0, \quad \dot{\sigma}_z(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Используя соотношения (6), (7), уравнение равновесия (5) для цилиндра  $0 \leq r \leq R_1$  можно переписать как

$$\left( \frac{4}{3}G + K \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{2}{3}G \int_0^t M(t, t') \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) dt' = 0, \quad (14)$$

в тоже время уравнение равновесия (5) для внешнего цилиндра  $R_1 \leq r \leq R_2$  с учетом (11) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{2G}{(4G/3) + K} \left( \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial r} + \frac{\varepsilon_r^p - \varepsilon_\varphi^p}{r} \right). \quad (15)$$

Решением уравнений (14) и (15) (при упругом деформировании металлического слоя) является решение уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0, \quad (16)$$

$$u(r, t) = \begin{cases} C_1(t)r, & 0 \leq r \leq R_1, \\ C_2(t)r + \frac{C_3(t)}{r}, & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases}$$

Здесь  $C_1(t)$ ,  $C_2(t)$ ,  $C_3(t)$  и  $\varepsilon_z(t)$  — неизвестные коэффициенты, которые получаются из краевых условий (12). Пусть

$$G, K, \alpha = \begin{cases} G_g, K_g, \alpha_g, & 0 \leq r \leq R_1, \\ G_m, K_m, \alpha_m, & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases} \quad (17)$$

Из соотношений (6) с учетом формул (4) и (16) имеем напряжения в явном виде:

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \left( \frac{2G_g}{3} + 6K_g \right) C_1(t) + \left( 3K_g - \frac{2}{3}G_g \right) \varepsilon_z(t) - \frac{2G_g}{3} \int_0^t M(t, t') (C_1(t') - \varepsilon_z(t')) dt' - 3K_g \int_{T_0}^T \alpha_g(T) dT, \quad (18)$$

$$\sigma_z = 2 \left( 3K_g - \frac{2G_g}{3} \right) C_1(t) + \left( 3K_g - \frac{4G_g}{3} \right) \varepsilon_z(t) + \frac{2G_g}{3} \int_0^t M(t, t') (C_1(t') - \varepsilon_z(t')) dt' - 3K_g \int_{T_0}^T \alpha_g(T) dT.$$

Соотношения (11) в упругой области с учетом (16) могут быть переписаны так:

$$\sigma_r = \left( 6K_m - \frac{2}{3}G_m \right) C_2(t) - 2G_m \frac{C_3(t)}{r^2} + \left( 3K_m - \frac{2}{3}G_m \right) \varepsilon_z(t) - 3K_m \int_{T_0}^T \alpha_m(T) dT,$$

$$\sigma_\varphi = \left( 6K_m + \frac{2}{3}G_m \right) C_2(t) + 2G_m \frac{C_3(t)}{r^2} + \left( 3K_m - \frac{2}{3}G_m \right) \varepsilon_z(t) - 3K_m \int_{T_0}^T \alpha_m(T) dT, \quad (19)$$

$$\sigma_z = 2 \left( 3K_m - \frac{2}{3}G_m \right) C_2(t) + \left( 3K_m + \frac{4}{3}G_m \right) \varepsilon_z(t) - 3K_m \int_{T_0}^T \alpha_m(T) dT.$$

Введем новую неизвестную:  $\hat{C}_1(t) = C_1(t) - \varepsilon_z(t)$ . В результате система (12) с учетом (16)–(19) примет вид:

$$\hat{C}_1 + \varepsilon_z = C_2 + \frac{C_3}{R_0^2}, \quad 1$$

$$\left( 6K_m - \frac{2}{3}G_m \right) C_2(t) - 2G_m \frac{C_3(t)}{R_1^2} + \left( 3K_m - \frac{2}{3}G_m \right) \varepsilon_z(t) - 3K_m \int_{T_0}^T \alpha_m(T) dT = 0, \quad 2$$

$$\left( \frac{2}{3}G_g + 6K_g \right) \hat{C}_1 + 6K_g \varepsilon_z - \frac{2}{3}G_g \int_0^t M(t, t') \hat{C}_1(t') dt' - 3K_g \int_{T_0}^T \alpha_g(T) dT =$$

$$= \left( 6K_m - \frac{2}{3}G_m \right) C_2 - 2G_m \frac{C_3}{R_0^2} + \left( 3K_m - \frac{2}{3}G_m \right) \varepsilon_z - 3K_m \int_{T_0}^T \alpha_m(T) dT, \quad 3$$

$$2 \left( 3K_g - \frac{2G_g}{3} \right) \hat{C}_1(t) + 9K_g \varepsilon_z(t) + \frac{2G_g}{3} \int_0^t M(t, t') \hat{C}_1(t') dt' - 3K_g \int_{T_0}^T \alpha_g(T) dT +$$

$$+ \left( \frac{R_1^2}{R_0^2} - 1 \right) \left[ 2 \left( 3K_m - \frac{2}{3}G_m \right) C_2(t) + \left( 3K_m + \frac{4}{3}G_m \right) \varepsilon_z(t) - 3K_m \int_{T_0}^T \alpha_m(T) dT \right] = 0. \quad 4$$

Уравнения системы (20)<sub>1</sub> и (20)<sub>2</sub>, линейная комбинация (20)<sub>3</sub> (20)<sub>4</sub> образуют, в свою очередь, систему линейных алгебраических уравнений, разрешая которые относительно  $C_2(t)$ ,  $C_3(t)$  и  $\varepsilon_z(t)$ , выражая через  $\hat{C}_1$  и затем подставляя в уравнение (20)<sub>4</sub>, получаем интегральное уравнение Вольтерры 2-го рода, содержащее только  $\hat{C}_1$ :

$$\hat{C}_1(t) = \Delta(t) + \gamma \int_0^t M(t, t') \hat{C}_1(t') dt'. \quad (21)$$

Здесь выражения для  $\gamma$  и  $\Delta(t)$  не приводятся вследствие их громоздкости и очевидности получения.

Резольвентой данного интегрального уравнения служит ряд

$$R(t, t', \gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i M_{i+1}(t, t'),$$

который сходится абсолютно и равномерно, так как ядро интегрального уравнения (2) —  $M(t, t')$ , непрерывно при  $0 \leq t \leq t_{\max}$  и  $0 \leq t' \leq t$ , и решение уравнения (21) примет вид:

$$\hat{C}_1(t) = g(t) + \gamma \int_0^t R(t, t', \gamma) g(t') dt'.$$

Если ядро (2) интегрального уравнения разностное:  $M(t-t') = e^{-\left(\frac{(t-t')K}{\eta}\right)^b}$ , то при  $b=1$  и постоянной вязкости  $\eta = \eta_r$  резольвента имеет простой аналитический вид:

$$R(t, t', \gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\gamma^i (t-t')^i}{i!} e^{-\frac{(t-t')K}{\eta_r}} = e^{\gamma(t-t')} e^{-\frac{(t-t')K}{\eta_r}} = e^{(t-t')\left(\gamma - \frac{K}{\eta_r}\right)},$$

и тогда

$$\hat{C}_1 = \hat{C}_1(t) = g(t) + \gamma \int_0^t e^{(t-t')\left(\gamma - \frac{K}{\eta_r}\right)} g(t') dt'. \quad (22)$$

При описании пластического течения во внешнем цилиндрическом слое уравнением текучести Мизеса (9) и вязкоупругого деформирования с учетом структурных изменений путем введения релаксационного ядра Кольрауша (2) получить аналитическое решение задачи (1)–(13) пока не представляется возможным, даже на основе всех принятых упрощений. Разработан численно-аналитический метод решения задачи (1)–(13), его алгоритм оттестирован на аналитическом решении задачи (16)–(22).

