

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.2.13](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.13)

УДК 519.6

## ВАРИАЦИОННЫЕ МНОГОМАСШТАБНЫЕ МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ–ДИФФУЗИИ–РЕАКЦИИ

М.С. Желнин, А.А. Костина, О.А. Плехов

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Работа посвящена построению вариационных многомасштабных методов конечных элементов для численного решения двумерных краевых задач с сингулярно-возмущенным нестационарным нелинейным уравнением конвекции–диффузии–реакции. Решения данных задач могут быстро изменяться в тонких слоях, что при применении стандартной расчетной схемы Галёркина приводит к возникновению в этих областях нефизических осцилляций. В вариационных многомасштабных методах выполняется разложение исходной задачи на сеточную и подсеточную, что позволяет учесть особенности задачи на масштабах, меньших размера элемента сетки. В данной работе рассматриваются два многомасштабных метода: VMM-ASA (Variational Multiscale Method with Algebraic Sub-scale Approximation) и RFB (Residual-Free Bubbles) метод. В первом из них подсеточная задача аппроксимируется с использованием невязки сеточного уравнения и стабилизирующих параметров. Во втором подсеточная задача решается приближенно на основе аппроксимационных функций специального вида. Постановки сеточной и подсеточной задач определяются посредством линеаризации исходной задачи по подсеточной компоненте. Компьютерная реализация методов выполнена в коммерческом пакете конечно-элементного моделирования. Эффективность предложенных методов исследована путем решения модельной краевой задачи с нелинейным уравнением. Рассмотрены случаи различной величины коэффициента диффузии. В результате вычислительных экспериментов показано, что по сравнению со стандартной расчетной схемой Галёркина многомасштабные методы дают возможность достигать более устойчивого численного решения как с меньшим количеством осцилляций, так и их меньшей амплитудой. При малой величине коэффициента диффузии, когда схема Галёркина расходится, стабилизированные методы обеспечивают приемлемое численное решение на достаточно грубой сетке.

*Ключевые слова:* уравнение конвекции–диффузии–реакции, стабилизированный метод конечных элементов, вариационный многомасштабный метод, осцилляции численного решения

## VARIATIONAL MULTISCALE FINITE ELEMENT METHODS FOR A NONLINEAR CONVECTION-DIFFUSION-REACTION EQUATION

M.S. Zhelnin, A.A. Kostina, and O.A. Plekhov

*Institute of Continuous Media Mechanics of UB RAS, Perm, Russian Federation*

This paper focuses on the development of finite element methods for solving a two-dimensional boundary value problem for a singularly perturbed time-dependent convection-diffusion-reaction equation. Solution to the problem can vary rapidly in thin layers. As a result, spurious oscillations in the solution occur if the standard Galerkin method is used. In multiscale finite element methods, the initial problem is split into grid-scale and subgrid-scale problems, which allows one to capture the features of the problem at a scale smaller than an element mesh size. In the study two methods are considered: VMM-ASA (Variational Multiscale Method with Algebraic Sub-scale Approximation) and RFB (Residual-Free Bubbles). In the first method, the subgrid problem is modeled by the residual of the grid equation and intrinsic time scales. In the second method, the subgrid problem is approximated by special functions. The grid and subgrid problems are formulated through a linearization procedure on the subgrid component applied to the initial problem. The computer implementation of the methods has been carried out using a commercial finite element package. The efficiency of the developed methods has been studied by solving a test boundary value problem for the nonlinear equation. Several values of the diffusion coefficient of the equation have been analyzed. On the basis of the numerical study, it has been shown that the multiscale methods allow one to increase the stability of a numerical solution and to decrease the quantity and amplitude of oscillations compared to the standard Galerkin method. In the case of a small diffusion coefficient, the developed methods can yield a satisfactory numerical solution on a sufficiently coarse mesh.

*Key words:* convection–diffusion–reaction equation, stabilized finite element method, variational multiscale method, spurious oscillations of numerical solution

### 1. Введение

Математическое моделирование процессов неизотермической фильтрации многофазного потока в пористых средах имеет большое значение для определения технических параметров и обоснования проектных решений во многих геоинженерных приложениях, среди которых можно назвать разработку месторождений нефти [1, 2], геологическое хранение диоксида углерода [3], искусственное замораживание породного массива [4, 5]. Перспективным подходом к решению системы уравнений неизотермической фильтрации многофазного потока является численный, использующий метод конечных элементов (МКЭ) и позволяющий сравнительно просто добавить в расчетную схему уравнения, описывающие напряженно-деформируемое состояние породного скелета [6, 7]. Однако выполнение в МКЭ дискретизации определяющих уравнений на основе стандартного подхода Галёркина приводит

при расчете к нефизическим осцилляциям решения в узких внутренних и пограничных слоях. В последние десятилетия для повышения устойчивости процесса вычислений активно развиваются стабилизированные МКЭ [8].

Из анализа уравнений неизотермической многофазной фильтрации при наличии фазового перехода первого рода следует, что они относятся к типу уравнений конвекции–диффузии–реакции. Для стабилизации данного типа уравнений большое распространение получили такие методы как SUPG (Streamline-upwind Petrov–Galerkin) [9–13], GLS (Galerkin Least Squares) [14–18], SOLD (Spurious Oscillations at Layers Diminishing) [19–21] и VMM (Variational Multiscale Method) [22–31]. Общая идея этих методов заключается в добавлении в запись исходного уравнения в слабой форме дополнительного стабилизирующего слагаемого. Величина слагаемого зависит от точности получаемого решения уравнения на каждом шаге расчета, что позволяет стабилизировать решение только в тех областях, где возникают осцилляции.

