

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.2.17](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.17)

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧАСТОТНЫЙ АНАЛИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ

Р.Д. Недин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Новые материалы со сложной неоднородной структурой, в том числе функционально-градиентные композиты, широко используются в военном и гражданском машиностроении, в современном строительстве. Ввиду особенностей технологического процесса изготовления во многих из таких материалов возникает неоднородное предварительно напряженно-деформированное состояние. Вместе с тем в производстве предварительно напряженные пластины часто специально создаются в конструкциях для улучшения их прочностных характеристик. В настоящей работе описана общая линейризованная постановка задачи о колебаниях предварительно напряженного упругого тела. Из нее в рамках гипотез деформирования пластин типа Тимошенко получена постановка задачи об установившихся планарно-изгибных колебаниях функционально-градиентной перфорированной пластины в условиях начального напряженного состояния. Построен алгоритм численного решения прямой задачи с помощью метода конечных элементов и исследовано влияние неоднородного предварительно напряженного состояния пластины на ее амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты. Приведены результаты вычислительных экспериментов при функционально-градиентных законах изменения материальных модулей, моделирующих сплав W-Cu. Для увеличения точности расчетов в зонах круговых отверстий осуществлялось локальное сгущение конечно-элементной сетки. Предложенная модель позволила задавать произвольный тип предварительного состояния в пластине: как в виде аналитических зависимостей, так и численно. Представлен пример численного эксперимента, в котором в качестве поля предварительных напряжений выступают напряжения, образующиеся в пластине в результате приложения к части ее границы начальной механической статической нагрузки. Поле предварительных напряжений в рассматриваемой пластине определялось в результате решения соответствующей задачи статики. Проанализированы возможности идентификации параметров плоского предварительно напряженного состояния на основе данных измерения частотных характеристик пластины.

Ключевые слова: предварительно напряженное упругое тело, пластины Тимошенко, функционально-градиентные материалы, перфорированные пластины, частотный анализ

MODELING AND FREQUENCY ANALYSIS OF PRESTRESSED FUNCTIONALLY GRADED PLATES WITH HOLES

R.D. Nedin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Materials with complex inhomogeneous structure, including functionally graded composites, are widely used in military and civil engineering, and in modern construction. Due to the peculiarities of the technological process of manufacturing such materials, in many of them a non-uniform initial stress-strain state develops. At the same time, in the production, prestress fields are often embedded in structures to improve their strength characteristics. This paper presents a general linearized formulation of the problem on oscillations of a prestressed elastic body. Using it as a basis, we have formulated the problem on steady-state mixed vibrations of a functionally graded perforated plate in a prestressed state within the framework of Timoshenko deformation hypotheses. A numerical solution to the direct problem was constructed using the finite element method; the effect of the inhomogeneous prestressed state of the plate on its amplitude-frequency characteristics and resonant frequencies was investigated. The results of computational experiments for the functionally graded laws for material modules simulating the W-Cu alloy are given. In the zones of circular plate holes, we used the local condensation of the finite element mesh to increase the accuracy of calculations. The proposed model allows to set an arbitrary type of initial state in the plate, both in the form of analytical dependencies and numerically. We present an example of a numerical experiment, when stress fields were formed in a plate as a result of applying some initial mechanical static load to a part of its boundary. In order to describe such a stress field, the corresponding static problem for the plate under consideration was additionally solved. The possibilities of identifying the parameters of a plane prestressed state based on the acoustic measurement data on the frequency characteristics of the plate are investigated.

Key words: prestressed elastic body, Timoshenko plates, functionally graded materials, perforated plates, frequency analysis

1. Введение

Модели деформирования неоднородных пластин, являющихся распространенными конструкционными элементами, весьма актуальны при решении задач, возникающих в современном строительстве (при создании перекрытий и покрытий сооружений, перегородок, заслонок, монтажных пластин и другого), в производстве военных и гражданских технических систем широкого назначения (режущих систем, мембранных датчиков, экранирующих элементов и тому подобного).

В случае однородных материалов у задач о колебаниях упругих пластин, как однослойных, так и многослойных, существуют аналитические решения. Например, в статье [1] рассмотрена задача о колебаниях круглой трехслойной пластины на упругом основании, для которой построено аналитическое решение. В случае трехслойной композитной пластины из функционально-градиентного материала в [2]

рассмотрен специальный метод расчета колебаний на основе метода Фурье–Ритца. Получены решения в виде собственных частот и собственных форм для различных типов нагружения и граничных условий.

В настоящее время новые материалы со сложной неоднородной структурой широко используются в военном и гражданском машиностроении. При этом ввиду особенностей технологического процесса изготовления таких материалов многие из них находятся в неоднородном предварительно напряженно-деформированном состоянии. В связи с этим достаточно большое количество российских и зарубежных работ посвящено моделированию неоднородных материалов, а также изучению влияния предварительных напряжений (ПН) на их прочностные характеристики. Отметим, что часто при изготовлении для улучшения механических характеристик и свойств конструкций в них специально формируют ПН. Например, в работе [3] представлены вычислительные и натурные эксперименты по изучению влияния на этапе лазерной нагартовки упругих ПН на деформированную форму образца в виде пластины из алюминиевого сплава. Разработан новый вариант метода учета влияния ПН на изгибную деформацию и образование остаточных напряжений, в котором за основу берется известный метод собственных деформаций (eigenstrain) А. Корсунского [4].

В большинстве строительных приложений при решении обратных задач о реконструкции ПН в основном анализируются процессы восстановления определенного уровня ПН или величины начального усилия, формирующего поле ПН. В статье [5] разработаны методики определения ПН в бетонных конструкциях. Авторами рассмотрена комбинация как разрушающих, так и неразрушающих методов исследования в сочетании с методом конечных элементов (МКЭ). Для иллюстрации приведены результаты для многопролетного балочного моста. При этом вычисление ПН, обусловливаемых однородными начальными усилиями, служит важным этапом в многоступенчатой экспериментальной процедуре, позволяющим добиться более высокой точности диагностирования состояния конструкции. В работе [6] описан подход к идентификации предварительного натяжения в преднапряженном бетонном мостовом настиле, базирующийся на измерении динамического отклика. Для описания настила применяется стержневая модель Эйлера–Бернулли и далее МКЭ. При этом одноосное ПН задается в виде начальных усилий в каждом конечном элементе. В постановке обратной задачи используются данные одного или нескольких измерений, полученные с помощью акселерометров или тензодатчиков.