#### 4. Численно-аналитический метод

Особенностью задачи (1)–(13) является ее зависимость от истории нагружения, поэтому при численной реализации все уравнения были переписаны в малых приращениях во времени всех параметров. Рассматривалась кусочно-равномерная по координатам и времени сетка с шагами  $\Delta r_g$ ,  $\Delta r_m$ ,  $\Delta t$  и  $\Delta t'$ . Аппроксимация всех определяющих соотношений конечно-разностным методом хорошо описана, например, в работе [28], поэтому выделим только особенности развиваемого авторами в данной работе подхода.

На каждом временном слое  $k$  приращение перемещений во внутреннем цилиндре записываются как известные функции координат, в которых следует найти только приращение константы интегрирования:  $\Delta u^k = \Delta C_1^k \cdot r$ . Приращения перемещений во внешнем цилиндре рассматриваются как сеточные функции  $\Delta u_j^k$ , подлежащие определению из решения системы, получаемой при конечно-разностной записи уравнения (15). При этом приращение константы  $\Delta C_1^k$  может быть найдено из решения совместной системы, следующей из конечно-разностного представления уравнений (12) и (15). Учитывая малую величину шага, влияние релаксационных процессов на напряжения предлагается отыскивать в виде разности сумм приращений напряжений на всех предыдущих временных слоях и «релаксационных корректировочных» напряжений на текущем слое.

Для нахождения пластических деформаций предлагается использовать метод дополнительных деформаций, при котором реализуется двухэтапный итерационный метод [29]. На каждом шаге определяются нулевые приращения напряжений и деформаций. Если одновременно с этим не выполняется условие (9), то приращение пластических деформаций считается равным нулю и осуществляется переход на следующий временной слой; если условие (9) выполняется, то возникает пластическая деформация, «корректирующая» напряжения. И тогда запускается итерационная процедура вычисления этой пластической деформации.

Алгоритм вычисления совместных вязкоупругих напряжений в стекле с учетом структурных изменений при переходе через фазу стеклования и упругопластических напряжений в металле на каждом временном слое представлен в Таблице 1.