Охарактеризуем каждый из методов, ограничившись для простоты рассмотрением только линейного уравнения конвекции–диффузии–реакции с некоторыми начальным и граничным условиями:

$$Q(u) \equiv \alpha \Delta u - \mathbf{b} \cdot \nabla u - cu + p = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  — двумерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей,  $\alpha > 0$  — положительная константа,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y)$  — вектор-функция и  $c = c(x, y)$ ,  $p = p(x, y)$  — функции координат. В SUPG методе в уравнение в слабой форме добавляется стабилизирующее слагаемое, зависящее от величины невязки  $Q(u)$  и градиента пробной функции  $v$ :

$$\int_{\Omega} \tau_{\text{SUPG}} Q(u) (\mathbf{b} \cdot \nabla v),$$

где  $\tau_{\text{SUPG}}$  — стабилизирующий параметр. В GLS методе произведение градиента пробной функции  $u$  и конвективного коэффициента  $\mathbf{b}$  заменяется результатом применения оператора рассматриваемого уравнения к пробной функции  $v$ :

$$\int_{\Omega} \tau_{\text{SUPG}} Q(u) [\lambda \Delta v - \mathbf{b} \cdot \nabla v - cv].$$

Данные методы позволяют существенно повысить устойчивость и точность численного решения при условии, что точное решение является гладким [32]. Однако при наличии узких внутренних и пограничных слоев, где решение изменяется быстро, использование перечисленных методов не исключает появления нефизических (ложных) осцилляций решения.

В SOLD методах для повышения устойчивости решения предлагается добавить еще одно дополнительное стабилизирующее слагаемое. Оно представляет собой произведение стабилизирующего параметра  $\tau_{\text{SOLD}}$  и искусственной диффузии, которая может иметь один из следующих видов:

– изотропная диффузия

$$-\int_{\Omega} \tau_{\text{SOLD}} \nabla u \cdot \nabla v;$$

– диффузия поперек потока (crosswind diffusion)

$$-\int_{\Omega} \tau_{\text{SOLD}} \left[ \nabla u \cdot \nabla v - \frac{1}{\|\mathbf{b}\|_2^2} (\mathbf{b} \cdot \nabla u) (\mathbf{b} \cdot \nabla v) \right],$$

где  $\|\cdot\|_2$  — евклидова норма;

– диффузия, основанная на реберной стабилизации (edge stabilization)

$$-\sum_{\Omega_k} \int_{\partial \Omega_k} \tau_{\text{SOLD}} \text{sign}(\mathbf{t} \cdot \nabla u) (\mathbf{t} \cdot \nabla v),$$

где  $\mathbf{t}$  — единичный касательный вектор к границе  $\partial \Omega_k$  элемента расчетной сетки  $\Omega_k$ .

Проведенное в работе [21] сравнение различных методов на основе решения некоторых показательных краевых задач для уравнения конвекции–диффузии–реакции показало, что SOLD стабилизация позволяет значительно уменьшить амплитуду возникающих осцилляций. Однако, в отличие от SUPG и GLS методов, добавление искусственной диффузии приводит к тому, что решение модифицированного уравнения не совпадает с решением исходного, то есть нарушается условие согласованности. В вычислительной практике такая стабилизация приводит к чрезмерно сглаженному решению.

Следует отметить, что эффективность описанных методов в значительной степени зависит от вида стабилизирующих параметров. В работах [21, 27, 33] приведены различные выражения данных параметров для уравнения конвекции–диффузии–реакции.

В VMM для определения вида стабилизирующего слагаемого решение исходного уравнения в слабой форме представляется в виде суммы решений уравнений на сеточном и подсеточном уровнях. За счет этого многомасштабного разложения удается включить подсеточные особенности исходного уравнения в сеточную задачу и тем самым учесть резкое изменение решения в тонких внутренних и пограничных слоях на приемлемой для практических расчетов сетке. Большое распространение получили такие модификации VMM, как VMM-ASA (VMM with Algebraic Sub-scale Approximation) и RFB (Residual-Free Bubbles) метод.

В первой модификации решение подсеточного уравнения находится не напрямую, а рассчитывается на основе невязки сеточного уравнения и стабилизирующих параметров (intrinsic time scales). В результате отпадает необходимость решать подсеточное уравнение, что существенно упрощает расчетную схему и не требует увеличения вычислительных ресурсов. В то же время оптимальные выражения для стабилизирующих параметров не известны, и их подбор для каждого уравнения нуждается в проведении серии вычислений.

В RFB методе находится приближенное решение уравнения на подсеточном уровне с использованием пробных функций специального вида. Функции, называемые пузырьковыми, обращаются в нуль на границе каждого элемента и достигают максимального значения внутри него. Такой подход не приводит к существенному увеличению вычислительных затрат и делает возможным построение приближенного решения подсеточного уравнения.

Известно, что VMM методы позволяют лучше стабилизировать решение по сравнению с SUPG и GLS методами [23, 31]. Несмотря на то, что большинство из реализаций VMM предназначено для решения линейных задач конвекции–диффузии, в работе [25] на примере задачи двухфазной фильтрации представлен подход к применению VMM-ASA для решения нелинейных уравнений. При этом осуществляется линеаризация исходного уравнения относительно подсеточного решения.

В настоящей работе с использованием этого подхода сделано обобщение VMM-ASA и RFB метода для решения сингулярно возмущенного нелинейного двумерного уравнения конвекции–диффузии–реакции. Компьютерная реализация выполнена в пакете конечно-элементного моделирования Comsol Multiphysics®. Для исследования эффективности разработанных методов проведена серия вычислительных экспериментов на модельной краевой задаче.

