

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.2.18](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.18)

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ АРОК

В.Н. Тарасов

Физико-математический институт ФИЦ «Колми НЦ УрО РАН», Сыктывкар, Российская Федерация

Обсуждаются решения новых задач устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения. К подобным системам относятся и подкрепленные круговые арки. Проблемы их устойчивости при действии равномерного давления являются классическими и широко отражены в литературе. В данной работе рассматривается устойчивость круговых арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Оба конца нити зафиксированы на оси арки так, что при деформировании расстояние между точками прикрепления не может увеличиваться. Желание выяснить, как ведут себя упругие системы при наличии односторонних ограничений на перемещения, приводит к необходимости анализа точек бифуркации нелинеаризуемых уравнений, описывающих состояние системы, или к отысканию параметров, при которых моделирующая вариационная задача с ограничениями на искомые функции в форме неравенств имеет неединственное решение. При численном подходе эта задача сводится к нахождению и исследованию точек бифуркации решений задачи нелинейного программирования. При этом определение точек бифуркации заключается в идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Существуют критерии условной положительной определенности квадратичных форм на конусах в важном частном случае, когда конус есть положительный ортант в евклидовом пространстве. Хотя применение критериев имеет следствием вычисление большого количества определителей, что в отношении затрат на решение крайне неэффективно, однако при небольшом числе переменных их использование практикуется, например, при решении задач устойчивости по Ляпунову. В данной работе для решения задачи невыпуклого квадратичного программирования, которая встает при исследовании устойчивости упругих систем с односторонними ограничениями на перемещения, предлагается и обосновывается метод перебора вариантов. Полученные результаты могут быть полезными для повышения несущей способности при проектировании арок и арочных систем.

Ключевые слова: устойчивость, критическая сила, арка, кольцо, вариационная задача, нелинейное программирование, односторонние ограничения, бифуркация, квадратичная форма, собственные значения, нерастяжимые нити

ON THE STABILITY OF REINFORCED ARCHES

V.N. Tarasov

Institute of Physics and Mathematics FRC «Komi Scientific Center, Ural Branch, RAS», Syktывkar, Russian Federation

This paper deals with the problems of stability of circular arches supported by inextensible threads that cannot withstand compressive forces. Both ends of the thread are attached to the axis of the arch so that the distance between the attachment points cannot increase during deformation. The problems of stability and supercritical behavior of elastic systems in the presence of unilateral restrictions on the movement lead to the need to study the bifurcation points of the equations or to find the parameters for which some variational problem with restrictions on the desired functions in the form of inequalities has a non-unique solution. In the numerical study, this problem is reduced to finding and studying the bifurcation points of solutions to a nonlinear programming problem. The problem of finding bifurcation points for solutions of nonlinear programming problems is reduced to the problem of identification of conditional positive definiteness of quadratic forms on cones. There are criteria of conditional positive definiteness of quadratic forms on cones in the important special case, when the cone is a positive orthant in Euclidean space. Their application poses the necessity to calculate a large number of determinants, which is computationally extremely inefficient, although in the case of a small number of variables, they offer promise for solving Lyapunov stability problems. The paper proposes and justifies the method of searching for options to solve the problem of nonconvex quadratic programming that arises during the study of the stability of elastic unilateral restrictions on the movement. The results can be used in the design of arches and arch systems to improve their bearing capacity.

Key words: stability, critical force, arch, ring, variational problem, nonlinear programming, one-sided constraints, bifurcation, quadratic form, eigenvalues, inextensible filaments

1. Введение

Использование новых высокопрочных материалов обуславливает появление все более сложных, экономичных тонкостенных конструкций. Расчет на прочность таких конструкций связан зачастую с решением контактных задач для образующих их гибких элементов с неизвестной областью их контакта. Решение подобных задач сводится к исследованию вариационных неравенств или к решению неклассических вариационных задач с ограничениями на искомые функции в форме неравенств. Обычно при конечномерной аппроксимации приходится рассматривать задачи выпуклого математического программирования. Теория и методы решения задач выпуклого математического программирования к настоящему времени хорошо разработаны, и созданы эффективные численные алгоритмы. Многочисленные приложения вариационных неравенств к задачам механики и физики обсуждаются в монографиях [1, 2].

Расчет конструкций на устойчивость является очень важным, поскольку их разрушение часто связано с общей потерей устойчивости всей конструкции, либо с потерей устойчивости ее отдельных элементов.

Классические задачи на устойчивость упругих систем сводятся к нахождению и исследованию точек бифуркации нелинейных уравнений равновесия. Линеаризация этих уравнений приводит к некоторой линейной краевой задаче на собственные значения. Общая концепция упругой бифуркационной устойчивости изложена в монографии Новожилова В.В. [3].

Систематическому изложению вопросов устойчивости упругих систем и методов решения различных задач устойчивости тонкостенных элементов конструкций посвящены монографии Вольмира А.С. [4], Перельмутера А.В., Сливкера В.И. [5]. Иногда упругая система в результате бифуркации решения уравнений равновесия переходит не в смежное равновесное состояние, а в состояние движения. В этом случае необходимо применять динамический подход, то есть включать в постановку задачи уравнения движения. Сопоставление статического и динамического подходов к отысканию критических нагрузок посвящена монография Циглера Г. [6]. Проблемы устойчивости и закритического поведения упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения требуют анализа точек бифуркации нелинеаризуемых уравнений или нахождения параметров, при которых вариационная задача с ограничениями на искомые функции в форме неравенств имеет неединственное решение. Интересные частные задачи устойчивости и закритического поведения при односторонних ограничениях на перемещения рассмотрены в книге Феодосьева В.И. [7]: задача устойчивости кольца, находящегося в жесткой обойме, которое может потерять устойчивость вследствие повышения температуры; задача устойчивости кольца, сжимаемого нерастяжимой нитью; задача равновесия стержня, сжимаемого продольной силой, находящегося между двумя жесткими стенками в линейной постановке (решение в нелинейной см. в [8]).