Таблица 1. Алгоритм реализации

№ шага	$0 \leq r \leq R_0, \Delta r_g, j = 1, \dots, J_0, r_j = j\Delta r_g$	$R_1 \leq r \leq R_2, \Delta r_m, j = 1, \dots, J_0, r_j = j\Delta r_m$
	Задание исходных данных	
1	Начальные условия ( $k = 0$ ) (верхний индекс у переменной означает номер временного слоя) $\Delta T^0 = 0, \Delta u_j^0 = 0, \Delta \varepsilon_{r,\varphi,z}^0 = 0, \Delta \varepsilon_{r,\varphi,z,j}^{p0} = 0, \Delta \sigma_{r,\varphi,z}^0 = 0, \Delta \sigma_{r,\varphi,z,cor}^0 = 0$	
2	Вычисление структурного параметра $T_f^k$ на каждом временном слое $k$ $T_f^k = T^0 + \sum_{k=1}^k \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{\xi^k - \xi^{k-1}}{\eta_r} \right) K_{rs} \right) \right) \Delta T^k,$ $\xi^k = \xi^{k-1} + \sum_{k=1}^k \frac{\eta_r \Delta T}{\eta^{k-1}},$ $\lg \eta^k = \lg \eta^0 + B_c \left( (T_f^k)^{-1} - (T^0)^{-1} \right) + B_f \left( (T^k)^{-1} - (T_f^k)^{-1} \right),$ $\alpha^k = \alpha_c + (\alpha_f - \alpha_c) \frac{\Delta T_f^k}{\Delta T^k}$	
3	Определение приращений перемещений на каждом временном слое $k$ $\Delta u_j^k = \Delta C^k r_j$	$\left( \frac{\Delta r_m}{2r_j} + 1 \right) \Delta u_{j+1}^k - \left( \frac{\Delta r_m^2}{r_j^2} + 2 \right) \Delta u_j^k + \left( 1 - \frac{\Delta r_m}{2r_j} \right) \Delta u_{j-1}^k =$ $= \frac{2G_m \Delta r_m^2}{(4G_m/3) + K_m} \left( \frac{\Delta \varepsilon_{\varphi j+1}^{pk-1} - \Delta \varepsilon_{\varphi j-1}^{pk-1}}{2\Delta r_m} + \frac{\Delta \varepsilon_{r,j}^{pk-1} - \Delta \varepsilon_{\varphi j}^{pk-1}}{r_j} \right)$ $u_j^k = u_j^{(k-1)} + \Delta u_j^k$
4	Дополнение системы на шаге № 3 аппроксимированными уравнениями (12) с использованием формулы шага № 5 для нахождения приращений $\Delta C^k, \Delta u_j^k, \Delta \varepsilon_z^k$ . $\Delta C^k = \frac{\Delta u_{j_0}^k}{J_0 \Delta r_g},$ $\sigma_r^{k-1} + \left( \frac{2}{3} G_g + 6K_g \right) \Delta C^k + \left( 3K_g - \frac{2}{3} G_g \right) \Delta \varepsilon_z^k - 3K_g \Delta \tilde{\alpha}_g^k - \Delta \sigma_{cor,r}^k =$ $= \sigma_{r,j_0}^{k-1} + \left( \frac{4}{3} G_m + 3K_m \right) \frac{\Delta u_{j_0+1}^k - \Delta u_{j_0}^k}{\Delta r_m} + \left( 3K_m - \frac{2}{3} G_m \right) \left( \frac{\Delta u_{j_0}^k}{R_0} + \Delta \varepsilon_z^k \right) - 3K_m \Delta \tilde{\alpha}_m^k - 2G_m \Delta \varepsilon_{r,j_0}^{pk-1},$ $\sigma_{r,j_1}^{k-1} + \left( \frac{4}{3} G_m + 3K_m \right) \frac{\Delta u_{j_1}^k - \Delta u_{j_1-1}^k}{\Delta r_m} + \left( 3K_m - \frac{2}{3} G_m \right) \left( \frac{\Delta u_{j_1}^k}{R_1} + \Delta \varepsilon_z^k \right) - 3K_m \Delta \tilde{\alpha}_m^k - 2G_m \Delta \varepsilon_{r,j_1}^{pk-1} = 0,$ $\frac{R_0^2}{2} \left( \sigma_z^{k-1} + 2 \left( 3K_g - \frac{2}{3} G_g \right) \Delta C^k + \left( 3K_g + \frac{4}{3} G_g \right) \Delta \varepsilon_z^k - 3K_g \Delta \tilde{\alpha}_g^k - \Delta \sigma_{cor,z}^k \right) = \frac{R_1 - R_0}{J_1 - J_0} \frac{1}{2} \sum_{j=J_0+1}^{J_1} \left( \sigma_{z,j-1}^k r_{j-1} + \sigma_{z,j}^k r_j \right),$ здесь $\sigma_{z,j}^k = \sigma_{z,j}^{k-1} + \left( \frac{4}{3} G_m + 3K_m \right) \Delta \varepsilon_z^k + \left( 3K_m - \frac{2}{3} G_m \right) \left( \frac{\Delta u_{j+1}^k - \Delta u_{j-1}^k}{\Delta r_m} + \frac{\Delta u_j^k}{r_j} \right) - 3K_m \Delta \tilde{\alpha}_m^k - 2G_m \Delta \varepsilon_{z,j}^{pk-1} = 0$	
5	Определение приращений напряжений и напряжений на каждом временном слое $k$ $\Delta \sigma_r^k = \Delta \sigma_{\varphi}^k = \left( \frac{2}{3} G_g + 6K_g \right) \Delta C^k +$ $+ \left( 3K_g - \frac{2}{3} G_g \right) \Delta \varepsilon_z^k - 3K_g \Delta \tilde{\alpha}_g^k - \Delta \sigma_{cor,r,\varphi}^k,$ $\Delta \sigma_z^k = 2 \left( 3K_g - \frac{2}{3} G_g \right) \Delta C^k + \left( 3K_g + \frac{2}{3} G_g \right) \Delta \varepsilon_z^k -$ $- 3K_g \Delta \tilde{\alpha}_g^k - \Delta \sigma_{cor,z}^k,$ $\Delta \sigma_{cor,s}^k = \sum_{k=1}^{k-1} \left( 1 - e^{-\left( \frac{\xi^k - \xi^{k-1}}{\eta_r} \right) K_{rs}} \right) \Delta \sigma_s^{k-1} -$ $- \sum_{k=1}^{k-2} \left( 1 - e^{-\left( \frac{\xi^k - \xi^{k-1}}{\eta_r} \right) K_{rs}} \right) \Delta \sigma_s^{k-1}$ $s = r, \varphi, z$ $\Delta \tilde{\alpha}_g^k = \alpha_g^k \cdot \Delta T, \alpha_g^k = \alpha_g(T^k)$	$\Delta \sigma_{\varphi j}^k = \left( \frac{4}{3} G_m + 3K_m \right) \frac{\Delta u_{j+1}^k - \Delta u_{j-1}^k}{2\Delta r_m} + \left( 3K_m - \frac{2}{3} G_m \right) \left( \frac{\Delta u_j^k}{r_j} + \Delta \varepsilon_z^k \right) -$ $- 3K_m \Delta \tilde{\alpha}_m^k - 2G_m \Delta \varepsilon_{\varphi j}^{pk},$ $\Delta \sigma_{\varphi j}^k = \left( \frac{4}{3} G_m + 3K_m \right) \frac{\Delta u_j^k}{r_j} + \left( 3K_m - \frac{2}{3} G_m \right) \left( \frac{\Delta u_{j+1}^k - \Delta u_{j-1}^k}{2\Delta r_m} + \Delta \varepsilon_z^k \right) -$ $- 3K_m \Delta \tilde{\alpha}_m^k - 2G_m \Delta \varepsilon_{\varphi j}^{pk},$ $\Delta \sigma_{zj}^k = \left( \frac{4}{3} G_m + 3K_m \right) \Delta \varepsilon_z^k + \left( 3K_m - \frac{2}{3} G_m \right) \left( \frac{\Delta u_{j+1}^k - \Delta u_{j-1}^k}{2\Delta r_m} + \frac{\Delta u_j^k}{r_j} \right) -$ $- 3K_m \Delta \tilde{\alpha}_m^k - 2G_m \Delta \varepsilon_{zj}^{pk},$ $\Delta \tilde{\alpha}_m^k = \alpha_m^k \cdot \Delta T, \alpha_m^k = \alpha_m(T^k).$
6	$\sigma_{rj}^k = \sigma_{rj}^{k-1} + \Delta \sigma_{rj}^k, \quad \sigma_{\varphi j}^k = \sigma_{\varphi j}^{k-1} + \Delta \sigma_{\varphi j}^k, \quad \sigma_{zj}^k = \sigma_{zj}^{k-1} + \Delta \sigma_{zj}^k$ Вычисление приращений пластической деформации методом дополнительных деформаций. Если напряжения на $k$ -м шаге по времени удовлетворяют условиям (9), включается счетчик итераций $l$	