## 2. Слабая формулировка нестационарной краевой задачи конвекции–диффузии–реакции

Рассмотрим уравнение конвекции–диффузии–реакции относительно функции  $u = u(x, y)$  в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial\Omega$

$$R(u) \equiv -u_t - \nabla \cdot \mathbf{f} + \nabla \cdot (\lambda \nabla u) + q = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

и граничными условиями первого и второго рода

$$u|_{\Gamma_D} = g, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$-(\mathbf{f} - \lambda \nabla u) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = h, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Здесь: функции  $\lambda = \lambda(u)$ ,  $q = q(u)$ ,  $u_0 = u_0(x, y)$ ,  $g = g(x, y)$ ,  $h = h(x, y)$  и вектор-функция  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(u)$  заданы;  $\lambda > 0$ ;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$ ;  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$  — кусочно-гладкие части границы области

$\Omega$  такие, что  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ . Все величины полагаются безразмерными. Данный вид имеют уравнения сохранения массы при описании неизоэтермического фильтрационного течения в пористых средах многофазной жидкости с учетом фазового перехода первого рода [2, 4, 6, 7].

Перейдем к слабой формулировке задачи (1)–(4). Для этого определим пространства пробных функций и решений:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$S = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_D} = g\},$$

где  $H^1(\Omega)$  — пространство Соболева функций, имеющих производные первого порядка и интегрируемых с квадратом. Тогда слабая формулировка задачи (1)–(4) заключается в том, чтобы для каждого  $t \in (0, T)$  найти функцию  $u \in S$  такую, что

$$-\int_{\Omega} u_t v + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \nabla v - \int_{\Omega} \lambda \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Gamma_N} h v + \int_{\Omega} q v = 0, \quad \forall v \in V, \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = u_0, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}. \quad (6)$$

При этом предполагается, что входные данные поставленной задачи удовлетворяют условиям, обеспечивающим ее корректность [34].

### 3. Вариационный многомасштабный подход к построению численного решения

Пусть выполнено разбиение исследуемой области  $\Omega$  на конечные элементы  $\Omega_K$  так, что  $\bar{\Omega} = \overline{\cup \Omega_K}$ . В соответствии с подходом Галёркина рассмотрим аппроксимацию пространств решений  $S$  и пробных функций  $V$  пространствами интерполяционных полиномов  $S^h$  и  $V^h$ , построенных на основе разбиения  $\cup \Omega_K$  [35].

Уравнение конвекции–диффузии–реакции с малым коэффициентом диффузии является сингулярно возмущенным [8]. Для него свойственны узкие внутренние и пограничные слои, в которых его решение быстро — скачкообразно — изменяется. При численном расчете могут быть учтены только те особенности задачи, которые возникают на характерных масштабах, больших, чем размер элемента расчетной сетки. Вследствие этого построение численного решения в узких областях с большим значением производной по пространственным координатам требует использования чрезвычайно мелких сеток. В противном случае решение начинает осциллировать, что приводит к значительному росту погрешности и отсутствию сходимости к точному решению.

В VMM для учета особенностей на масштабах, меньших размера элемента, решение уравнения раскладывается на сумму сеточной и подсеточной компонент. Обозначим через  $P$  линейный оператор проектирования пространства пробных функций  $V$  на конечномерное пространство  $V^h$  сеточных (крупномасштабных) пробных функций:  $P: V \rightarrow V^h$ . Тогда пространство  $V$  можно представить в виде прямой суммы [31]:

$$V = V^h \oplus \tilde{V},$$

где  $\tilde{V} = \ker(P)$  — бесконечномерное пространство подсеточных (мелкомасштабных) пробных функций.

Аналогичное разложение справедливо для пространства решений:

$$S = S^h \oplus \tilde{S},$$

где  $S^h = \bar{g} + V^h$  — конечномерное пространство сеточных решений, удовлетворяющих на  $\Gamma_D$  граничному условию первого рода:  $\bar{g}|_{\Gamma_D} = g$ ,  $\tilde{S}$  — бесконечномерное пространство подсеточных решений. Так как подсеточные решения и пробные функции удовлетворяют однородным граничным условиям на  $\Gamma_D$ , то  $S = V$ .

На основе выполненного разложения решение и пробная функция единственным образом представляются как

$$u = u^h + \tilde{u}, \quad v = v^h + \tilde{v}, \quad (7)$$

где  $u^h \in S^h$ ,  $v^h \in V^h$ ,  $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ . В соответствии с выполненным разложением исходная задача в слабой формулировке (5), (6) разделяется на сеточную и подсеточную задачи. Следуя подходу, используемому в [25], для определения вида задач перейдем в (5) от интегрирования по области к интегрированию по разбиению  $\cup \Omega_K$ . Далее подставим решение и пробную функции (7) в (5) и лианеаризуем полученное уравнение относительно  $\tilde{u}$ . Тогда, после некоторых преобразований, задачи формулируются следующим образом: требуется найти сеточную функцию  $u^h \in S^h$  и подсеточную функцию  $\tilde{u} \in \tilde{V}$ , которые для каждого  $t \in (0, T]$  удовлетворяют сеточному уравнению:

$$\begin{aligned} & \sum_K \int_{\Omega_K} -u_t^h v^h + \sum_K \int_{\Omega_K} \mathbf{f}(u^h) \cdot \nabla v^h - \sum_K \int_{\Omega_K} \lambda(u^h) \nabla u^h \cdot \nabla v^h + \sum_K \int_{\Gamma_N \cap \Omega_K} h(u^h) v^h + \\ & + \sum_K \int_{\Omega_K} q(u^h) v^h - \sum_K \int_{\Omega_K} \tilde{u}_t v^h + \sum_K \int_{\Omega_K} \tilde{u} [\mathbf{f}_u(u^h) - \lambda_u(u^h) \nabla u^h] \cdot \nabla v^h - \\ & - \sum_K \int_{\Omega_K} \lambda(u^h) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v^h + \sum_K \int_{\Omega_K} q_u(u^h) \tilde{u} v^h = 0, \quad \forall v^h \in V^h, \end{aligned} \tag{8}$$