Экспериментальное и численное изучение влияния односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек, сжимаемых продольной силой, осуществлялось Алфутовым Н.А., Еремичевым А.Н. [9]. В предшествующих работах автора [10], [11] представлено аналитическое решение данной задачи при граничных условиях жесткой заделки или шарнирного опирания. Случай граничных условий свободного края рассматривала Андрюкова В.Ю. [12]. Проблемы устойчивости круговых арок, находящихся под действием равномерного давления, ранее обсуждались Николаи Е.Л. [13], Динником А.Н. [14]. Устойчивость кругового кольца, находящегося в жесткой обойме, с односторонними ограничениями на перемещения изучалась в [15], аналогичная задача решена Феодосьевым В.И. в [7].

Исследования в области устойчивости арок не прекращаются и в настоящее время ([5, 16–20]). В [16] проводится анализ устойчивости круговых арок при различных способах нагружения. Выяснено, что при нагрузке заданной сосредоточенной силой происходит прощелкивание арки (потеря устойчивости второго рода), и в этом случае критическая нагрузка сильно отличается от известных ранее из литературы. В [17] рассматривается задача устойчивости круговой арки под действием сосредоточенной нагрузки, при этом учитывается продольная деформация оси арки (обжатие). В работе [18] анализируется устойчивость пологих арок, ось которых представляется в виде тонкостенных элементов, причем при выводе уравнений равновесия этих элементов используется нелинейный тензор конечных деформаций Коши. В [20] проводится анализ устойчивости параболических арок, при этом учитывается изменение длины оси арки. В [5] рассмотрена задача устойчивости круговой арки при вертикальной нагрузке. Если нагрузка на круговую арку отличается от нормальной или центральной, или арки имеют другое очертание (параболическое, синусоидальное), то форма равновесия, при которой теряется устойчивость, заранее не известна и зависит от нагрузки. Поэтому приходится решать нелинейную краевую задачу и одновременно анализировать решение на бифуркацию. Классические подходы в этой области представлены в [21].

В предлагаемой вниманию читателя статье рассматриваются проблемы устойчивости круговых арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями, которые не выдерживают сжимающих усилий. Оба конца каждой нити зафиксированы на оси арки; в силу нерастяжимости нити расстояние между точками прикрепления не может увеличиваться в результате деформации. Задача сводится к нахождению и исследованию точек бифуркации решений некоторой задачи нелинейного программирования.

Отыскание точек бифуркации решений задач нелинейного программирования заключается в идентификации условной положительной определенности квадратичных форм на конусах. Критерии условной положительной определенности квадратичных форм на конусах и их применение в задачах устойчивости по Ляпунову обсуждаются в работах [22, 23]. Проблемы устойчивости упругих систем при наличии односторонних ограничений на перемещения при численной реализации приводят к необходимости определения глобального минимума в некоторой невыпуклой задаче сепарабельного программирования. В данной работе предлагается метод перебора вариантов, который в вычислительном отношении является более простым, чем методы глобальной оптимизации. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании арок и арочных систем для оценки их несущей способности.

2. Постановка задачи

Предположим, что криволинейный стержень, ось которого в недеформированном состоянии представляет собой дугу окружности радиуса R , находится под действием нагрузки P , равномерно

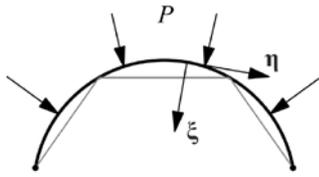


Рис. 1. Схема подкрепления арки и действующие нагрузки

распределенной вдоль оси арки. Центральный угол, соответствующий дуге арки, обозначим как $0 < \alpha \leq \pi$, а ϑ — его текущее значение. Уравнения недеформированной оси арки имеют вид:

$$\begin{cases} x = R \cos(\vartheta), \\ y = R \sin(\vartheta). \end{cases}$$

Назовем как $\xi = (-\cos(\vartheta), -\sin(\vartheta))$ нормаль к недеформированной оси арки, $\eta = (-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta))$ — единичный касательный вектор; перемещения точек арки в результате плоской деформации опишем вектором (Рис. 1):

$$\mathbf{W} = u(\vartheta)\xi + w(\vartheta)\eta.$$

Тогда декартовы координаты деформированной арки будут представляться уравнениями:

$$\begin{cases} x = (R-u)\cos(\vartheta) - w\sin(\vartheta), \\ y = (R-u)\sin(\vartheta) + w\cos(\vartheta). \end{cases}$$

Обозначим через ξ_*, η_* нормальный и касательный векторы к упругой линии арки после деформирования. Векторы ξ, η могут быть переведены в векторы ξ_*, η_* путем поворота на угол β . Предполагая, что перемещения являются малыми, запишем:

$$\beta = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\vartheta} + w \right),$$

а изменение кривизны дуги арки определим по формуле:

$$\delta q = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + \frac{dw}{d\vartheta} \right),$$

кроме того, выполняется условие несжимаемости:

$$u = w', \quad (1)$$

где штрих означает дифференцирование по параметру (в данном случае — по ϑ).

Энергию упругой деформации арки в квадратичном приближении и работу внешних сил представим, соответственно, соотношениями:

$$\begin{aligned} U &= \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \delta q^2 d\vartheta = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta, \\ V &= \frac{P}{2} \int_0^\alpha \left((u')^2 - bu^2 \right) d\vartheta, \end{aligned}$$

где B — жесткость стержня при изгибе, $b=1$ в случае сил нормального давления (нагрузка все время направлена по нормали к деформированной оси стержня) и $b=2$, если давление P направлено к центру его кривизны (центральные силы).

Пусть число абсолютно жестких растяжек (нитей) равно M . Концы каждой растяжки прикреплены к арке в точках, соответствующих углам $\vartheta = \varepsilon_{1j}$ и $\vartheta = \varepsilon_{2j}$, где $j \in 1:M$. Перемещения точек арки в точках фиксации нитей обозначим как

$$u_{ij} = u(\varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = w(\varepsilon_{ij}), \quad (i=1,2, \quad j \in 1:M).$$

Предположим, что нити не выдерживают сжимающих усилий и расстояние между точками прикрепления j -й нити не может увеличиваться и определяется формулой

$$\rho(u_{1j}, u_{2j}, w_{1j}, w_{2j}) = \sqrt{(x_{1j} - x_{2j})^2 + (y_{1j} - y_{2j})^2},$$

$$\text{где } \begin{cases} x_{ij} = (R - u_{ij}) \cos(\varepsilon_{ij}) - w_{ij} \sin(\varepsilon_{ij}), \\ y_{ij} = (R - u_{ij}) \sin(\varepsilon_{ij}) + w_{ij} \cos(\varepsilon_{ij}). \end{cases}$$

Вычислим изменение расстояния между точками прикрепления нити:

$$\rho_j^* = \rho(u_{1j}, u_{2j}, w_{1j}, w_{2j}) - \rho_0.$$

Используя разложение в ряд Тейлора с точностью до членов второго порядка малости, получим:

$$\delta\rho = \frac{1}{\rho_0} (u_{1j} (\cos \gamma_j - 1) + u_{2j} (\cos \gamma_j - 1) - w_{1j} \sin \gamma_j + w_{2j} \sin \gamma_j),$$

где $\gamma_j = \varepsilon_{2j} - \varepsilon_{1j}$, $\rho_0 = \rho(0, 0, 0, 0) = 2R \sin(\gamma_j/2)$.