Отметим, что вариационные и слабые постановки прямых и обратных задач играют важную роль для формулировки операторных соотношений и выбора эффективного метода численного решения. Так, во многих работах предлагаются новые численные методы решения задач линейной теории упругости, основанные на сочетании метода Галеркина и МКЭ (см., например, [7,17,18]).

В серии работ [8–14] рассмотрены вопросы моделирования и реконструкции неоднородного предварительного напряженного состояния в неоднородных тонких пластинах. В настоящей работе исследуются планарно-изгибные колебания функционально-градиентной перфорированной пластины в условиях начального напряженного состояния.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях тонкой упругой изотропной неоднородной пластины с плоским сечением срединной поверхности S , жестко закрепленной на части границы l_u , под действием произвольной периодически меняющейся нагрузки $P_k e^{i\omega t}$ (ω — частота установившихся колебаний, $k = 1, 2, 3$), приложенной к части границы l_σ (Рис. 1а). Для общности будем считать, что все характеристики пластины: ρ — плотность, λ — параметр Ламе для плоского напряженного состояния, μ — модуль сдвига, заданы в виде зависимостей от координат x_1, x_2, x_3 . Пусть в пластине имеется объемное распределение ПН, заданное компонентами соответствующего тензора $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^0(x_1, x_2, x_3)$, где $i, j = 1, 2, 3$.

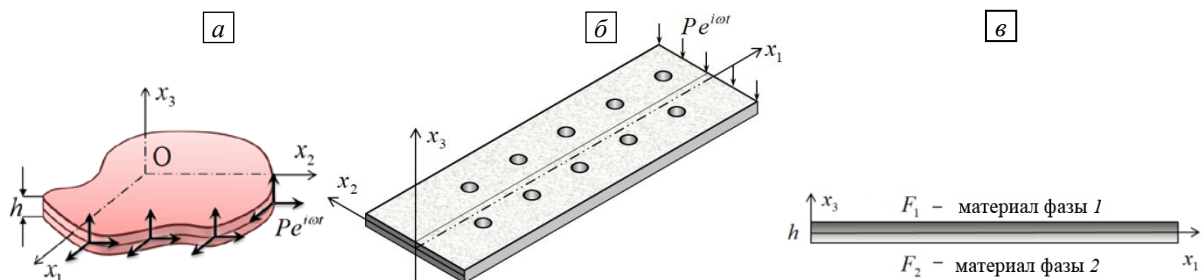


Рис. 1. Пластина произвольного сечения в режиме планарно-изгибных колебаний (а), перфорированная прямоугольная пластина (б), пластина при наличии функционально-градиентного перехода (в)

Нелинейные свойства упругих тел проявляются в том, что после предварительного деформирования распространение малых возмущений в них зависит не только от свойств материалов, но и от величины начальной деформации. В качестве основной возьмем линеаризованную постановку задачи о колебаниях предварительно напряженного тела без явного учета начальной деформации. Предположим, что начальное деформированное состояние определяется в рамках геометрически линейной теории, вследствие чего градиентами начальных перемещений можно пренебречь [16]. Такой вариант упрощения задачи для предварительно напряженного тела распространен и в самом общем случае. Подробный обзор наиболее используемых линеаризованных моделей предварительно напряженных тел, включая и применяемую в настоящей работе, приведен в статье [13].

Таким образом, задача об установившихся колебаниях анизотропного тела с учетом ПН имеет следующую постановку:

$$\left(C_{ijkl} u_{k,l} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0 \right)_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad (1)$$

$$u_i |_{S_u} = 0, \quad \left(C_{ijkl} u_{k,l} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0 \right) n_j |_{S_\sigma} = P_i. \quad (2)$$

Здесь считается, что поверхность тела в текущей конфигурации представима в виде: $S = S_u \cup S_\sigma$, причем тело жестко зашпелено на части S_u и нагружено периодически меняющейся нагрузкой на части S_σ . Компоненты C_{ijkl} образуют тензор упругих модулей, u_i — компоненты вектора малых перемещений.

На основе общей постановки (1), (2) сформулируем задачу об установившихся связанных планарно-изгибных колебаниях описанной выше пластины. Согласно теории пластин Тимошенко [15], соответствующие гипотезы (с добавлением планарной составляющей перемещений) будут иметь вид:

$$u_1 = \theta_1 x_3 + \zeta_1, \quad u_2 = \theta_2 x_3 + \zeta_2, \quad u_3 = w, \quad (3)$$

где $\theta_\alpha = \theta_\alpha(x_\beta)$ — углы поворота нормали n относительно осей x_α , $\zeta_\alpha = \zeta_\alpha(x_\beta)$ — перемещения в срединной плоскости пластины, $w = w(x_\beta)$ — прогиб пластины (здесь $\alpha, \beta = 1, 2$). На основании вариационного принципа для предварительно напряженного упругого тела в рамках линеаризованной модели (1), (2) [12] и с учетом гипотез деформирования (3) постановка краевой задачи формулируется в виде:

$$Q_{\alpha\beta} - S_\alpha + \omega^2 (P_1 \zeta_\alpha + P_2 \theta_\alpha) = 0, \quad R_{\alpha\beta} + \omega^2 (P_0 \zeta_\alpha + P_1 \theta_\alpha) = 0, \quad T_{\alpha\alpha} + P_0 \omega^2 w = 0, \quad (4)$$

$$w |_{l_u} = 0, \quad \zeta_\alpha |_{l_u} = 0, \quad \theta_\alpha |_{l_u} = 0, \quad (5)$$

$$Q_{\alpha\beta} n_\beta |_{l_\sigma} = 0, \quad R_{\alpha\beta} n_\beta |_{l_\sigma} = P_\alpha, \quad T_\alpha n_\alpha |_{l_\sigma} = P_3,$$