и подсеточному уравнению:

$$\sum_K \int_{\Omega_K} R(u^h) \tilde{v} - \sum_K \int_{\Omega_K} \tilde{u}_t \tilde{v} + \sum_K \int_{\Omega_K} \tilde{u} [\mathbf{f}_u(u^h) - \lambda_u(u^h) \nabla u^h] \cdot \nabla \tilde{v} - \sum_K \int_{\Omega_K} \lambda(u^h) \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v} + \sum_K \int_{\Omega_K} q_u(u^h) \tilde{u} \tilde{v} = 0, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}. \tag{9}$$

Как известно [8], основная трудность в построении решения уравнений (8), (9) заключается в том, что пространство  $\tilde{V}$  является бесконечномерным. Однако повышения устойчивости и точности сеточного решения можно добиться путем или моделирования влияния на него подсеточных особенностей исследуемого уравнения, или приближенного решения подсеточной задачи.

### 3.1. VMM-ASA

В данном методе подсеточное решение  $\tilde{u}$  находится не из решения уравнения (9), а из выражения, содержащего стабилизирующий параметр  $\tau$ , которое аппроксимирует обратный оператор к оператору уравнения (9). Вид  $\tau$  выбирается в соответствии с типом рассматриваемого уравнения:

$$\tilde{u} = -\tau R(u^h). \tag{10}$$

В работах [16, 21, 27, 33] приведены выражения стабилизирующих параметров для линейных уравнений конвекции–диффузии–реакции, которые были использованы в SUPG, GLS, SOLD и VMM-ASA стабилизации. В данной работе на основе вычислительных экспериментов выбрано следующее выражение для стабилизирующего параметра:

$$\tau = \frac{h_K^2}{\left| 1 + q_u(u^h) \right| h_K^2 \xi(w_{K,1}) + (2\lambda(u^h) / m_K) \xi(w_{K,2})},$$

где

$$w_{K,1} = \frac{2\lambda(u_h)}{m_K \left| 1 + q_u(u^h) \right| h_K^2}, \quad w_{K,2} = \frac{m_K \|\mathbf{c}\|_2 h_k}{\lambda(u_h)}, \quad \xi(z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z \leq 1, \\ z, & z \geq 1. \end{cases}$$

Здесь:  $h_K$  — размер  $K$ -го элемента, равный длине самого протяженного ребра;  $\mathbf{c} = \mathbf{f}_u(u^h) - \lambda_u(u^h) \nabla u^h$ ;  $m_K$  — числовой параметр, значение которого зависит от порядка конечно-элементной аппроксимации. Для линейной и квадратичной аппроксимаций  $m_K = 1/3$ .

### 3.2. RFB метод

В соответствии с данным методом подсеточное пространство решений и пробных функций  $V$  аппроксимируется конечномерным пространством пузырьковых функций  $B^h$ :

$$B^h = \{ \tilde{v} \in \tilde{\mathcal{V}} \mid \forall \Omega_k : \tilde{v} \in H^1(\Omega_k) \wedge \tilde{v}|_{\partial\Omega_k} = 0 \}.$$

Методы построения пузырьковых функций представлены в работах [23, 24, 28, 29]. В данной работе использован подход, реализованный в пакете Comsol Multiphysics®. При этом каждый элемент сетки наделяется единственной пузырьковой функцией, обладающей следующими свойствами: это полином наименьшей возможной степени, достигающий максимального значения в центре элемента и обращающийся в нуль на его границе [36].

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Для сравнения эффективности предложенных в данной работе модификаций VMM-ASA и RFB метода рассмотрена модельная краевая задача с уравнением конвекции–диффузии–реакции при условии малого коэффициента диффузии. Требовалось найти решение задачи (1)–(4) в области  $\Omega$ .

Коэффициенты уравнения (1) имели вид:  $\mathbf{f} = (u^3, u^3)$ ,  $\lambda = 6 \cdot 10^{-1}$ ,  $q = u^2$ . Область  $\Omega$  представляет собой квадрат с двумя отверстиями, центры которых располагались на одной из его диагоналей. Сторона квадрата составляла 1, радиус отверстий — 0,05, расстояние между отверстиями —  $0,5\sqrt{2}$ , расстояние от углов квадрата до отверстий —  $0,25\sqrt{2}$ . На границах отверстий задавались условия первого рода:  $g = 10$  и  $g = 0$ , на границах квадрата — нулевой поток  $h = 0$ . Временной параметр изменялся в пределах:  $t \in (0; 0,02]$ .

Компьютерная реализация предложенных стабилизированных МКЭ осуществлялась в пакете Comsol Multiphysics® с использованием модуля Weak Form PDE Interface, позволяющего дискретизировать слабую формулировку задачи в соответствии с выбранными базисными функциями. Так, в модуле задавались: для VMM-ASA — только сеточное уравнение (8), а выражение (10) для расчета подсеточного решения определялось в качестве переменной; для RFB метода — сеточное и подсеточное уравнения (8), (9). С целью исследования эффективности предложенных методов поставленная краевая задача решалась также на основе стандартной расчетной схемы Галёркина. При этом в модуль Weak Form PDE Interface вводилось уравнение (5).

Для построения решения сеточного уравнения прибегали к кусочно-линейным непрерывным функциям, для построения решения подсеточного уравнения — к пузырьковым функциям, которые задавались в виде полинома третьей степени. Для аппроксимации по времени применялась неявная схема Эйлера первого порядка. Решение системы нелинейных алгебраических уравнений выполнялось методом Ньютона. Область  $\Omega$  разбивалась на треугольные элементы с постепенным измельчением по мере приближения к границе отверстий. На рисунке 1 представлена расчетная сетка со средним размером элемента  $h_{avr} = 2,3 \cdot 10^{-2}$ , размер элементов на границе отверстий составляет  $1,1 \cdot 10^{-3}$ .