Задача устойчивости арки при условии подкрепления нерастяжимыми нитями формулируется следующим образом: требуется найти минимальную нагрузку P , при которой вариационная задача

$$J = U - V = \frac{B}{2R^3} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta - \frac{P}{2} \int_0^\alpha \left((u')^2 - bu^2 \right) d\vartheta \rightarrow \min_{u, w}$$

при ограничениях

$$u_{1j} (\cos \gamma_j - 1) + u_{2j} (\cos \gamma_j - 1) - w_{1j} \sin \gamma_j + w_{2j} \sin \gamma_j \leq 0 \quad (j \in 1: M) \quad (2)$$

имеет нетривиальное решение, то есть к нахождению минимального параметра силы P , при котором появляется новое, более энергетически выгодное, положение равновесия.

Рассмотрим задачу

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left(\frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + u \right)^2 d\vartheta \rightarrow \min_{u, w} \quad (3)$$

при ограничениях (2) и при ограничении изопериметрического типа:

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left((u')^2 - bu^2 \right) d\vartheta = 1. \quad (4)$$

Для определенности предположим, что выполняются граничные условия жесткой заделки, то есть

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \beta = 0 \quad (\vartheta = 0, \alpha; \quad 0 < \alpha \leq \pi). \quad (5)$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ выпуклый конус, определяемый неравенствами (2) и условиями (5). Решение задачи (2)–(5) существует в $W_2^2[0, \alpha]$ — пространстве функций $u(\vartheta)$, имеющих обобщенную, суммируемую

с квадратом вторую производную $\int_0^\alpha (u'')^2 d\vartheta < \infty$ (первая производная абсолютно непрерывна) и

удовлетворяющих граничным условиям (5). Пусть u_*, w_* — решение задачи (2)–(5) и $\lambda_* = \tilde{U}(u_*, w_*)$. Тогда для любого $\lambda < \lambda_*$ и всех $u, w \in \tilde{\Gamma}$, удовлетворяющих условиям (4), (5), можно записать:

$$\tilde{U}(u, w) - \lambda \tilde{V}(u, w) > \tilde{U}(u, w) - \lambda_* > 0.$$

Таким образом, при условии $\lambda < \lambda_*$ задача минимизации

$$J(u, w; \lambda) = \tilde{U}(u, w) - \lambda \tilde{V}(u, w) \rightarrow \min_{\{u, w\} \in \tilde{\Gamma}}$$

имеет только тривиальное решение. Если же $\lambda > \lambda_*$, то существуют функции $\{u, w\} \in \tilde{\Gamma}$ такие, что $J(u, w; \lambda) < 0$ и, наконец, $J(u_*, w_*; \lambda_*) = 0$. Исходя из этого, получается формула для определения значения критической нагрузки:

$$P_* = (B/R^3)\lambda_*.$$

3. Численные методы

По-видимому, решать задачу (2)–(5) можно только численными методами. Для этого функцию $w(\vartheta)$ будем искать в виде отрезка ряда Фурье:

$$w(\vartheta) = \sum_{k=1}^n z_k \sin\left(\frac{k\pi\vartheta}{\alpha}\right),$$

тогда с учетом (1)

$$u(\vartheta) = \sum_{k=1}^n z_k \frac{k\pi}{\alpha} \cos\left(\frac{k\pi\vartheta}{\alpha}\right). \quad (6)$$

Граничные условия (5) будут выполнены, если потребовать выполнения равенств:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{\alpha} = 0, \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k\pi}{\alpha} z_k = 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (3)–(5), с учетом (7) приходим к конечномерной задаче оптимизации:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}\mathbf{z}, \mathbf{z}) \rightarrow \min_{\mathbf{z}} \quad (8)$$

$$g(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Q}\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 1, \quad (9)$$

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{z}) \leq 0 \quad (j \in 1:M), \quad (10)$$

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{z}) = 0, \quad (j \in M+1:M+2). \quad (11)$$

Квадратичные формы $f(\mathbf{z})$ и $g(\mathbf{z})$ положительно определенные, если $\alpha < \pi$. Обозначим через Γ конус, описываемый неравенствами (10) и уравнениями (11). Пусть \mathbf{z}_* — решение задачи (8)–(11). Тогда по теореме Куна–Таккера найдутся множители Лагранжа λ_* и τ_j (при этом $\tau_j \geq 0$ и $j \in 1:M$) такие, что

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{z}_* - \lambda_*\mathbf{Q}\mathbf{z}_* + \sum_{j=1}^{M+2} \tau_j \mathbf{a}_j = 0, \\ \tau_j (\mathbf{a}_j, \mathbf{z}_*) = 0 \quad (j \in 1:M+2). \end{cases} \quad (12)$$

Введем обозначения: $R(\mathbf{z}) = \{j \in 1:M \text{ таких, что } (\mathbf{a}_j, \mathbf{z}) = 0\}$, $R = R(\mathbf{z}_*)$. Тогда условия (12) можно переписать в виде:

$$\mathbf{G}\mathbf{z}_* - \lambda_*\mathbf{Q}\mathbf{z}_* + \sum_{j \in R} \tau_j \mathbf{a}_j + \tau_{M+1} \mathbf{a}_{M+1} + \tau_{M+2} \mathbf{a}_{M+2} = 0.$$

По своей сути система уравнений (12) есть необходимые условия экстремума, но так как задача (8)–(11) невыпуклая, то эти условия не являются достаточными. Точки \mathbf{z}_* , удовлетворяющие (12), будем называть стационарными.