<p>На каждой итерации уточняются <math>\Delta C^k</math>, <math>\Delta \varepsilon_z^k</math> и определяются <math>\Delta \sigma_r^k</math>, <math>\Delta \sigma_\phi^k</math> и <math>\Delta \sigma_z^k</math></p>	<p style="text-align: center;"><math>l = 0, k = 0</math></p> $\Delta \varepsilon_{rj}^0 = \frac{2}{3} \Delta \sigma_{rj}^k - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{\phi j}^0 + \Delta \sigma_{zj}^0), \quad \Delta \varepsilon_{\phi j}^0 = \frac{2}{3} \Delta \sigma_{\phi j}^k - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{rj}^0 + \Delta \sigma_{zj}^0),$ $\Delta \varepsilon_{zj}^0 = \frac{2}{3} \Delta \sigma_{zj}^k - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{\phi j}^0 + \Delta \sigma_{rj}^0).$ <p>Расчет интенсивности приращений пластических деформаций</p> $\Delta \varepsilon_{ij}^0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta \varepsilon_{rj}^0 - \Delta \varepsilon_{\phi j}^0)^2 + (\Delta \varepsilon_{\phi j}^0 - \Delta \varepsilon_{zj}^0)^2 + (\Delta \varepsilon_{zj}^0 - \Delta \varepsilon_{rj}^0)^2}.$ <p>Переопределение приращений пластических деформаций как</p> $\Delta \varepsilon_{rj}^{p0} = \frac{3 \Delta \varepsilon_{ij}^{p0}}{2 \sigma_T} \left( \frac{2}{3} \Delta \sigma_{rj}^0 - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{\phi j}^0 + \Delta \sigma_{zj}^0) \right),$ $\Delta \varepsilon_{\phi j}^{p0} = \frac{3 \Delta \varepsilon_{ij}^{p0}}{2 \sigma_T} \left( \frac{2}{3} \Delta \sigma_{\phi j}^0 - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{rj}^0 + \Delta \sigma_{zj}^0) \right),$ $\Delta \varepsilon_{zj}^{p0} = \frac{3 \Delta \varepsilon_{ij}^{p0}}{2 \sigma_T} \left( \frac{2}{3} \Delta \sigma_{zj}^0 - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{\phi j}^0 + \Delta \sigma_{rj}^0) \right).$ <p>Переопределение интенсивности приращений пластических деформаций</p> $\Delta \varepsilon_{ij}^{p0} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta \varepsilon_{rj}^{p0} - \Delta \varepsilon_{\phi j}^{p0})^2 + (\Delta \varepsilon_{\phi j}^{p0} - \Delta \varepsilon_{zj}^{p0})^2 + (\Delta \varepsilon_{zj}^{p0} - \Delta \varepsilon_{rj}^{p0})^2}$ <p>Найденные приращения пластических деформаций <math>\Delta \varepsilon_{rj}^{p0}</math>, <math>\Delta \varepsilon_{\phi j}^{p0}</math>, <math>\Delta \varepsilon_{zj}^{p0}</math> подставляются в уравнения шагов № 3 и 4 и находятся приращения перемещений. Затем по формулам шага № 5 переопределяются напряжения. Далее осуществляется итерационный процесс вычисления приращений деформаций</p> <p style="text-align: center;"><math>l = 1</math></p> $\Delta \varepsilon_{rj}^{p1} = \frac{3 \Delta \varepsilon_{ij}^{p0}}{2 \sigma_T} \left( \frac{2}{3} \Delta \sigma_{rj}^{k1} - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{\phi j}^1 + \Delta \sigma_{zj}^1) \right),$ $\Delta \varepsilon_{\phi j}^{p1} = \frac{3 \Delta \varepsilon_{ij}^{p0}}{2 \sigma_T} \left( \frac{2}{3} \Delta \sigma_{\phi j}^1 - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{rj}^1 + \Delta \sigma_{zj}^1) \right),$ $\Delta \varepsilon_{zj}^{p1} = \frac{3 \Delta \varepsilon_{ij}^{p0}}{2 \sigma_T} \left( \frac{2}{3} \Delta \sigma_{zj}^1 - \frac{1}{3} (\Delta \sigma_{\phi j}^1 + \Delta \sigma_{rj}^1) \right),$ $\Delta \varepsilon_{ij}^{p1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\Delta \varepsilon_{rj}^{p1} - \Delta \varepsilon_{\phi j}^{p1})^2 + (\Delta \varepsilon_{\phi j}^{p1} - \Delta \varepsilon_{zj}^{p1})^2 + (\Delta \varepsilon_{zj}^{p1} - \Delta \varepsilon_{rj}^{p1})^2}$ <p style="text-align: center;"><math>l = 2</math></p> <p>Итерационный процесс прекращается при выполнении условия</p> $ u_j^l - u_j^{l-1}  /  u_j^l  \leq \varepsilon.$ <p>Здесь <math>\varepsilon</math> – заданная точность. Тогда <math>l = k</math>, и происходит переход на следующий – <math>(k + 1)</math>-й, временной слой</p>
---	--

## 5. Результаты расчетов

Аппроксимированные решения, полученные по описанному алгоритму (Табл. 1), сравнивались с аналитическим решением системы (16)–(21). Численная реализация осуществлялась в упругой области при равномерном охлаждении от  $600^\circ\text{C}$  со скоростью  $0,05^\circ\text{C}/\text{с}$  при разных шагах по времени; результаты приведены на рисунке 4. Видно, что численное решение сходится к аналитическому, которое в начале процесса имеет линейный характер и большие по модулю напряжения. На 4-м и последующих рисунках их части, выделенные окружностью, приводятся во вставках в увеличенном масштабе.

При исследовании различных режимов отжига использовались данные для боросиликатного стекла [31]:  $\eta_0 = 10^{4,25}$  МПа·с;  $B_e = 28726,85^\circ\text{C}$ ;  $B_f = 13726,85^\circ\text{C}$ ;  $K_{rs} = 10^{10,7}$ ;  $b_s = 0,65$ ;  $\eta_r = 10^3$  МПа·с;  $\alpha_f = 52 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $\alpha_e = 210 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $K_{\tau\sigma} = 10^{4,7}$ ;  $b_\sigma = 0,5$ ;  $G_g = 0,24 \times 10^5$  МПа;  $K_g = 0,4 \times 10^5$  МПа;  $\alpha_m = 115 \times 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ;  $G_m = 0,81 \times 10^5$  МПа;  $K_m = 1,75 \times 10^5$  МПа. Температурные режимы отжига моделировались с помощью параметров:  $q_1$  — скорости охлаждения от  $T_{\max} = 600^\circ\text{C}$  до  $T_{\text{от}} = 400^\circ\text{C}$ ;  $t_2$  — времени выдержки при  $T_{\text{от}}$ ;  $q_3$  — скорости охлаждения от  $T_{\text{от}}$  до  $T_{\text{cp}} = 20^\circ\text{C}$  (Табл. 2). Скорость охлаждения от температуры отжига задавалась постоянной и соответствующей охлаждению образцов, извлеченных из печи после выдержки при определенной температуре;  $q_3 = 0,25^\circ\text{C}/\text{с}$ .

Таблица 2. Параметры отжига

№ режима	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q_1, ^\circ\text{C}/\text{c}$	0,008	0,016	0,05	0,008	0,016	0,05	0,008	0,016	0,05
$t_2, \text{c}$	1800	1800	1800	3000	3000	3000	0	0	0

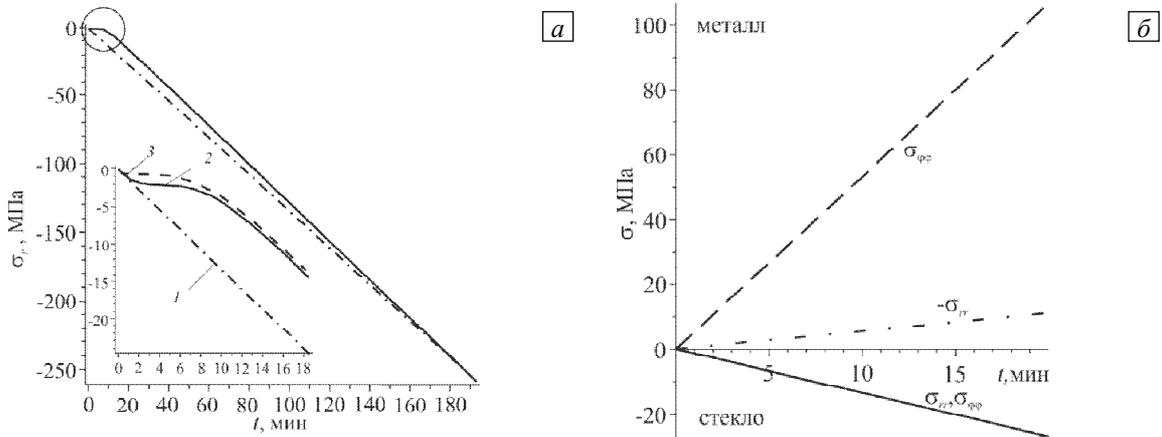


Рис. 4. К сравнению результатов расчетов с аналитическим решением (зависимость 1); данные вычислений по алгоритму из таблицы 1 при различных шагах по времени,  $\Delta t$  : 0,01 (2), 0,1 (3); демонстрация сходимости численного решения (а) и характер напряжений (б)