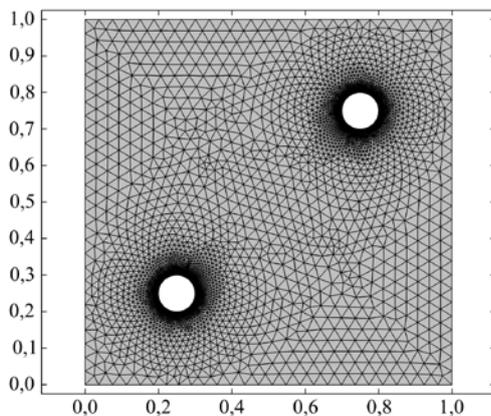


Рис. 1. Изображение расчетной сетки

В работе [27] для повышения устойчивости численного решения, получаемого посредством VMM-ASA, к уравнению (12) добавлялась искусственная диффузия. Однако в вычислительных экспериментах, проделанных в представляемом исследовании, эффективность данного приема не была установлена, так как добавление некоторых типов SOLD стабилизации не привело к изменению характеристик осцилляций

численного решения. В то же время введение, в соответствии с [31], искусственной изотропной диффузии

$$-\sum_K \int_{\Omega_K} \frac{h_K \|c\|_2}{18} \nabla \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{v}$$

в подсеточное уравнение при решении RFB методом позволило снизить амплитуду осцилляций и увеличить скорость сходимости.

Следует отметить, что приемлемые результаты при применении RFB метода удалось получить только при использовании в подсеточной задаче квазистационарной постановки, которая предполагает, что подсеточная функция  $\tilde{u}$  не зависит от времени и все производные по времени в уравнении (9) равны нулю.

В VMM-ASA исключение из (10) производной по времени от сеточного решения при вычислении подсеточной компоненты также привело к повышению точности.

На рисунке 2 представлены уровни погрешности численных решений в зависимости от среднего размера элемента расчетной сетки  $h_{avr}$ . В качестве эталонного было принято решение  $u_{ref}$ , полученное на сетке с  $h_{avr} = 1,34 \cdot 10^{-2}$ . Относительная погрешность вычислялась по формуле:

$$err = \frac{\int_0^T \int_{\Omega} (u^h - u_{ref}^h)^2}{\int_0^T \int_{\Omega} (u_{ref}^h)^2} \times 100 (\%).$$

Из графиков видно, что в зависимости от размера элемента  $h_{avr}$  рассматриваемые методы стабилизации имеют практически одинаковую скорость сходимости и точность. При выполнении расчетов с помощью VMM-ASA на самой грубой сетке с  $h_{avr} = 4,4 \cdot 10^{-2}$  относительная погрешность составляет:  $err = 0,33 \%$ , для RFB —  $err = 0,34 \%$ . Дальнейшее измельчение сетки, вплоть до  $h_{avr} = 2,3 \cdot 10^{-2}$ , приводит к резкому уменьшению значений до  $err = 0,036 \%$  и  $err = 0,041 \%$ , после чего сходимость обоих методов ухудшается.

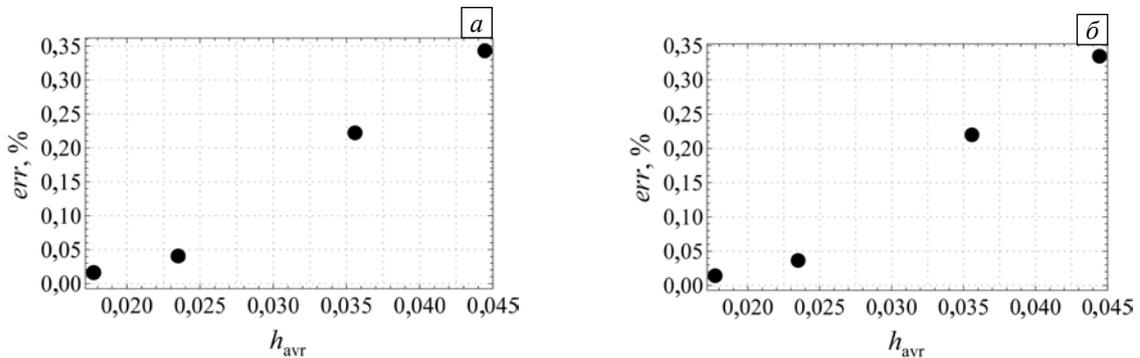


Рис. 2. Погрешности  $err$  численных решений, полученных VMM-ASA (а) и RFB методом (б), в зависимости от  $h_{avr}$  – среднего размера элемента расчетной сетки

Рисунок 3 содержит распределения сеточного решения  $u^h$  при  $t = 3 \cdot 10^{-3}$ , рассчитанного с помощью VMM-ASA, RFB метода и стандартной схемы Галёркина на сетке с  $h_{avr} = 2,3 \cdot 10^{-2}$ . Видно, что в решениях с использованием методов стабилизации осцилляции отсутствуют. Однако при применении RFB метода в окрестности первой точки резкого изменения характера решения наблюдается его необоснованный всплеск (см. кривую 3, Рис. 3з).

С увеличением параметра  $t$  сеточное решение  $u^h$  становится более гладким. Вблизи границы верхнего отверстия нефизических осцилляций и всплесков у решения не возникает ни при каком из используемых методов.