Для решения задачи (8)–(11) необходимо применять методы глобальной оптимизации, например метод ветвей и границ [5]. При этом число переменных может быть велико, а в данном случае трудоемкость метода определяется размерностью задачи.

Сформулируем метод последовательных приближений для поиска стационарных точек. Пусть $\mathbf{z}_0 \in \Gamma$, $g(\mathbf{z}_0) = 1$ — начальное приближение. Будем считать, что уже получена точка $\mathbf{z}_k \in \Gamma$, для которой $g(\mathbf{z}_k) = 1$, а также число λ_k . Введем в рассмотрение множество:

$$\Omega_k = \left\{ \mathbf{z} \in \Gamma : \left(\frac{\partial g(\mathbf{z}_k)}{\partial \mathbf{z}}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_k \right) = 0 \right\}.$$

Положим, что \mathbf{y}_{k+1} — это решение задачи минимизации вида:

$$f(\mathbf{y}_{k+1}) = \min_{\mathbf{z} \in \Omega_k} f(\mathbf{z}). \quad (13)$$

Тогда $\mathbf{z}_{k+1} = \frac{1}{s_{k+1}} \mathbf{y}_{k+1}$, где $s_{k+1} = \sqrt{g(\mathbf{y}_{k+1})}$. В точке \mathbf{y}_{k+1} выполнены условия теоремы Куна–Таккера:

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{y}_{k+1} - \lambda_{k+1}\mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \sum_{j=1}^M \tilde{\tau}_j \mathbf{a}_j = 0, \\ \tilde{\tau}_j(\mathbf{a}_j, \mathbf{y}_{k+1}) = 0 \quad (j \in 1 : M + 2). \end{cases}$$

Задача (13), будучи задачей выпуклого квадратичного программирования, может быть решена за конечное число шагов (подобно задачам линейного программирования). Можно показать, что последовательность λ_k монотонно убывает, ограничена снизу (следовательно, сходится), и любая предельная точка последовательности \mathbf{z}_k стационарна [4], то есть если последовательность $\{\mathbf{z}_{k_i}\} \subset \{\mathbf{z}_k\}$, $\mathbf{z}_{k_i} \rightarrow \mathbf{z}_*$, то и $\lambda_{k_i} \rightarrow \lambda_*$, тогда \mathbf{z}_* удовлетворяет условиям теоремы Куна–Таккера (12).

Введем в рассмотрение функцию

$$h(\mathbf{z}) = f(\mathbf{z}) - \lambda_* g(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{z}, \mathbf{z}),$$

где $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} - \lambda_* \mathbf{G}$. Если матрица $\tilde{\mathbf{Q}}$ окажется условно положительно определенной на конусе Γ , то \mathbf{z}_* есть решение задачи (8)–(12). Сформулированный алгоритм является локальным, то есть он может сходиться к локальному минимуму в задаче (8)–(12). Найти глобальный минимум можно лишь при выборе удачного начального приближения, и полученное при его помощи решение нуждается в проверке.

Использование в данном случае метода ветвей и границ довольно трудоемко (как и любого метода глобальной оптимизации). Поэтому можно предложить метод перебора вариантов, который в сочетании с локальным алгоритмом, описанным выше, может оказаться более предпочтительным.

Рассмотрим подмножество $R_p \subset 1 : M$, где p — число элементов множества R_p , и положим $d = p + 2$. Введем подпространство

$$H_p = \left\{ \mathbf{z} \in R^n : (\mathbf{a}_j, \mathbf{z}) = 0, j \in R_p \cup \{M+1, M+2\} \right\}.$$

Пусть $\mathbf{z}_0 \in H_p$, $g(\mathbf{z}_0) = 1$ — начальное приближение, и уже получена точка $\mathbf{z}_k \in H_p$, для которой $g(\mathbf{z}_k) = 1$. Введем множество

$$\tilde{\Omega}_k = \left\{ \mathbf{z} \in H_p : (\mathbf{Q}\mathbf{z}_k, \mathbf{z}) = 2 \right\}$$

и назовем \mathbf{y}_k решением задачи минимизации функции $f(\mathbf{z})$ на множестве $\tilde{\Omega}_k$:

$$f(\mathbf{y}_k) = \min_{\mathbf{z} \in \tilde{\Omega}_k} f(\mathbf{z}). \quad (14)$$

Пусть \mathbf{A} — матрица, строками которой являются векторы \mathbf{a}_j ($j \in R_p \cup \{M+1, M+2\}$), и $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_d)^T$ (символ T означает операцию транспонирования). Тогда \mathbf{y}_{k+1} можно найти из решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{y}_{k+1} - \beta_k \mathbf{Q}\mathbf{z}_k + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau} = 0, \\ \mathbf{A}\mathbf{y}_{k+1} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Неизвестные величины в системе (15) — это вектор \mathbf{y}_{k+1} и множители Лагранжа β_k и $\boldsymbol{\tau}$.

Далее положим:

$$s_k = \sqrt{g(\mathbf{y}_{k+1})}, \quad \mathbf{z}_{k+1} = s_k^{-1} \mathbf{y}_{k+1}. \quad (16)$$

Так как $g(\mathbf{y})$ — строго выпуклая функция (матрица \mathbf{Q} строго положительно определена), то $s_k \geq 1$, и $s_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, ибо в противном случае \mathbf{z}_k будет стремиться к нулю, что невозможно, поскольку $g(\mathbf{z}_k) = 1$. Можно показать, что любая предельная точка последовательности \mathbf{z}_k — это стационарная точка, и β_k есть монотонно убывающая последовательность: если $\mathbf{z}_{k_i} \rightarrow \mathbf{h}$, то $\beta_k \rightarrow \lambda$, и при некотором векторе $\boldsymbol{\tau} \in R^{n-d}$ они удовлетворяют необходимым условиям экстремума:

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{h} - \lambda \mathbf{Q}\mathbf{h} + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau} = 0, \\ \mathbf{A}\mathbf{h} = 0. \end{cases}$$

Теорема. Почти для всех начальных приближений \mathbf{z}_0 последовательность \mathbf{z}_k является минимизирующей для задачи:

$$\begin{cases} f(\mathbf{z}) \rightarrow \min, \\ g(\mathbf{z}) = 1, \quad \mathbf{z} \in H_p. \end{cases} \quad (17)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}, \quad \text{и} \quad \mathbf{E} - \mathbf{P},$$

где \mathbf{E} — единичная матрица. Непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{P}^T = \mathbf{P}, \quad (\mathbf{E} - \mathbf{P})^T = \mathbf{E} - \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}(\mathbf{E} - \mathbf{P}) = 0.$$

Отсюда следует, что для любого вектора $\mathbf{z} \in R^n$ векторы $\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{z}$, $\mathbf{v} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{z}$ представляют собой компоненты ортогонального разложения вектора \mathbf{z} : $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$, $(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = 0$, $\mathbf{A}\mathbf{v} = 0$.