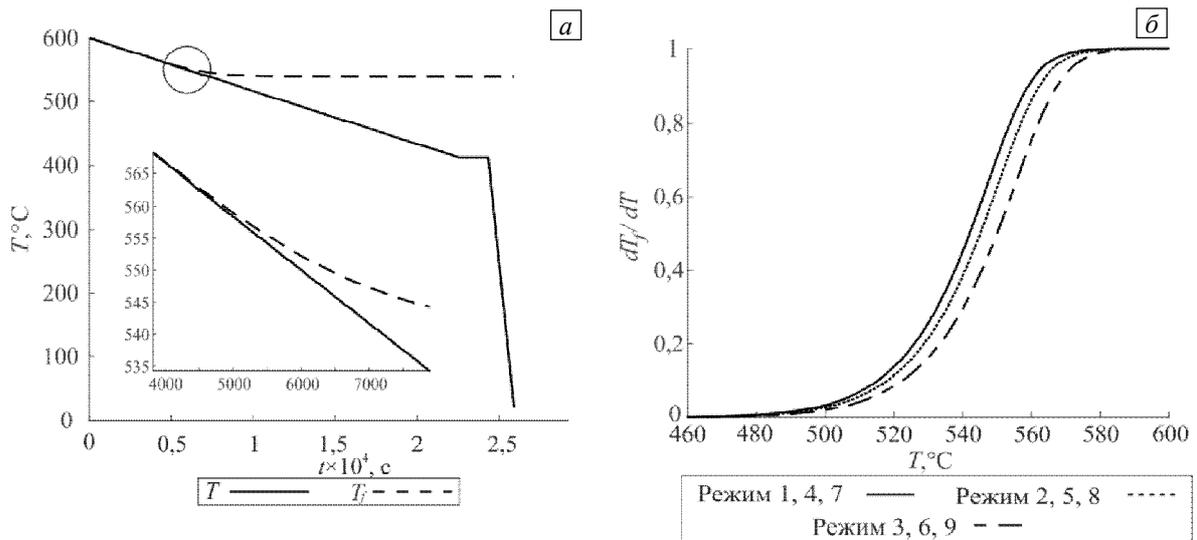


Рис. 5. Пример изменения фиктивной температуры для режима № 1 (а) (в выделенной области приведен интервал температур, в котором происходит отклонение  $T_f$  от  $T$ ); изменение скорости фиктивной температуры для трех режимов отжига (б)

Расчеты показали, что в начале охлаждения структурная температура совпадает с текущей температурой, а далее начинает отставать и стабилизируется (становится постоянной) (Рис. 5). С отставанием этой температуры отражается на структуре жидкости: она перестает успевать за поведением структурной (фиктивной) температуры. Стабилизация последней показывает, что стекло находится в замороженном состоянии. На рисунке 6 представлены результаты изменения вязкости и коэффициента линейного температурного расширения для моделируемых режимов 1, 2 и 3 отжига в стекле и металле. Изменение коэффициента незначительно и почти линейно зависит от температуры.

По кривым интенсивности напряжений (Рис. 7а) и напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_z$  (Рис. 7в, г) в стеклянном компоненте спая при отжиге до  $T_{от} = 400^\circ\text{C}$ , что соответствует  $T_f = \text{const}$  с разными скоростями охлаждения, можно сказать, что при такой температуре отжига изменение скорости после выдержки не сильно повлияло на результаты расчета. Однако заметна разница в максимальных значениях напряжений (в 1,5 раза (Рис. 7в, г)) на первом этапе охлаждения для разных режимов. Поскольку напряжения имеют положительный знак и являются растягивающими, то предпочтительно выбирать скорость охлаждения с меньшими растягивающими напряжениями.

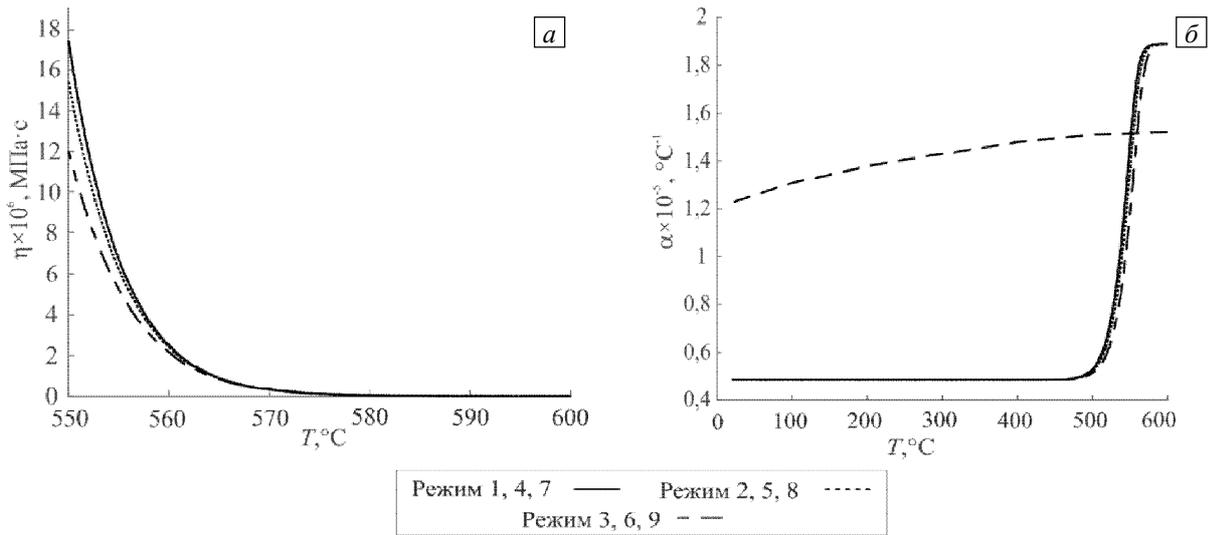


Рис. 6. Изменение вязкости (а) и коэффициента линейного температурного расширения стекла (б); для сравнения на (б) пунктиром показана зависимость от температуры коэффициента металла