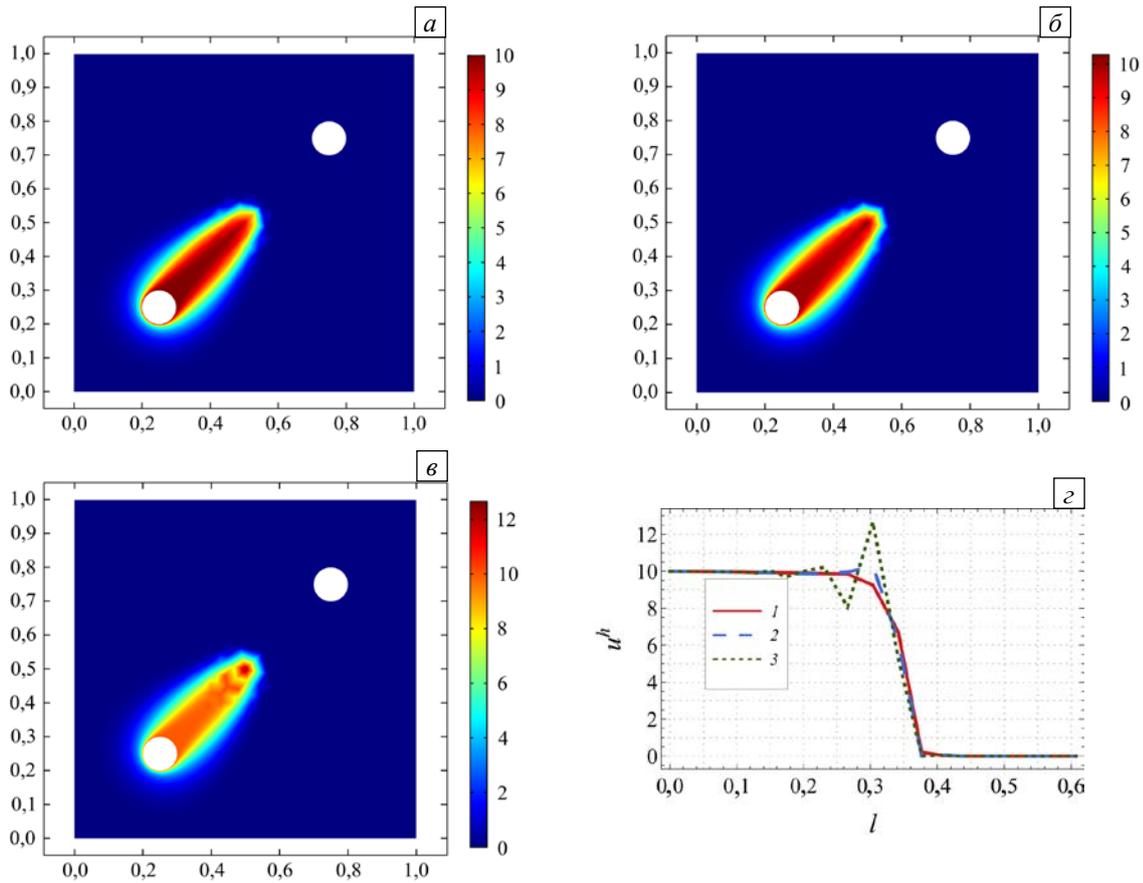
Решение уравнения конвекции–диффузии–реакции может быть охарактеризовано числом Пекле [33], сеточный аналог которого для нелинейного уравнения может быть определен следующим образом [25]:

$$Pe = \frac{\|c\|_2 h_K}{2\lambda}.$$

Для рассмотренного уравнения на расчетной сетке с  $h_{avr} = 2,3 \cdot 10^{-2}$  максимальное значение данной константы составляет 12. В случае увеличения в уравнении коэффициента диффузии  $\lambda$  до 20 сеточное решение  $u^h$ , найденное методом Галёркина, не содержит осцилляций. При этом число Пекле не превышает 3.

С целью исследования эффективности построенных методов проведено решение задачи с коэффициентом диффузии  $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$  на расчетной сетке с  $h_{avr} = 2,3 \cdot 10^{-2}$ . Ниже на рисунках представлены следующие распределения  $u^h$ :

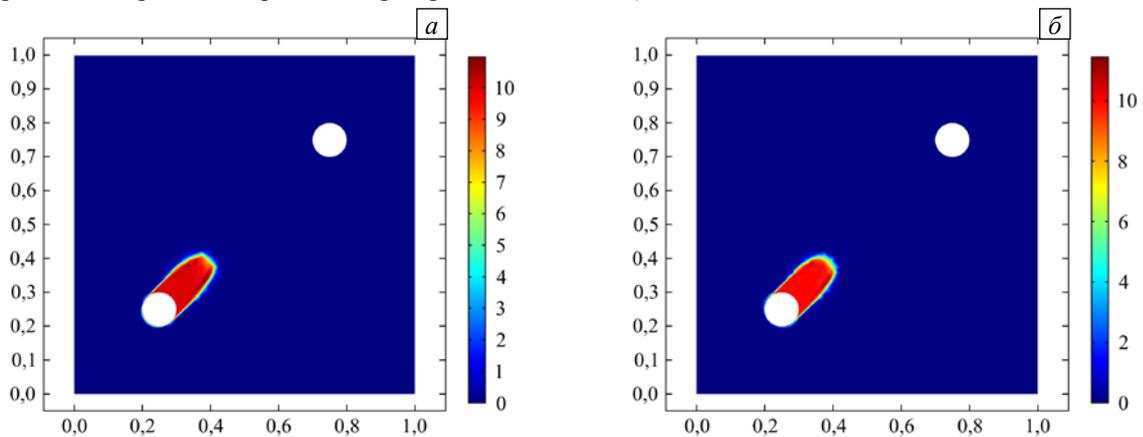
- в области  $\Omega$  при следующих значениях параметра  $t$ :  $1 \cdot 10^{-3}$ ;  $3 \cdot 10^{-3}$ ;  $5 \cdot 10^{-3}$ ;  $1 \cdot 10^{-2}$  (Рис. 4);
- по отрезку, соединяющему центры отверстий, при двух значениях параметра  $t$ :  $3 \cdot 10^{-3}$ ;  $5 \cdot 10^{-3}$  (Рис. 5).