Введем в рассмотрение матрицы:

$$\tilde{\mathbf{G}} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{G}(\mathbf{E} - \mathbf{P}), \quad \tilde{\mathbf{Q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{P})\mathbf{Q}(\mathbf{E} - \mathbf{P}).$$

Таким образом, поиск решения задачи (17) эквивалентен решению экстремальной проблемы:

$$\begin{cases} \tilde{f}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{z}, \mathbf{z}) \rightarrow \min, \\ \tilde{g}(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 1. \end{cases} \quad (18)$$

Необходимые условия экстремума для (18) приводят к отысканию решения обобщенной задачи на собственные значения: требуется найти все положительные параметры λ , при которых система линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{\mathbf{G}}\mathbf{z} = \lambda\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{z} \quad (19)$$

имеет нетривиальное решение. Векторы \mathbf{z} , удовлетворяющие (19), будем называть обобщенными собственными векторами, а соответствующие им λ — обобщенными собственными числами.

Нетрудно убедиться, что если обобщенные собственные векторы соответствуют разным обобщенным собственным числам, то для них выполнено свойство обобщенной ортогональности, то есть если \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 удовлетворяют (19) при $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$, где $\lambda_1 < \lambda_2$, тогда

$$(\mathbf{G}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = 0, \quad (\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = 0.$$

В самом деле, имеем равенства:

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{h}_i - \lambda_i\mathbf{Q}\mathbf{h}_i + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\tau}_i = 0, \\ \mathbf{A}\mathbf{h}_i = 0 \quad (i = 1, 2). \end{cases}$$

Умножая скалярно первое равенство на \mathbf{h}_2 , а второе на \mathbf{h}_1 , получаем:

$$\begin{aligned} (\mathbf{G}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) - \lambda_1(\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) + (\mathbf{A}^T\boldsymbol{\tau}_1, \mathbf{h}_2) &= (\mathbf{G}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) - \lambda_1(\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = 0, \\ (\mathbf{G}\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) - \lambda_2(\mathbf{Q}\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) + (\mathbf{A}^T\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{h}_1) &= (\mathbf{G}\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) - \lambda_2(\mathbf{Q}\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0. \end{aligned}$$

Вычитая из первого равенства второе и учитывая симметрию матриц \mathbf{G} и \mathbf{Q} , имеем $(\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{Q}\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) = 0$, откуда и следует обобщенная ортогональность векторов \mathbf{h}_1 и \mathbf{h}_2 .

Без ограничения общности можно считать, что векторы \mathbf{a}_j , $j \in R_p \cup \{M+1, M+2\}$, линейно независимы и размерность пространства H_p равна $r = n - d$, где $d = p + 2$, а n — число членов ряда Фурье. Пусть \mathbf{h}_1 — решение задачи (17), а λ_1 — соответствующее ему обобщенное собственное число. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} f(\mathbf{z}) \rightarrow \min, \\ g(\mathbf{z}) = 1 \quad (\mathbf{z} \in H_p), \\ (\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{z}) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Обозначим через \mathbf{h}_2 решение задачи (20). Применяя правило множителей Лагранжа, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{G}\mathbf{h}_2 - \lambda_2\mathbf{Q}\mathbf{h}_2 + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\tau}_2 + \mu\mathbf{Q}\mathbf{h}_1 = 0, \\ \mathbf{A}\mathbf{h}_2 = 0, \\ (\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Умножая скалярно первое уравнение в (21) на \mathbf{h}_1 , учитывая последнее уравнение и симметрию матриц \mathbf{G} и \mathbf{Q} , имеем: $\mu(\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_1) = 0$. Следовательно, $\mu = 0$, а это означает, что \mathbf{h}_2 является обобщенным собственным вектором, а λ_2 соответствующим ему обобщенным собственным числом.

Для того чтобы найти \mathbf{h}_3 , решим задачу:

$$\begin{cases} f(\mathbf{z}) \rightarrow \min, \\ g(\mathbf{z}) = 1, \quad \mathbf{z} \in H_1, \\ (\mathbf{Q}\mathbf{h}_1, \mathbf{z}) = 0, \\ (\mathbf{Q}\mathbf{h}_2, \mathbf{z}) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Пусть \mathbf{h}_3 — решение (22). Как и выше, можно показать, что \mathbf{h}_3 есть обобщенный собственный вектор, а λ_3 — соответствующее ему обобщенное собственное число, и найти обобщенные собственные числа

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r$$

и соответствующие им обобщенные собственные векторы

$$\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_r, \quad \mathbf{A}\mathbf{h}_i = 0, \quad (\mathbf{Q}\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = 0, \quad (\mathbf{G}\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_j) = 0 \quad (i \neq j). \quad (23)$$

Докажем, что последовательность \mathbf{z}_k , определяемая формулами (15), (16), является минимизирующей. Векторы $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_r$ образуют базис в пространстве H_p , и можно считать, что $(\mathbf{Q}\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i) = 1$. Тогда запишем:

$$\mathbf{z}_k = \sum_{i=1}^p \xi_{i,k} \mathbf{h}_i, \quad \mathbf{y}_{k+1} = \sum_{i=1}^p \eta_{i,k+1} \mathbf{h}_i.$$

Из (15) следует, что

$$\sum_{i=1}^p \eta_{i,k+1} \mathbf{G}\mathbf{h}_i - \beta_k \sum_{i=1}^p \mathbf{Q}\xi_{i,k} \mathbf{h}_i + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (24)$$