где обозначено:

$$Q_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} (\Lambda_2 \theta_{m,m} + \Lambda_1 \zeta_{m,m}) + M_2 (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + M_1 (\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \Sigma_{m\beta}^2 \theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m\beta}^1 \zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{\beta 3}^1 \theta_\alpha,$$

$$R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} (\Lambda_1 \theta_{m,m} + \Lambda_0 \zeta_{m,m}) + M_1 (\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}) + M_0 (\zeta_{\alpha,\beta} + \zeta_{\beta,\alpha}) + \Sigma_{m\beta}^1 \theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m\beta}^0 \zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{\beta 3}^0 \theta_\alpha,$$

$$S_\alpha = M_0 (w_{,\alpha} + \theta_\alpha) + \Sigma_{m3}^1 \theta_{\alpha,m} + \Sigma_{m3}^0 \zeta_{\alpha,m} + \Sigma_{33}^0 \theta_\alpha, \quad T_\alpha = M_0 (w_{,\alpha} + \theta_\alpha) + \Sigma_{\alpha m}^0 w_{,m},$$

$$G_p = \int_{-h/2}^{h/2} g x_3^p dx_3, \quad G_p = \{ \Lambda_p, M_p, P_p, \Sigma_{\alpha\beta}^p \}, \quad g = \{ \lambda, \mu, \rho, \sigma_{\alpha\beta}^0 \} \quad (\alpha, \beta, m = 1, 2, \quad p = 0, 1, 2),$$

P_p — интегральные характеристики плотности ($p = 0, 1, 2$), m — индекс, по которому осуществляется суммирование, P_α — компоненты вектора нагрузки в плоскости S пластины, P_3 — интенсивность изгибной нагрузки [14]. Введенные функции G_p представляют собой обобщение закона для интегральных характеристик $\Lambda_p, M_p, P_p, \Sigma_{\alpha\beta}^p$, выражаемых через соответствующие параметры $\lambda, \mu, \rho, \sigma_{\alpha\beta}^0$, например:

$$\Sigma_{12}^2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{12}^0 x_3^2 dx_3, \quad P_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho x_3 dx_3.$$

Отметим, что здесь рассматриваются совместные планарно-изгибные колебания пластины, и задача в такой постановке может быть сведена к отдельным задачам о планарных и изгибных колебаниях, но только при выполнении дополнительных условий симметрии, описанных в работе [14]. Для цельной пластины с постоянными характеристиками и однородным полем ПН (по всем координатам) эти условия

выполняются автоматически, и, следовательно, задачу для пластины можно решать по отдельности для каждого из режимов колебаний.

Обозначим буквами $\Theta_\alpha, Z_\alpha, W$ пробные функции, удовлетворяющие тем же главным условиям, что и, соответственно, функции $\theta_\alpha, \zeta_\alpha, w$:

$$\Theta_\alpha|_{S_\alpha} = 0, \quad Z_\alpha|_{S_\alpha} = 0, \quad W|_{S_\alpha} = 0. \quad (6)$$

Тогда, согласно гипотезам (3) и граничным условиям (6), слабая постановка сформулированной задачи примет вид:

$$\int_{l_\alpha} (P_\alpha Z_\alpha + P_3 W) dl - \int_S \{ Q_{\alpha\beta} \Theta_{\alpha,\beta} + R_{\alpha\beta} Z_{\alpha,\beta} + S_\alpha \Theta_\alpha + T_\alpha W_{,\alpha} - \omega^2 [P_2 \theta_\alpha \Theta_\alpha + P_1 (\theta_\alpha Z_\alpha + \zeta_\alpha \Theta_\alpha) + P_0 (\zeta_\alpha Z_\alpha + w W)] \} dS = 0. \quad (7)$$

На основе слабой постановки (7) исследуем частную задачу о колебаниях неоднородной пластины с круговыми отверстиями (см. Рис. 1б). Пластина выполнена из функционально-градиентного материала, свойства которого непрерывно меняются по поперечной координате в соответствии с обобщающим законом неоднородности F для материальных параметров пластины λ, μ, ρ :

$$F(x_3) = (F_1 - F_2) \left(\frac{x_3 + 0,5h}{h} \right)^n + F_2. \quad (8)$$

Здесь: F_1 и F_2 — физико-механические характеристики материала на поверхностях пластины $x_3 = \pm h/2$.

Уравнения движения, исходя из (4), (5), принимают вид:

$$\begin{aligned} Q_{11,1} + Q_{12,2} - S_1 + \omega^2 (P_1 \zeta_1 + P_2 \theta_1) &= 0, \\ Q_{21,1} + Q_{22,2} - S_2 + \omega^2 (P_1 \zeta_2 + P_2 \theta_2) &= 0, \\ R_{11,1} + R_{12,2} + \omega^2 (P_0 \zeta_1 + P_1 \theta_1) &= 0, \\ R_{21,1} + R_{22,2} + \omega^2 (P_0 \zeta_2 + P_1 \theta_2) &= 0, \\ T_{1,1} + T_{2,2} + P_0 \omega^2 w &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Соответствующие граничные условия записываются так:

$$\begin{aligned} w|_{l_\alpha} = 0, \quad \theta_1|_{l_\alpha} = 0, \quad \theta_2|_{l_\alpha} = 0, \quad \zeta_1|_{l_\alpha} = 0, \quad \zeta_2|_{l_\alpha} = 0, \\ (Q_{11} n_1 + Q_{12} n_2)|_{l_\alpha} = 0, \quad (Q_{21} n_1 + Q_{22} n_2)|_{l_\alpha} = 0, \\ (R_{11} n_1 + R_{12} n_2)|_{l_\alpha} = P_1, \quad (R_{21} n_1 + R_{22} n_2)|_{l_\alpha} = P_2, \quad (T_1 n_1 + T_2 n_2)|_{l_\alpha} = P_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Условимся, что в рамках плоского напряженного состояния поле ПН в пластине не зависит от поперечной координаты, то есть $\sigma_{\alpha\beta}^0 = \sigma_{\alpha\beta}^0(x_1, x_2)$, где $\alpha, \beta = 1, 2$. В этом случае входящие в (7) слагаемые могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \Lambda_2 (\theta_{1,1} + \theta_{2,2}) + \Lambda_1 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_2 \theta_{1,1} + 2M_1 \zeta_{1,1} + \Sigma_{11}^2 \theta_{1,1} + \Sigma_{12}^2 \theta_{1,2} + \Sigma_{11}^1 \zeta_{1,1} + \Sigma_{12}^1 \zeta_{1,2}, \\ Q_{22} &= \Lambda_2 (\theta_{1,1} + \theta_{2,2}) + \Lambda_1 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_2 \theta_{2,2} + 2M_1 \zeta_{2,2} + \Sigma_{12}^2 \theta_{2,1} + \Sigma_{22}^2 \theta_{2,2} + \Sigma_{12}^1 \zeta_{2,1} + \Sigma_{22}^1 \zeta_{2,2}, \\ Q_{12} &= M_2 (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + M_1 (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) + \Sigma_{12}^2 \theta_{1,1} + \Sigma_{22}^2 \theta_{1,2} + \Sigma_{12}^1 \zeta_{1,1} + \Sigma_{22}^1 \zeta_{1,2}, \\ Q_{21} &= M_2 (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + M_1 (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) + \Sigma_{11}^2 \theta_{2,1} + \Sigma_{12}^2 \theta_{2,2} + \Sigma_{11}^1 \zeta_{2,1} + \Sigma_{12}^1 \zeta_{2,2}, \\ R_{11} &= \Lambda_1 (\theta_{1,1} + \theta_{2,2}) + \Lambda_0 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_1 \theta_{1,1} + 2M_0 \zeta_{1,1} + \Sigma_{11}^1 \theta_{1,1} + \Sigma_{12}^1 \theta_{1,2} + \Sigma_{11}^0 \zeta_{1,1} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{1,2}, \\ R_{22} &= \Lambda_1 (\theta_{1,1} + \theta_{2,2}) + \Lambda_0 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_1 \theta_{2,2} + 2M_0 \zeta_{2,2} + \Sigma_{12}^1 \theta_{2,1} + \Sigma_{22}^1 \theta_{2,2} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{2,1} + \Sigma_{22}^0 \zeta_{2,2}, \\ R_{12} &= M_1 (\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + M_0 (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) + \Sigma_{12}^1 \theta_{1,1} + \Sigma_{22}^1 \theta_{1,2} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{1,1} + \Sigma_{22}^0 \zeta_{1,2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
R_{21} &= M_1(\theta_{1,2} + \theta_{2,1}) + M_0(\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) + \Sigma_{11}^1 \theta_{2,1} + \Sigma_{12}^1 \theta_{2,2} + \Sigma_{11}^0 \zeta_{2,1} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{2,2}, \\
S_1 &= M_0(w_{,1} + \theta_1), \quad S_2 = M_0(w_{,2} + \theta_2), \\
T_1 &= M_0(w_{,1} + \theta_1) + \Sigma_{11}^0 w_{,1} + \Sigma_{12}^0 w_{,2}, \quad T_2 = M_0(w_{,2} + \theta_2) + \Sigma_{12}^0 w_{,1} + \Sigma_{22}^0 w_{,2}.
\end{aligned}$$

Осредненные характеристики для ПН с учетом принятых гипотез станут следующими:

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\alpha\beta}^p &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^0 x_3^p dx_3 = \frac{1}{p+1} \sigma_{\alpha\beta}^0 \left(\left(\frac{h}{2} \right)^{p+1} - \left(-\frac{h}{2} \right)^{p+1} \right), \\
\Sigma_{\alpha\beta}^0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^0 dx_3 = h \sigma_{\alpha\beta}^0, \quad \Sigma_{\alpha\beta}^1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^0 x_3 dx_3 = 0, \quad \Sigma_{\alpha\beta}^2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta}^0 x_3^2 dx_3 = \frac{1}{12} h^3 \sigma_{\alpha\beta}^0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Осредненные характеристики материала с учетом того, что он является функционально-градиентным (см. (8)) при $n = 2$ примут вид:

$$\begin{aligned}
F_p &= \int_{-h/2}^{h/2} F x_3^p dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \left((F_1 - F_2) \left(\frac{x_3 + 0.5h}{h} \right)^2 + F_2 \right) x_3^p dx_3, \\
F_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} F dx_3 = \frac{1}{3} (F_1 + 2F_2) h, \quad F_1 = \int_{-h/2}^{h/2} F x_3 dx_3 = \frac{1}{12} (F_1 - F_2) h^2, \\
F_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} F x_3^2 dx_3 = \left(\frac{1}{30} F_1 + \frac{1}{20} F_2 \right) h^3.
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, задача об установившихся планарно-изгибных колебаниях пластины в условиях плоского напряженного состояния (11) и при осредненных интегральных характеристиках (12), (13) сводится к краевой задаче (9), (10). Далее на ее основе исследовано влияние неоднородного предварительного напряженного состояния перфорированной прямоугольной пластины, изображенной на рисунке 1б, на ее амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты.

3. Вычислительные эксперименты

Задача решалась численно с помощью МКЭ для различных функционально-градиентных законов, моделирующих металлокерамики и металлические сплавы. Для увеличения точности расчетов в зонах круговых отверстий использовано локальное сгущение конечно-элементной сетки. Проведен анализ влияния различных типов неоднородного предварительного напряженного состояния пластины на ее динамические (амплитудно-частотные) характеристики и собственные частоты. Важно, что предложенная модель позволяет задавать в пластине предварительное состояние произвольно: как в виде аналитических зависимостей, так и численно. Далее описывается численный эксперимент, когда в качестве ПН выступают поля напряжений, образованные в пластине в результате приложения к части ее границы некоторой начальной механической статической нагрузки. Для отыскания в рассматриваемой пластине такого поля дополнительно решалась соответствующая задача статики.