**Рис. 3.** Распределения  $u^h$  при  $t = 3 \cdot 10^{-3}$  и  $\lambda = 6 \cdot 10^{-1}$  в области  $\Omega$  (а–в), полученные с использованием VMM-ASA (а), RFB метода (б), метода Галёркина (в) и по отрезку (г), соединяющему центры отверстий (кривая 1, VMM-ASA.), (2, RFB метод) и (3, метод Галёркина)

Максимальное значение числа Пекле составляет  $1,6 \cdot 10^6$ . В данном случае стандартный метод Галёркина расходится, и построить решение не удастся.

Исходя из представленных данных можно заключить, что оба метода дают приемлемые результаты, однако сеточное решение содержит всплески и не является монотонным. По распределениям  $u^h$  в области  $\Omega$  видно, что большая амплитуда всплесков наблюдается вдоль боковых границ фронта решения. Максимальное значение решения, рассчитанного VMM-ASA, не превышает 11, а решения на основе RFB метода — 11,5. На отрезке, соединяющем центры отверстий, передний край фронта второго решения является гладким (Рис. 5а). У решения RFB методом возникает всплеск вблизи границы верхнего отверстия (Рис. 5б), который не пропадает с увеличением параметра  $t$ . Использование VMM-ASA позволяет получить в окрестности этой точки гладкое решение. В остальной части области, примыкающей к границе отверстия, оба решения претерпевают всплеск (Рис. 4д–з).



**Рис. 4.** Распределения  $u^h$  в области  $\Omega$  при  $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$  и различном значении параметра  $t$ :  $1 \cdot 10^{-3}$  (а, б),  $3 \cdot 10^{-3}$  (в, д),  $5 \cdot 10^{-3}$  (д, е),  $1 \cdot 10^{-2}$  (ж, з), полученные VMM-ASA (а, в, д, ж) и RFB методом (б, в, е, з)