Так как $(\mathbf{G}\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i) = \lambda_i (\mathbf{Q}\mathbf{h}_i, \mathbf{h}_i) = \lambda_i$, то после умножения скалярно равенства (24) на \mathbf{h}_i и с учетом (23) получаем:

$$\lambda_i \eta_{i,k+1} = \beta_k \xi_{i,k},$$

откуда следуют равенства:

$$s_k = \beta_k \sqrt{\sum_{i=1}^r \lambda_i^{-2} \xi_{i,k}^2}, \quad \mathbf{z}_{k+1} = s_k^{-1} \mathbf{y}_{k+1} = s_k^{-1} \beta_k \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-1} \xi_{i,k} \mathbf{h}_i.$$

Предположим для упрощения, что $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда при $k \rightarrow \infty$

$$s_k = \beta \lambda_1 \sqrt{\sum_{i=1}^r \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^{-2} \xi_{i,k}^2},$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = s_k^{-1} \beta_k \lambda_1 \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \xi_{i,k} \mathbf{h}_i = s_k^{-1} \beta_k \lambda_1 \sum_{i=1}^r \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \right)^k \xi_{i,k} \mathbf{h}_i \rightarrow s^{-1} \frac{\beta_k}{\lambda_1} \xi_{1,1} \mathbf{h}_1,$$

ибо $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, $i > 1$ и $\xi_{1,1} \neq 0$, то есть начальное приближение не удовлетворяет условию $(\mathbf{Q}\mathbf{z}_0, \mathbf{h}_1) = 0$.

При некотором p множество R_p будет совпадать с множеством $R(\mathbf{z}_*)$. Сначала при вычислениях применим локальный метод последовательных приближений (см. решение задачи (13)). Пусть в результате определили стационарную точку \mathbf{z}_* и множество $R(\mathbf{z}_*)$. Далее возьмем множество R_p и воспользуемся алгоритмом (14)–(16). Пусть в результате его реализации нашли точку \mathbf{z}_p . Если \mathbf{z}_p удовлетворяет всем ограничениям задачи (10), (11), то запоминаем ее. Из всех полученных точек выбираем ту, которая дает наименьшее значение целевой функции. Заметим, что при этом множества $R_p \subset R(\mathbf{z}_*)$ или $R_p \supset R(\mathbf{z}_*)$ рассматривать не нужно. Локальный алгоритм (13) при малом числе подкрепляющих нитей дает, как правило, решение задачи. Таким образом, число различных вариантов расчета арок с учетом симметрии расположения подкрепляющих нитей будет разумным.

Метод (14) при отсутствии линейных ограничений равенств $H_p = R^n$ и при условии, что $\mathbf{Q} = \mathbf{E}$, превращается в известный метод Келлога для поиска минимального собственного числа.

Решение полной проблемы нахождения обобщенных собственных значений матриц $\tilde{\mathbf{G}}, \tilde{\mathbf{Q}}$ не всегда является целесообразным, ибо при конечномерной аппроксимации задачи (8)–(11) порядок матриц может оказаться большим.

4. Результаты расчетов

При численных экспериментах предполагалось, что нити расположены равномерно вдоль оси стержня, образующего арку, то есть $\gamma_j = \varepsilon_{2j} - \varepsilon_{1j} = \gamma_0 = \frac{\alpha}{M}$. В таблице 1 приведены критические значения безразмерного коэффициента PR^3/B при условиях жесткой заделки. Число членов ряда Фурье n варьировалось от 20 до 40. Результаты расчетов при этом практически совпадают.

Предположим, что выполнены граничные условия шарнирного опирания:

$$u = 0, \quad w = 0, \quad \frac{d\beta}{d\vartheta} = 0 \quad (\vartheta = 0, \alpha).$$

При этих условиях для конечномерной аппроксимации применялись интерполяционные сплайны [24]. Таблица 2 содержит критические значения безразмерного коэффициента PR^3/B , отвечающие условиям шарнирного опирания.

Таблица 1. Значения безразмерного критического давления PR^3/B в зависимости от числа подкрепляющих нитей при граничных условиях жесткой заделки и нормальной и центральной нагрузках

Число нитей М α	0	4	5	6	7	8	9
$b = 1$ – сила направлена по нормали к деформированной оси арки							
π	8,0	12,8	15,6	18,9	18,95	19,9	21,0
$2\pi/3$	18,1	27,9	34,5	41,1	43,2	45,6	47,3
$\pi/2$	32,4	49,5	61,3	72,6	78,0	89,0	84,5
$b = 2$ – сила направлена к центру кривизны арки до деформации							
π	10,6	5,5	20,1	23,2	24,1	25,7	28,8
$2\pi/3$	20,1	30,9	38,9	45,1	47,4	49,4	52,3
$\pi/2$	34,3	52,3	64,8	76,7	81,3	84,3	89,0

Таблица 2. Значения критического безразмерного давления PR^3/B в зависимости от числа подкрепляющих нитей при граничных условиях шарнирного опирания и нормальной и центральной нагрузках

Число нитей М α	0	3	4	5	6	7	8
$b = 1$ – сила направлена по нормали к деформированной оси стержня							
π	3,0	5,5	6,7	6,6	9,8	10,5	12,4
$2\pi/3$	8,0	14,4	17,9	17,7	24,2	25,4	26,9
$\pi/2$	15,0	26,9	33,6	33,5	43,9	46,4	51,7
$b = 2$ – сила направлена к центру кривизны арки							
π	4,5	7,8	9,6	9,8	10,3	15,3	16,6
$2\pi/3$	9,2	16,1	19,9	19,9	27,4	28,8	30,5
$\pi/2$	16,2	28,5	35,7	35,3	47,5	49,6	55,2

Для сплошного кольца ($\alpha = 2\pi$) выполняются условия периодичности. Нити расположены по сторонам правильного М-угольника. В условиях периодичности касательная компонента перемещения $w(\vartheta)$ представима в виде

$$w(\vartheta) = \sum_{k=2}^n z_k \sin k\vartheta + z_{k+n} \cos k\vartheta,$$

тогда с учетом (1)

$$u(\vartheta) = \sum_{k=2}^n z_k k \cos k\vartheta - z_{k+n} k \sin k\vartheta.$$

В таблице 3 приведены критические значения безразмерного коэффициента PR^3/B для кругового кольца.