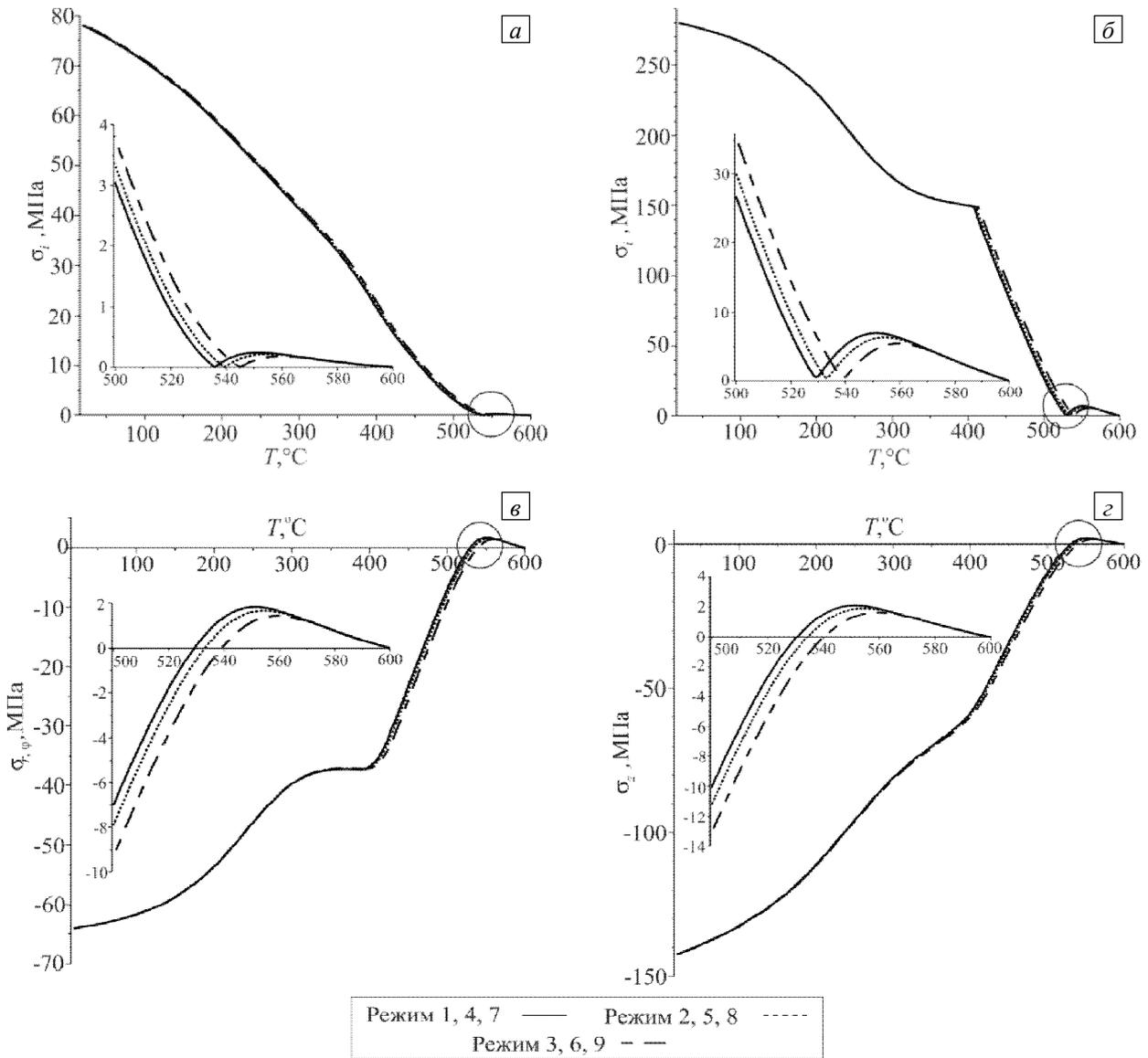


Рис. 7. Распределение интенсивности напряжений  $\sigma_r$  в стекле (а) и металле (б), а также распределение напряжений, возникающих в сечении стеклянной составляющей стержня  $\sigma_r$  (е) и  $\sigma_z$  (z), для разных режимов отжига

Отдельная задача — подбор температуры отжига. На рисунке 7 приведены результаты для  $T_{от} = T_f = \text{const}$  с нулевой погрешностью отклонения от константы (для рассматриваемых теплофизических параметров  $T_{от} = T_f = 400^\circ\text{C}$  (Рис.5)). Изменение интенсивности напряжений в стекле при разных температурах отжига (Рис. 8), позволяет отметить незначительный скачок (см. выделенный фрагмент) в значении интенсивности при  $540^\circ\text{C}$ . Данная температура выбиралась далее в качестве  $T_{от}$  при расчетах по режимам из Таблицы 2. Температуры отжига на рисунке 8 соответствуют различным значениям фиктивной температуры:  $570^\circ\text{C}$  отвечает  $T_f = T$ ;  $540^\circ\text{C}$  —  $T_f \neq T$  и  $T_f = \text{const}$ ;  $493^\circ\text{C}$  —  $T_f \neq T$  и  $T_f = \text{const}$  с погрешностью отклонения от константы  $\varepsilon = 0,005$ .

Поскольку для стекла опасными являются напряжения растяжения, то в качестве оптимального в данном случае был выбран режим № 4 (Табл.2), при котором напряжения растяжения на первом этапе достигают минимальной величины и максимально уменьшаются при выдержке, включающей охлаждение со скоростью  $0,008^\circ\text{C}/\text{с}$  до температуры  $540^\circ\text{C}$ , выдержку в течение 3000 с, дальнейшее охлаждение со скоростью  $0,25^\circ\text{C}/\text{с}$ .

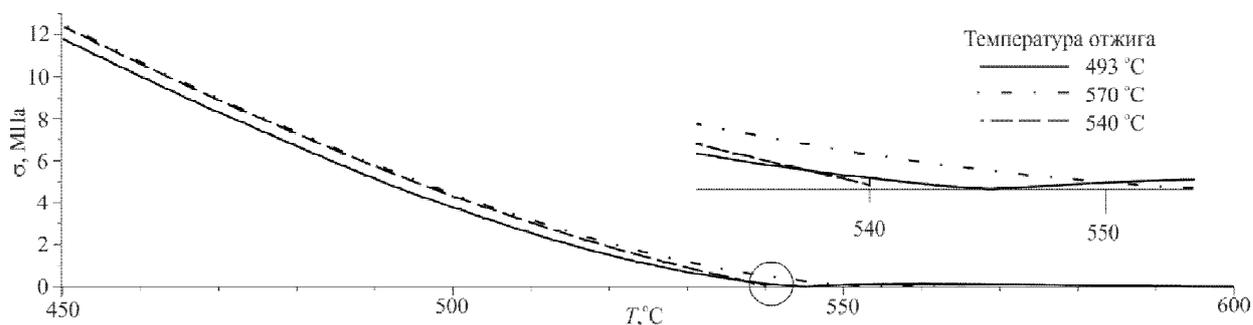


Рис. 8. Распределение интенсивности напряжений в стекле при разных значениях температуры отжига  $T_{от}$

## 6. Заключение

Поставлена и решена задача определения изменения параметров напряженно-деформируемого состояния в двухслойном цилиндрическом стеклометаллокомпозите при отжиге с учетом процесса стеклования во внутреннем стеклянном слое и пластического деформирования внешнего металлического слоя. Для метода ТНММ предложен алгоритм расчета цилиндрического стеклющегося слоя, сопряженного с пластично деформируемым нестеклющимся слоем. Для конкретно выбранных материалов продемонстрирован расчет технологических напряжений по разработанному алгоритму и выбран оптимальный режим отжига.

Расчеты по предложенному алгоритму позволяют вычислить технологические напряжения, возникающие вследствие структурных и механических релаксационных процессов. В целом алгоритм может быть применен для моделирования термонапряженного состояния в многослойных цилиндрических композитах, имеющих стеклющиеся слои.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Министерства науки и высшего образования РФ №14.584.21.0034. Уникальный идентификатор соглашения RFMEFI58418X0034.