На рисунках 2 и 3 приведены поля предварительных перемещений u_1^0 , u_2^0 и ПН σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 , образующиеся в соответствующей модельной (статической) задаче, в которой пластина подвергается начальному растяжению в направлении оси x_1 за счет приложения механической нагрузки $p_1 = 150$ МПа. При этом использованы следующие параметры: $l = 1,0$ м (размер пластины вдоль оси x_1); $b = 0,3$ м (размер пластины вдоль оси x_2); $h = 0,05$ м; материалы фаз — медь (фаза F_1) и вольфрам (фаза F_2), у которых $E_1 = 110$ ГПа, $\nu_1 = 0,35$, $\rho_1 = 8900$ кг/м³, $E_2 = 350$ ГПа, $\nu_2 = 0,29$, $\rho_2 = 19300$ кг/м³. В пластине имеется 10 сквозных отверстий диаметром 0,021 м. Все результаты вычислений приведены для пластины, расположенной так, как показано на рисунке 2а. На шкалах рисунков 2 и 3 перемещения равны $u^0 \times 0,1$ м, напряжения — $\sigma^0 \times 0,1$ МПа.

Равновесие пластины во вспомогательной задаче статики описывается уравнениями:

$$R_{11,1} + R_{12,2} = 0, \quad R_{21,1} + R_{22,2} = 0, \tag{14}$$

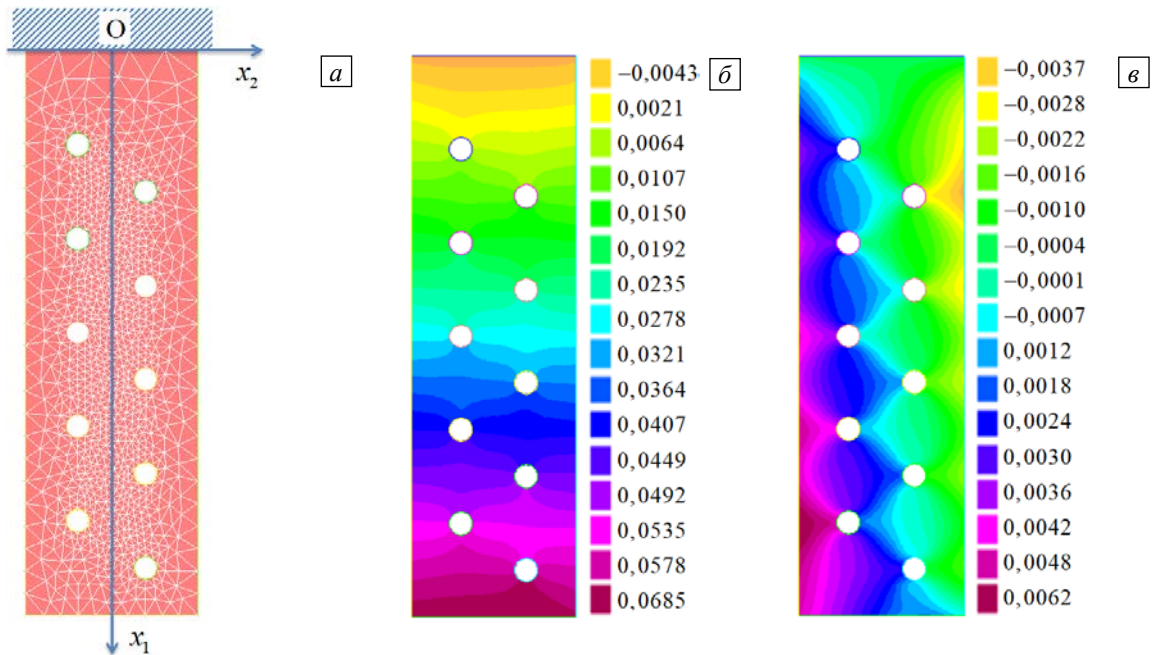


Рис. 2. Конечно-элементное разбиение пластины в плоском случае (а), картины полей начальных перемещений u_1^0 (б) и u_2^0 (в)

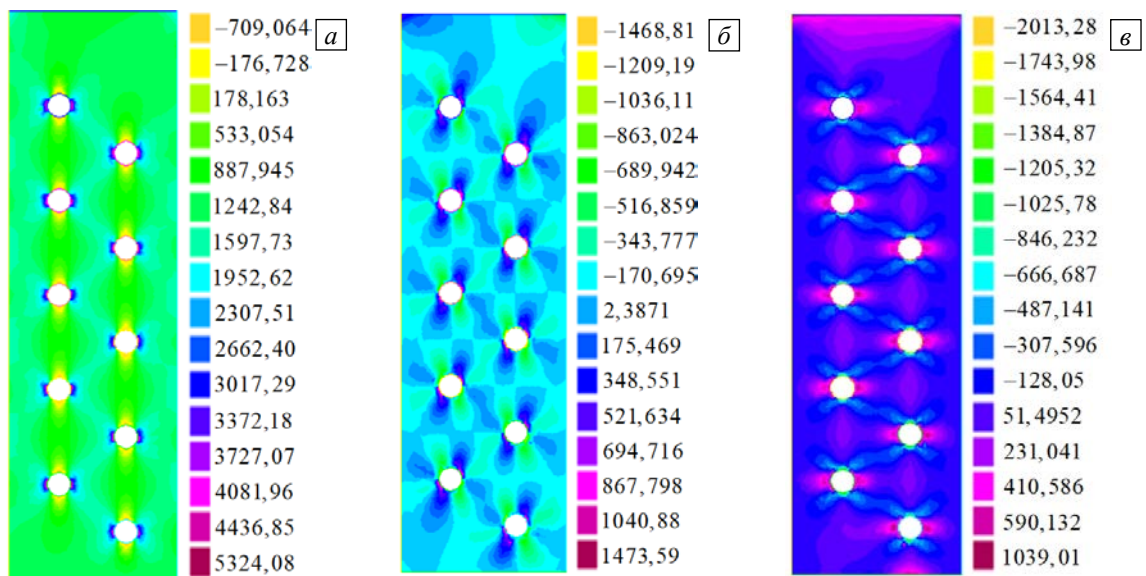


Рис. 3. Поля предварительных напряжений: σ_{11}^0 (а); σ_{12}^0 (б); σ_{22}^0 (в)

где введенные выше функции выглядят так:

$$R_{11} = \Lambda_0 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_0 \zeta_{1,1}, \quad R_{12} = R_{21} = M_0 (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}), \quad R_{22} = \Lambda_0 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_0 \zeta_{2,2}.$$

Слабая постановка при этом трансформируется к виду:

$$0 = \int_{l_0} P_1 Z_1 dl - \int_S (R_{11} Z_{1,1} + R_{12} (Z_{1,2} + Z_{2,1}) + R_{22} Z_{2,2}) dS. \quad (15)$$

Функции решения отсюда — ζ_1 , ζ_2 , R_{11} , R_{12} , R_{22} , могут быть использованы в качестве полей предварительных перемещений и напряжений — u_1^0 , u_2^0 и σ_{11}^0 , σ_{12}^0 , σ_{22}^0 , соответственно, при решении задач в рамках линеаризованных постановок для предварительно напряженных тел. В данном случае, в силу выбранной модели, в дальнейшем будем учитывать в явном виде только компоненты ПН.