Таблица 3. Значения безразмерного критического давления PR^3/B в зависимости от числа подкрепляющих нитей

Вид нагрузки \ Число нитей M	0	3	4	5	6	7	8
$b = 1$	3,0	4,3	3,0	4,6	5,3	6,3	7,3
$b = 2$	4,5	5,3	4,5	6,3	7,5	8,9	9,3

Первые столбцы таблиц 1–3 содержат критические коэффициенты для неподкрепленной арки и кольца. Все значения в этом случае совпадают с данными из работ [13, 14], полученными аналитическим методом. При $M = 4$ кольцо в результате деформирования может превратиться в эллипс без увеличения расстояния между вершинами исходного квадрата, в которых находятся точки фиксации концов нитей, поэтому такое подкрепление не увеличивает критическую силу. Аналогично для арок при граничных условиях жесткой заделки подкрепление тремя нитями не вызывает рост критической нагрузки.

На рисунке 2 представлены формы равновесия арки после потери устойчивости в результате нагружения нормальным давлением ($b = 1$), соответствующие минимальному значению критической силы. Рассмотрена неподкрепленная (Рис. 2б, в) и подкрепленная четырьмя нитями (Рис. 2а, з) арка при двух видах граничных условий: жесткой заделки при $\alpha = \pi$ и шарнирного опирания при $\alpha = \pi/2$.

На рисунке 2б, в кривые приведены в параметрическом виде: $x = x(\vartheta)$, $y = y(\vartheta)$. Они представляют собой собственную (обобщенную) функцию, которая определена с точностью до некоторого положительного множителя.

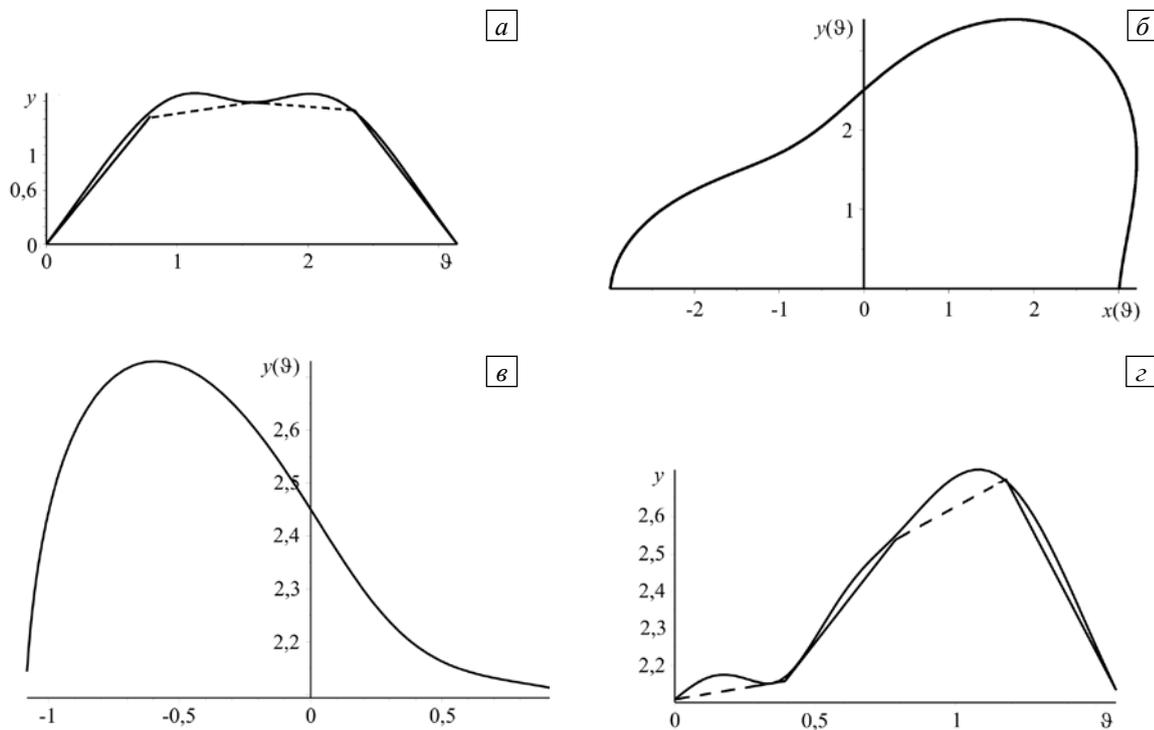


Рис. 2. Форма равновесия подкрепленной (а, з) и неподкрепленной (б, в) арки после потери устойчивости в результате действия нормальной нагрузки при различных граничных условиях: жесткая заделка при $\alpha = \pi$ (а, б), шарнирное опирание при $\alpha = \pi/2$ (в, з); сплошными линиями показаны натянутые нити, штриховыми – ненатянутые

5. Заключение

Численно решены новые задачи устойчивости круговых арок, подкрепленных нерастяжимыми нитями, не выдерживающими сжимающих усилий. Рассматриваются два вида граничных условий на концах арки: жесткая заделка и шарнирное опирание. Предложен и обоснован метод перебора вариантов для решения задачи невыпуклого квадратичного программирования.

Результаты работы могут оказаться полезными при проектировании арок и арочных систем в части повышения их устойчивости под действием нормальной и центральной нагрузок. Подкрепление даже небольшим числом нитей в несколько раз увеличивает критическую силу.