## Литература

1. Пикун В.В. Эффективность стеклометаллокомпозита // Перспективные материалы. 2000. № 6. С. 63-65.
2. Фролова Е.Г. Стекланные покрытия на стальных трубах // «Стекло»: Бюллетень НИИ стекла. 1961. № 3. 36 с.
3. Любимова О.Н., Морковин А.В., Дрюк С.А. Особенности структуры зоны соединения стекла и стали в технологии получения стеклометаллокомпозита // Материаловедение. 2017. № 4. С. 3-7.
4. Тропин Т.В., Шмельцер Ю.В.П., Аксенов В.Л. Современные аспекты кинетической теории стеклования // УФН. 2016. Т. 186, № 1. С. 47-73. DOI
5. Александров А.П., Лазуркин Ю.С. Температура размягчения полимеров // Доклады АН СССР. 1944. Т. XLIII, № 9. С. 396-399.
6. Шульц М.М., Мазурин О.В. Современные представления о строении стекол и их свойствах. Л.: Наука, 1988. 197 с.
7. Schmelzer J.W.P. Kinetic criteria of glass formation and the pressure dependence of the glass transition temperature // J. Chem. Phys. 2012. Vol. 136. 074512. DOI
8. Старцев Ю.К. Феноменологическое описание стеклования и процессов структурной релаксации // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2015. Вып. 7. С. 494-504.
9. Мазурин О.В. Отжиг спаев стекла с металлом. Л.: Энергия, 1980. 140 с.

10. Мазурин О.В., Старцев Ю.К., Ходяковская Р.Я. Релаксационная теория отжига стекла и расчет на ее основе режимов отжига. М: МХТИ им. Д.И. Менделеева, 1987. 83 с.
11. Старцев Ю.К. Релаксационные явления в стеклах в интервале стеклования при отжиге, ионном обмене стекла с расплавом соли и в спаях / Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.04.07. С.-Петербург: ИХС РАН, 2001. 301с.
12. Мазурин О.В. Стеклование. Л.: Наука, 1986. 158 с.
13. Tool A.Q. Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range // J. Am. Ceram. Soc. 1946. Vol. 29, no. 9. P. 240-253. DOI
14. Narayanaswami O.S. A model of structural relaxation in glass // J. Am. Ceram. Soc. 1971. Vol. 54, no. 10. P. 491-498. DOI
15. Moynihan C.T., Macedo P.B., Montrose C.J., Montrose C.J., Gupta P.K., DeBolt M.A., Dill J.F., Dom B.E., Drake P.W., Eastale A.J., Elterman P.B., Moeller R.P., Sasabe H., Wilder J.A. Structural relaxation in vitreous material // Ann. New York Acad. Sci. 1976. Vol. 279. P. 15-35. DOI
16. Гончукова Н.О. Расчет напряжений в аморфных никель-фосфорных покрытиях на металлических подложках // ФХС. 2004. Т. 30, № 4. С. 484-487. (English version DOI)
17. Ратушняк С.Л. Структурная релаксация в аморфных материалах и влияние напряжений на прочность композиции «покрытие – подложка» / Дис. ... канд. хим. наук: 02.00.04. С.-Петербург, ИХС РАН, 2008. 131 с.
18. Труфанов А.Н., Лесникова Ю.И., Труфанов Н.А., Сметанников О.Ю. Выбор критерия конструкционной прочности неоднородного кварцевого стержня на основе натуральных и вычислительных экспериментов // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 1. С. 97-108. DOI
19. Сметанников О.Ю., Ильиных Г.В. Исследование термомеханического поведения стыковочного модуля волоконно-оптического гироскопа // Оптический журнал. 2014. Т. 81. № 7. С. 46-52. (English version DOI)
20. Matveenko V.P., Smetannikov O.Y., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition // Acta Mech. 2012. Vol. 223. P. 1261-1284. DOI
21. Briard R., Heitz C., Barthel E. Crack bridging mechanism for glass strengthening by organosilane water-based coatings // J. Non Cryst. Solids. 2005. Vol. 351. P. 323-330. DOI
22. Hand R.J., Ellis B., Whittle B.R., Wang F.H. Epoxy based coatings on glass: strengthening mechanisms // J. Non Cryst. Solids. 2003. Vol. 315. P. 276-287. DOI
23. Priller S., Frischat G.H., Pye L.D. Strengthening of glass through surface crystallization of  $\beta$ -spodumene ss // J. Non Cryst. Solids. 1996. Vol. 196. P. 144-149. DOI
24. Pikul V.V., Goncharuk V.K., Maslennikova I.G. A cylindrical shell made of glass-metal composite // Appl. Mech. Mater. 2015. Vol. 756. P. 230-235. DOI
25. Немцов С.В. Оптическое материаловедение: Физическая химия стекла. СПб: СПбГУ ИТМО, 2009 г. 113 с.
26. Бартнев Г.М., Сандитов Д.С. Релаксационные процессы в стеклообразных системах. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.
27. Любимов М.Л. Спаи стекла с металлом. М.: Энергия, 1968. 280 с.
28. Солоненко Э.П. Моделирование напряженного состояния в стеклометаллокомпозитных материалах при температурной обработке / Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. Комсомольск-на-Амуре, ДВФУ, 2017. 154 с.
29. Галанин М.П., Гузев М.А., Низкая Т.В. Численное решение задачи термопластичности с дополнительными параметрами состояния: Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2007. 20 с. (URL: [https://www.keldysh.ru/papers/2007/prep08/prep2007\\_08.html](https://www.keldysh.ru/papers/2007/prep08/prep2007_08.html))
30. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: МАШГИЗ, 1963. 232 с.
31. Мазурин О.В., Стрельцина М.В., Швайко-Швайковская Т.П. Свойства стекол и стеклообразующих расплавов. Л.: Наука, 1977. Т. 3. Ч. 1. Трехкомпонентные силикатные системы. 586 с.

## References

1. Pikul' V.V. Effektivnost' steklo-metallokompozita [Efficiency of glass-metal composite]. *Perspektivnyye materialy*, 2000, no. 6, pp. 63-65.
2. Frolova E.G. Steklyannyye pokrytiya na stal'nykh trubakh [Glass coatings on steel pipes]. "Steklo": *Byulleten' NII stekla*, 1961, no. 3, 36 p.
3. Lyubimova O.N., Morkovin A.V., Dryuk S.A. Features of welding zone structure between glass and steel in production technology of glass-metal composite. *Materialovedenie – Materials Science*, 2017, no. 4, pp. 3-7.
4. Tropin T.V., Schmelzer J.W., Aksenov V.L. Modern aspects of the kinetic theory of glass transition. *Physics-Uspekhi*, 2016, vol. 59, no. 1, pp. 42-66. DOI
5. Alexandrov A.P., Lasurkin Yu. S. Softening temperature of polymers // *Doklady ASUSSA*. 1944. T. XLIII, № 9. P. 396-399.
6. Shul'ts M.M., Mazurin O.V. *Sovremennyye predstavleniya o stroynii stekol i ikh svoystvakh* [Modern ideas about the structure of glass and their properties]. Lenindrad, Nauka, 1988. 197 p.
7. Schmelzer J.W.P. Kinetic criteria of glass formation and the pressure dependence of the glass transition temperature. *J. Chem. Phys.*, 2012, vol. 136, 074512. DOI
8. Startsev Yu.K. *Phenomenological description of the glass transition and structural relaxation processes* // *Fiziko-khimicheskiye aspekty izucheniya klasterov, nanostruktur i nanomaterialov* [Physical and chemical aspects of studying clusters, nanostructures and nanomaterials]. Tver', Tver. gos. un-t, 2015. Vol. 7. Pp. 494-504.
9. Mazurin O.V. *Otzhig spayev stekla s metallom* [Annealing of soldering glass with metal]. Lenindrad, Energiya, 1980. 140 p.
10. Mazurin O.V., Startsev Yu.K., Khodyakovskaya R.Ya. *Relaksatsionnaya teoriya otzhiga stekla i raschet na eye osnove rezhimov otzhiga* [Relaxation theory of glass annealing and calculation of annealing modes based on it]. Moscow, MKhTI im. D.I. Mendeleyeva, 1987. 83 p