На рисунках 4 и 5 приведены поля прогиба, углов поворота нормали и планарных перемещений, рассчитанных в статическом случае (при $\omega=0$) для перфорированной пластины с учетом предварительного нагружения в рамках слабой постановки (15). Величина изгибной нагрузки при этом равнялась $p_3 = -10$ МПа и была приложена на границе $x_1 = l$. На шкалах рисунков 4 и 5 прогибы равны $|w| \times 0,1$ м.

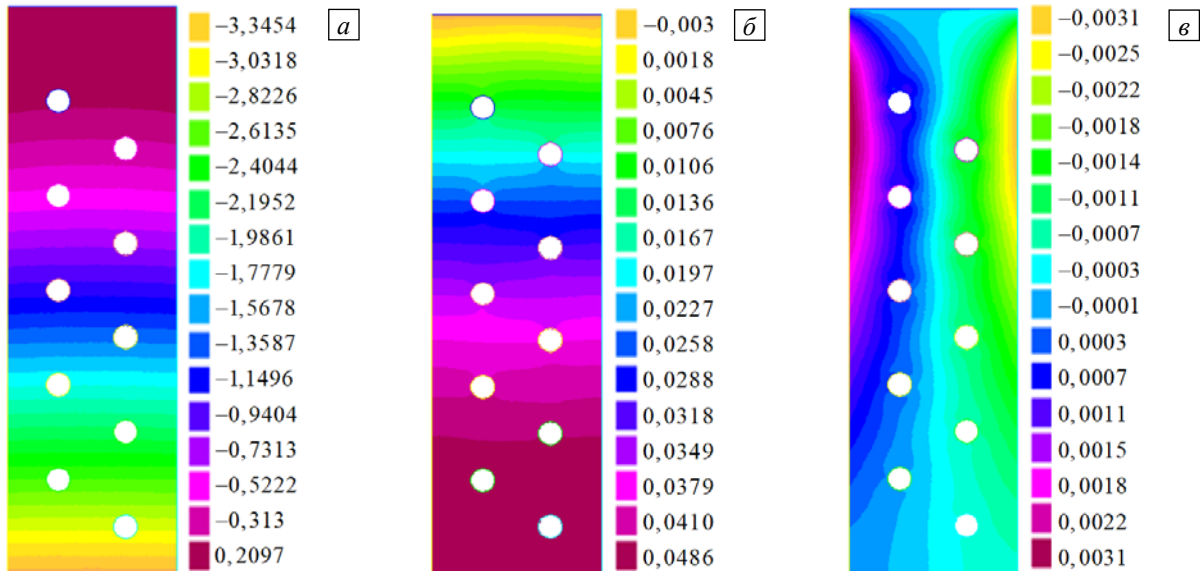


Рис. 4. Поля прогиба пластины w (а) и углов поворота нормалей: θ_1 (б); θ_2 (е)

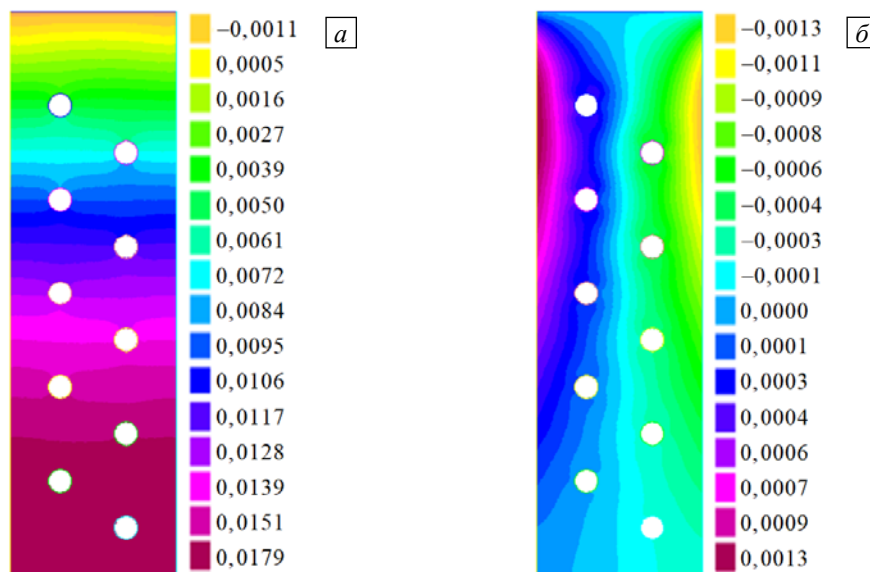


Рис. 5. Поля планарных перемещений пластины: ζ_1 (а); ζ_2 (б)

На рисунке 6 представлены амплитудно-частотные характеристики пластины, вычисленные в точке $(l, 0)$ без учета и с учетом поля ПН; при этом значения амплитуд колебаний равны $|w| \times 0,1$ м, а значения частот колебаний f приведены в Гц. По построенным кривым видно, что выбранное неоднородное поле ПН, образовавшееся в результате приложения механической нагрузки, вносит существенный вклад в их изменение и сдвиг резонансных частот. Аналогичный анализ влияния различных типов однородного и неоднородного предварительно напряженного состояния на акустические характеристики пластин при планарных колебаниях, а также при изгибных колебаниях в рамках классической модели Кирхгофа был проведен в работах [12, 13].