Литература

1. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
2. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М. Наука, 1980. 382 с.
3. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: СКАД СОФТ, 2007. Т. 1. 653 с.
6. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
7. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1967. 376 с.
8. Михайловский Е.И., Тарасов В.Н., Холмогоров Д.В. За критическое поведение продольно сжатого стержня с жесткими ограничениями на прогиб // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 156-160. (English version [DOI](#))
9. Алфутов Н.А., Еремичев А.Н. Влияние односторонних связей на устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии // Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1989. С. 179-180.
10. Тарасов В.Н. Об устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // Тр. ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 177-188.
11. Тарасов В.Н. Методы оптимизации в исследовании конструктивно-нелинейных задач механики упругих систем. Сыктывкар: Коми НЦ УрО РАН, 2013. 238 с.
12. Андрюкова В.Ю. Некоторые конструктивно-нелинейные задачи устойчивости упругих систем при односторонних ограничениях на перемещения // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 412-422. [DOI](#)
13. Николаи Е.Л. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 584 с.
14. Динник А.Н. Устойчивость арок. М.: Гостехиздат, 1946. 128 с.
15. Li Z., Zheng J., Chen Y. Nonlinear buckling of thin-walled FGM arch encased in rigid confinement subjected to external pressure // Eng. Struct. 2019. Vol. 186. P. 86-95. [DOI](#)
16. Дмитриев А.Н., Семенов А.А., Латын В.В. Устойчивость равновесия упругих арок с учетом искривления оси // СУЗИС. 2018. № 4(67). С. 19-31. URL: http://unistroy.spbstu.ru/index_2018_67/2_67.pdf
17. Xu Y., Gui X., Zhao B., Zhou R. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load // Engineering. 2014. Vol. 6. P. 572-583. [DOI](#)
18. Han Q., Cheng Y., Lu Y., Li T., Lu P. Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 109. P. 88-102. [DOI](#)
19. Silveria R.A.M., Nogueira C.L., Goncalves P.B. A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints // Int. J. Solid Struct. 2013. Vol. 50. P. 147-159. [DOI](#)
20. Hu C.-F., Pi Y.-L., Gao W., Li L. In-plane non-linear elastic stability of parabolic arches with different rise-to-span ratios // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 129. P. 74-84. [DOI](#)
21. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // УМН. 1996. Т. 51. Вып. 1(307). С. 101-132. [DOI](#)
22. Крепс В.Л. О квадратичных формах, неотрицательных на ортанте // ЖВММФ. 1984. Т. 24, № 4. С. 497-503. (English version [DOI](#))
23. Рапопорт Л.Б. Устойчивость по Ляпунову и знакоопределенность квадратичной формы на конусе // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 674-679. (English version [DOI](#))
24. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.

References

1. Panagiotopoulos P. *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevyuklyye funktsii energii* [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy function]. Moscow, Mir, 1989. 494 p.
2. Dyuvo G., Lions Zh.-L. *Neravenstva v mekhanike i fizike* [Inequalities in mechanics and physics]. Moscow, Nauka, 1980. 382 p.
3. Novozhilov V.V. *Osnovy nelineynoy teorii uprugosti* [Fundamentals of the nonlinear theory of elasticity]. Moscow, Gostekhizdat, 1948. 211 p.
4. Vol'mir A.S. *Ustoychivost' deformiruyemykh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka, 1967. 984 p.
5. Perel'muter A.V., Slivker V.I. *Ustoychivost' ravnesiya konstruktivnykh i rodstvennyye problemy* [Stability of the structures equilibrium and related problems]. Moscow, SKAD SOFT, 2007. Vol. 1. 653 p.
6. Ziegler H. *Principles of structural stability*. Blaisdell Publishing Company, 1968. 150 p.

7. Feodos'yev V.I. *Izbrannyye zadachi i voprosy po soprotivleniyu materialov* [Selected problems of and questions in strength of materials]. Moscow, Nauka, 1967. 376 p.
8. Mikhailovskii E.I., Tarasov V.N., Kholmogorov D.V. Post-critical behaviour of a longitudinally compressed rod for rigid limitations on the deflection. *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, pp. 120-122. [DOI](#)
9. Alfutov N.A., Eremichev A.N. Vliyaniye odnostoronnikh svyazey na ustoychivost' tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii [*Influence of one-sided bonds on the stability of cylindrical shells under axial compression*]. Raschety na prochnost' [Strength calculations]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1989. Pp. 179-180.
10. Tarasov V.N. Ob ustoychivosti uprugikh sistem pri odnostoronnikh ogranicheniyakh na peremeshcheniya [Stability of elastic systems under one-sided constraints on displacements]. *Tr. IMM UrO RAN – Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 177-188.
11. Tarasov V.N. *Metody optimizatsii v issledovanii konstruktivno-nelineynykh zadach mekhaniki uprugikh sistem* [Optimization methods in the study of constructive nonlinear problems of mechanics of elastic systems]. Syktyvkar, Komi NTs UrO RAN, 2013. 238 p.
12. Andryukova V.Yu. Some structurally nonlinear problems of stability of elastic systems under one-side-displacement constraints. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 412-422. [DOI](#)
13. Nikolai E.L. *Trudy po mekhanike* [Work on mechanics]. Moscow, Gostekhizdat, 1955. 584 p.
14. Dinnik A.N. *Ustoychivost' arok* [Stability of arches]. Moscow: Gostekhizdat, 1946. 128 p.
15. Li Z., Zheng J., Chen Y. Nonlinear buckling of thin-walled FGM arch encased in rigid confinement subjected to external pressure. *Eng. Struct.*, 2019, vol. 186, pp. 86-95. [DOI](#)
16. Dmitriev A.N., Semenov A.A., Lalin V.V. Stability of the equilibrium of elastic arches with a deformed axis. *SUZIS – Construction of unique buildings and structures*, 2018, no. 4(67), pp. 19-31. URL: http://unistroy.spbstu.ru/index_2018_67/2_67.pdf
17. Xu Y., Gui X., Zhao B., Zhou R. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load. *Engineering*, 2014, vol. 6, pp. 572-583. [DOI](#)
18. Han Q., Cheng Y., Lu Y., Li T., Lu P. Nonlinear buckling analysis of shallow arches with elastic horizontal supports. *Thin-Walled Structures*, 2016, vol. 109, pp. 88-102. [DOI](#)
19. Silveria R.A.M., Nogueira C.L., Goncalves P.B. A numerical approach for equilibrium and stability analysis of slender arches and rings under contact constraints. *Int. J. Solid Struct.*, 2013, vol. 50, pp. 147-159. [DOI](#)
20. Hu C.-F., Pi Y.-L., Gao W., Li L. In-plane non-linear elastic stability of parabolic arches with different rise-to-span ratios. *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 129, pp. 74-84. [DOI](#)
21. Sapronov Yu.I. Finite-dimensional reductions of smooth extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996. vol. 51, no. 1, pp. 97-127. [DOI](#)
22. Kreps V.L. On quadratic forms non-negative over an octant. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1984, vol. 24, pp. 105-109. [DOI](#)
23. Rapoport L.B. Lyapunov stability and sign definiteness of a quadratic form in a cone. *J. Appl. Math. Mech.*, 1986, vol. 50, pp. 515-520. [DOI](#)
24. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splayn-funktsiy* [Methods of spline-functions]. Moscow, Nauka, 1980. 352 p.

Поступила в редакцию 02.04.2019; после доработки 08.05.2019; принята к опубликованию 04.06.2019