11. Startsev Yu.K. *Relaksatsionnyye yavleniya v steklakh v intervale steklovaniya pri otzhige, ionnom obmene stekla s rasplavom soli i v spyayakh* [Relaxation phenomena in glasses in the glass transition range during annealing, ion exchange of glass with molten salt, and in junctions]. DSc Dissertation, Institute of Silicate Chemistry RAS, Saint Petersburg, 2001. 301 p.
12. Mazurin O.V. *Steklovaniye* [Glass transition]. Lenindrad, Nauka, 1986. 158 p.
13. Tool A.Q. Relation between inelastic deformability and thermal expansion of glass in its annealing range. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1946, vol. 29, no. 9, pp. 240-253. [DOI](#)
14. Narayanaswami O.S. A model of structural relaxation in glass. *J. Am. Ceram. Soc.*, 1971, vol. 54, no. 10, pp. 491-498. [DOI](#)
15. Moynihan C.T., Macedo P.B., Montrose C.J., Montrose C.J., Gupta P.K., DeBolt M.A., Dill J.F., Dom B.E., Drake P.W., Eastal A.J., Elterman P.B., Moeller R.P., Sasabe H., Wilder J.A. Structural relaxation in vitreous material. *Ann. New York Acad. Sci.*, 1976, vol. 279, pp. 15-35. [DOI](#)
16. Gonchukova N.O. Calculation of stresses in amorphous nickel–phosphorus coatings on metallic substrates. *Glass Physics and Chemistry*, 2004, vol. 30, pp. 356-358. [DOI](#)
17. Ratushnyak S.L. *Strukturnaya relaksatsiya v amorfnykh materialakh i vliyaniye napryazheniy na prochnost' kompozitsii "pokrytiye – podlozhka"* [Structural relaxation in amorphous materials and the effect of stresses on the strength of the coating – substrate composition]. PhD Dissertation, Institute of Silicate Chemistry RAS, Saint Petersburg, 2008. 131 p.
18. Trufanov A.N., Lesnikova Yu.I., Trufanov N.A., Smetannikov O.Yu. Selection of a structural strength criterion for inhomogeneous silica rod on the basis of full-scale and computational experiments. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 97-108. [DOI](#)
19. Smetannikov O.Yu., Il'inykh G.V. Study of the thermomechanical behavior of the interface module of a fiber-optic gyroscope. *J. Opt. Tech.*, 2014, vol. 81, pp. 397-402. [DOI](#)
20. Matveenko V.P., Smetannikov O.Y., Trufanov N.A., Shardakov I.N. Models of thermomechanical behavior of polymeric materials undergoing glass transition. *Acta Mech.*, 2012, vol. 223, pp. 1261-1284. [DOI](#)
21. Briard R., Heitz C., Barthel E. Crack bridging mechanism for glass strengthening by organosilane water-based coatings. *J. Non Cryst. Solids*, 2005, vol. 351, pp. 323-330. [DOI](#)
22. Hand R.J., Ellis B., Whittle B.R., Wang F.H. Epoxy based coatings on glass: strengthening mechanisms. *J. Non Cryst. Solids*, 2003, vol. 315, pp. 276-287. [DOI](#)
23. Priller S., Frischat G.H., Pye L.D. Strengthening of glass through surface crystallization of  $\beta$ -spodumene ss. *J. Non Cryst. Solids*, 1996, vol. 196, pp. 144-149. [DOI](#)
24. Pikul V.V., Goncharuk V.K., Maslennikova I.G. A cylindrical shell made of glass-metal composite. *Appl. Mech. Mater.*, 2015, vol. 756, pp. 230-235. [DOI](#)
25. Nemilov S.V. *Opticheskoye materialovedeniye: Fizicheskaya khimiya stekla* [Optical materials science: Physical chemistry of glass]. Saint Petersburg, SPbGU ITMO, 2009. 113 p.
26. Bartenev G.M., Sanditov D.S. *Relaksatsionnyye protsessy v stekloobraznykh sistemakh* [Relaxation processes in glassy systems]. Novosibirsk, Nauka, 1986. 240 p.
27. Lyubimov M.L. *Spai stekla s metallom* [Spray glass with metal]. Moscow, Energiya, 1968. 280 p.
28. Solonenko E.P. *Modelirovaniye napryazhennogo sostoyaniya v steklometallokompozitnykh materialakh pri temperaturnoy obrabotke* [Modeling the stress state in glass-metal composite materials during thermal processing]. PhD Dissertation, Far Eastern Federal University, Komsomolsk-on-Amur, 2017. 154 p.
29. Galanin M.P., Guzev M.A., Nizkaya T.V. *Chislennoye resheniye zadachi termoplastichnosti s dopolnitel'nymi parametrami sostoyaniya* [Numerical solution of the thermoplasticity problem with additional state parameters]. Preprint, Keldysh Institute of Applied Mathematics. Moscow, 2007. 20 p. (URL: [https://www.keldysh.ru/papers/2007/rep08/rep2007\\_08.html](https://www.keldysh.ru/papers/2007/rep08/rep2007_08.html))
30. Birger I.A. *Ostatochnyye napryazheniya* [Residual stresses]. Moscow, MASHGIZ, 1963. 232 p.
31. Mazurin O.V., Strel'tsina M.V., Shvayko-Shvaykovskaya T.P. *Svoystva stekol i stekloobrazuyushchikh rasplavov. T. 3. Ch. 1. Trekhkomponentnyye silikatnyye sistemy* (Properties of glasses and glass-forming melts. Vol. 3. Part 1. Three-component silicate systems). Lenindrad, Nauka, 1977. 586 p.

Поступила в редакцию 28.03.2019; после доработки 08.05.2019; принята к опубликованию 04.06.2019

---

Сведения об авторах

Любимова Ольга Николаевна, кфмн, доц., Дальневосточный федеральный университет (ДВФУ), 690091, Владивосток, ул. Суханово, д. 8; e-mail: [berms@mail.ru](mailto:berms@mail.ru)

Барботько Максим Андреевич, асп., ДВФУ; e-mail: [gsm\\_1234@mail.ru](mailto:gsm_1234@mail.ru)