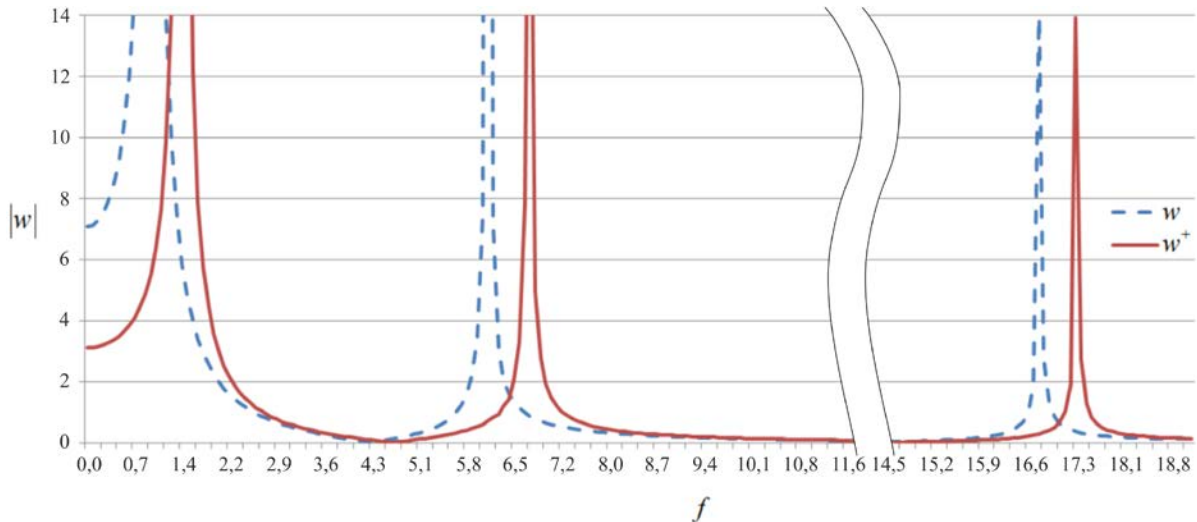


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики пластины в точке $(l, 0)$ без учета (w , штриховая линия) и с учетом поля предварительно напряжений (w^+ , сплошная линия)

4. Выводы

Предложенная для описания колебаний предварительно напряженной пластины модель позволяет задавать произвольную геометрию сечения пластины (в том числе с отверстиями), учитывать неоднородность материала (в плоскости пластины и по толщине), а также предварительно напряженное состояние в пластине как в виде аналитических зависимостей, так и численно.

Полученные результаты анализа влияния неоднородного предварительно напряженно-деформированного состояния на амплитудно-частотные характеристики и резонансные частоты могут быть положены в основу изучения обратных задач, когда требуется реконструкция параметров ПН на базе акустического зондирования. Например, для рассмотренной перфорированной пластины на основе данных акустического зондирования можно поставить задачу восстановления параметра ПН.

При зондировании нагрузкой, действующей в плоскости пластины, согласно постановке задачи для планарных колебаний пластины,

$$R_{11,1} + R_{12,2} + \omega^2 P_0 \zeta_1 = 0, \quad R_{21,1} + R_{22,2} + \omega^2 P_0 \zeta_2 = 0, \quad (16)$$

где функции имеют вид:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \Lambda_0 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_0 \zeta_{1,1} + \Sigma_{11}^0 \zeta_{1,1} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{1,2}, & R_{12} &= M_0 (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) + \Sigma_{12}^0 \zeta_{1,1} + \Sigma_{22}^0 \zeta_{1,2}, \\ R_{22} &= \Lambda_0 (\zeta_{1,1} + \zeta_{2,2}) + 2M_0 \zeta_{2,2} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{2,1} + \Sigma_{22}^0 \zeta_{2,2}, & R_{21} &= M_0 (\zeta_{1,2} + \zeta_{2,1}) + \Sigma_{11}^0 \zeta_{2,1} + \Sigma_{12}^0 \zeta_{2,2}. \end{aligned}$$

Слабая постановка будет выглядеть при этом следующим образом:

$$0 = \int_{l_0} (P_1 Z_1 + P_2 Z_2) dl - \int_S (R_{11} Z_{1,1} + R_{12} Z_{1,2} + R_{21} Z_{2,1} + R_{22} Z_{2,2} - \omega^2 P_0 (\zeta_1 Z_1 + \zeta_2 Z_2)) dS.$$

Рассмотрим модельную ситуацию, когда известна априорная информация о виде начальной механической нагрузки, вызвавшей предварительно напряженное состояние пластины. Так как компоненты тензора ПН линейно зависят от начальной нагрузки, то можно записать: $\Sigma_{\alpha\beta}^0 = p h \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0$, где p — интенсивность начальной нагрузки, приложенной к части свободной границы пластины, $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}^0 = \sigma_{\alpha\beta}^0 / p$ — характерное поле ПН с известной структурой. С учетом этого представления в статическом случае (при $\omega = 0$) на основе уравнений движения (16) получается формула:

$$p = -\frac{1}{h} \frac{(\Lambda_0 + 2M_0) \zeta_{1,1} + (\Lambda_0 + M_0) \zeta_{2,1} + M_0 \zeta_{1,2}}{\left[\tilde{\sigma}_{11}^0 \zeta_{1,1} + \tilde{\sigma}_{12}^0 \zeta_{1,2} \right]_1 + \left[\tilde{\sigma}_{12}^0 \zeta_{1,1} + \tilde{\sigma}_{22}^0 \zeta_{1,2} \right]_2}, \quad (17)$$

которая позволяет определять параметр p исходя из набора данных измерений планарных компонент смещения ζ_1, ζ_2 в точках пластины. Затем по этим значениям можно построить функции компонент перемещений, например, с помощью сплайн-интерполяции и далее выразить первые и вторые производные перемещений, входящие в формулу (17). Полученная формула дает возможность проводить вычислительные эксперименты по реконструкции параметра ПН p для различных видов начальной механической нагрузки.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18-71-10045).

Литература

1. Леоненко Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2014. № 1. С. 59-63.
2. Yang C., Jin G., Ye X., Liu Z. A modified Fourier–Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials // Int. J. Mech. Sci. 2016. Vol. 106. P. 1-18. [DOI](#)
3. Hu Y., Li Z., Yu X., Yao Z. Effect of elastic prestress on the laser peen forming of aluminum alloy 2024-T351: Experiments and eigenstrain-based modeling // J. Mater. Process. Tech. 2015. Vol. 221. P. 214-224. [DOI](#)
4. Korsunsky A.M. Residual elastic strain due to laser shock peening: Modelling by eigenstrain distribution // J. Strain Anal. Eng. 2006. Vol. 41. No. 3. P. 195-204. [DOI](#)
5. Bagge N., Nilimaa J., Elfgrén L. In-situ methods to determine residual prestress forces in concrete bridges // Eng. Struct. 2017. Vol. 135. P. 41-52. [DOI](#)
6. Lu Z.R., Law S.S. Identification of prestress force from measured structural responses // Mech. Syst. Signal Process. 2006. Vol. 20. P. 2186-2199. [DOI](#)
7. Wang C., Wang J., Wang R., Zhang R. A locking-free weak Galerkin finite element method for elasticity problems in the primal formulation // J. Comput. Appl. Math. 2016. Vol. 307. P. 346-366. [DOI](#)
8. Ватульян А.О., Недин Р.Д. К идентификации неоднородных предварительных напряжений // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2011. № 1. С. 38-44.
9. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates // Int. J. Solid. Struct. 2013. Vol. 50. P. 2107-2114. [DOI](#)
10. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate // ZAMM. 2014. Vol. 94. P. 142-149. [DOI](#)
11. Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method // Adv. Mater. Res. 2014. Vol. 996. P. 409-414. [DOI](#)
12. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 206 с.
13. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // Eng. Struct. 2017. Vol. 151. P. 391-405. [DOI](#)
14. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. Vol. 41. P. 1600-1618. [DOI](#)
15. Weaver W., Timoshenko S.P., Young D.H. Vibration problems in engineering (Fifth edition). John Wiley & Sons, 1990. 624 p.
16. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустопругость. Киев: Наукова думка, 1977. 151 с.
17. Жамакоян К.А., Саркисян С.О. Метод конечных элементов в расчетах на изгиб микрополярных упругих тонких пластин // Вычисл. мех. сплош. сред. 2016. Т. 9, № 3. С. 375-383. [DOI](#)
18. Кузнецова Ю.С., Труфанов Н.А. МКЭ-реализация метода геометрического погружения в напряжениях на примере плоских задач теории упругости // Вычисл. мех. сплош. сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 460-470. [DOI](#)

References

1. Leonenko D.V. Vibrations of circular three-layer plates on en Pasternak elastic foundation. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov ChES – Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 1, pp. 59-63.
2. Yang C., Jin G., Ye X., Liu Z. A modified Fourier–Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials. *Int. J. Mech. Sci.*, 2016, vol. 106, pp. 1-18. [DOI](#)
3. Hu Y., Li Z., Yu X., Yao Z. Effect of elastic prestress on the laser peen forming of aluminum alloy 2024-T351: Experiments and eigenstrain-based modeling. *J. Mater. Process. Tech.*, 2015, vol. 221, pp. 214-224. [DOI](#)
4. Korsunsky A.M. Residual elastic strain due to laser shock peening: Modelling by eigenstrain distribution. *J. Strain Anal. Eng.*, 2006, vol. 41, no. 3, pp. 195-204. [DOI](#)
5. Bagge N., Nilimaa J., Elfgrén L. In-situ methods to determine residual prestress forces in concrete bridges. *Eng. Struct.*, 2017, vol. 135, pp. 41-52. [DOI](#)
6. Lu Z.R., Law S.S. Identification of prestress force from measured structural responses. *Mech. Syst. Signal Process.*, 2006, vol. 20, pp. 2186-2199. [DOI](#)
7. Wang C., Wang J., Wang R., Zhang R. A locking-free weak Galerkin finite element method for elasticity problems in the primal formulation. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 307, pp. 346-366. [DOI](#)
8. Vatulyan A.O., Nedin R.D. On the reconstruction of inhomogeneous residual stress. *Vestnik SPbGU. Matematika. Mekhanika. Astronomiya – Vestnik St. Petersburg University. Mathematics*, 2011, no. 1. pp. 38-44.

9. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Inverse problem of non-homogeneous residual stress identification in thin plates. *Int. J. Solid. Struct.*, 2013, vol. 50, pp. 2107-2114. [DOI](#)
10. Nedin R.D., Vatulyan A.O. Concerning one approach to the reconstruction of heterogeneous residual stress in plate. *ZAMM*, 2014, vol. 94, pp. 142-149. [DOI](#)
11. Dudarev V.V., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Nondestructive identification of inhomogeneous residual stress state in deformable bodies on the basis of the acoustic sounding method. *Adv. Mater. Res.*, 2014, vol. 996, pp. 409-414. [DOI](#)
12. Vatul'yan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D. *Predvaritel'nyye napryazheniya: modelirovaniye i identifikatsiya* [Prestress: modeling and identification]. Rostov-na-Donu: Izd-vo YuFU, 2014. 206 p.
13. Nedin R., Dudarev V., Vatulyan A. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Eng. Struct.*, 2017, vol. 151, pp. 391-405. [DOI](#)
14. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Bogachev I.V. Direct and inverse problems for prestressed functionally graded plates in the framework of the Timoshenko model. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2018, vol. 41, pp. 1600-1618. [DOI](#)
15. Weaver W., Timoshenko S.P., Young D.H. *Vibration problems in engineering* (Fifth edition). John Wiley & Sons, 1990. 624 p.
16. Guz' A.N., Makhort F.G., Gushcha O.I. *Vvedeniye v akustouprugost'* [Introduction to acoustoelasticity]. Kiyev: Naukova dumka, 1977. 151 p.
17. Zhamakochyan K.A., Sargsyan S.H. Finite element method for calculation of bending of micropolar elastic thin plates. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2016, vol. 9, no. 3, pp. 375-383. [DOI](#)
18. Kuznetsova Yu.S., Trufanov N.A. FEM implementation of a stress-based geometrical immersion method by example of the solution of plane elastic problems. *Vychisl. mekh. splosh. sred – Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 460-470. [DOI](#)

Поступила в редакцию 18.04.2019; после доработки 24.05.2019; принята к опубликованию 02.06.2019