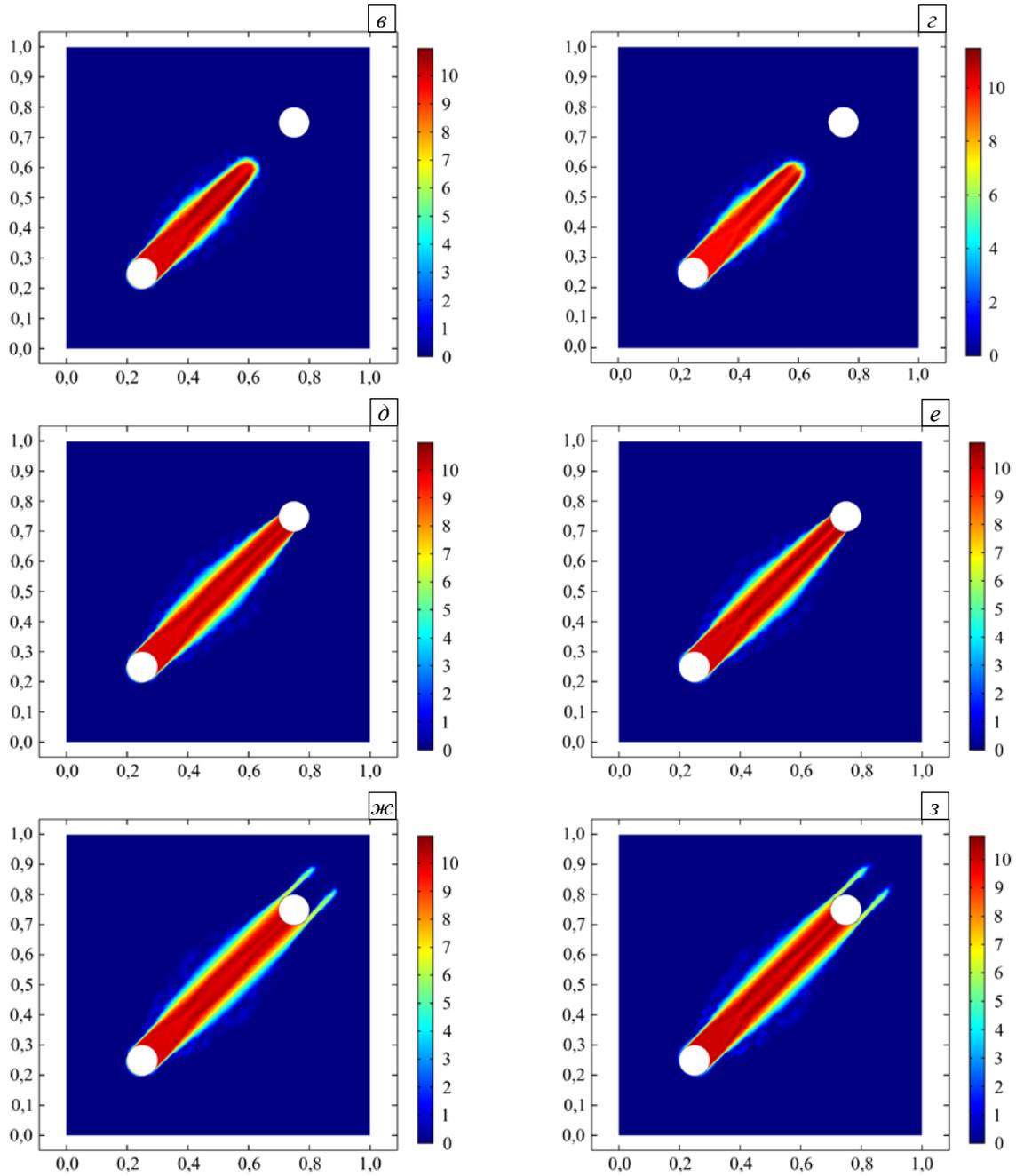


Рис. 4. Продолжение

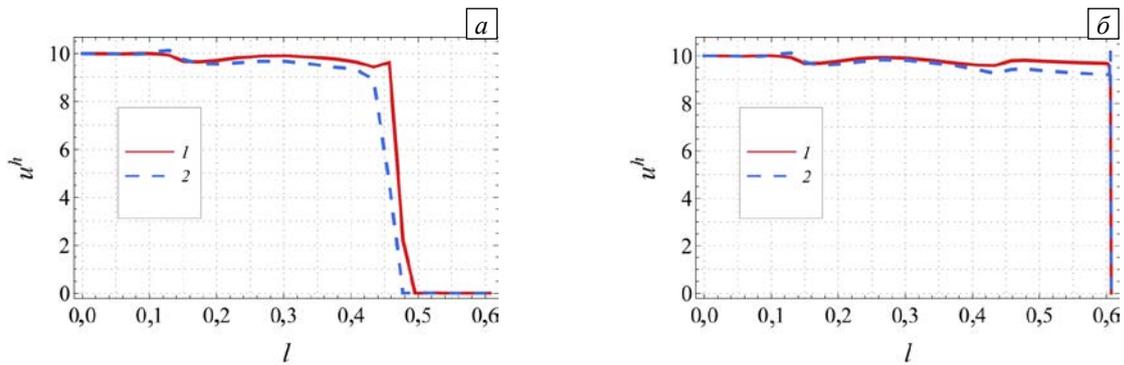


Рис. 5. Распределения  $u^h$  по отрезку, соединяющему центры отверстий, при  $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$ ,  $t = 3 \cdot 10^{-3}$  (а) и  $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$ ,  $t = 5 \cdot 10^{-3}$  (б), полученные VMM-ASA (кривая 1) и RFB методом (кривая 2).

Существенное преимущество VMM-ASA заключается в том, что при его применении время, необходимое для решения задачи, меньше, чем при RFB методе. Особенно это проявляется, когда в уравнение входит коэффициент диффузии  $\lambda = 6 \cdot 10^{-6}$ . В случае VMM-ASA время расчета составляет 2 минуты, тогда как для RFB метода оно превышает 1 час.

## 5. Заключение

Данная работа посвящена развитию и компьютерной реализации стабилизированных методов конечных элементов. Модифицированы VMM-ASA и RFB метод для численного решения двумерного нестационарного нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции. На основе многомасштабного разложения решения и последующей линеаризации слабой формулировки исходной задачи по подсеточной компоненте определены постановки сеточной и подсеточной задач. Компьютерная реализация стабилизированных методов выполнена в пакете Comsol Multiphysics®.

Эффективность разработанных модификаций VMM-ASA и RFB метода исследована на основе решения модельной задачи. При RFB методе приемлемые результаты удалось получить только при использовании для подсеточной задачи квазистационарной постановки. В VMM-ASA исключение временной производной от сеточного решения при вычислении подсеточной компоненты также повысило точность. Добавление искусственной диффузии к подсеточному уравнению в RFB методе привело к улучшению его стабилизирующих свойств. В свою очередь, с помощью SOLD стабилизации в VMM-ASA не удалось скорректировать возмущения сеточного решения, возникающие в местах его резкого изменения.

На основе результатов вычислительных экспериментов сделано заключение, что VMM-ASA и RFB метод имеют подобную скорость уменьшения погрешности сеточного решения в зависимости от размера элемента расчетной сетки. По сравнению со стандартным методом Галёркина данные методы позволяют уменьшить количество и амплитуду осцилляций в решении. При этом на этапе распространения сеточного решения от границы притока (границы с входным условием) к границе стока (границе с выходным условием) его погрешность во внутреннем слое при использовании RFB метода больше, чем при VMM-ASA. В случае больших значений числа Пекле, когда метод Галёркина не применим, стабилизированные методы дают возможность построить численное решение с достаточно малыми осцилляциями, амплитуда которых не превышает 5% от значения решения на границе притока. По сравнению с VMM-ASA RFB метод требует больших как вычислительных ресурсов, необходимых для введения дополнительных степеней свободы, связанных с пузырьковыми функциями, так и временных затрат на решение задачи. Вследствие этого для проведения практических расчетов более предпочтительным является VMM-ASA.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для молодых российских ученых (грант МК-4174.2018.1).

## Литература

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. 416 с.
2. Костина А.А., Желнин М.С., Плехов О.А. Исследование особенностей движения нефти в пористой среде в процессе парогравитационного дренажа // Вестник Пермского научного центра. 2018. № 3. С. 6-16. (English version [DOI](#))
3. Vilarrasa V., Olivella S., Carrera J., Rutqvist J. Long term impacts of cold CO<sub>2</sub> injection on the caprock integrity // Int. J. Greenh. Gas Con. 2014. Vol. 24. P. 1-13. [DOI](#)
4. Zhou M.M., Meschke G. A three-phase thermo-hydro-mechanical finite element model for freezing soils // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 2013. Vol. 37. P. 3173-3193. [DOI](#)
5. Vitel M., Rouabhi A., Tijani M., Guérin F. Thermo-hydraulic modeling of artificial ground freezing: Application to an underground mine in fractured sandstone // Computers and Geotechnics. 2016. Vol. 75. P. 80-92. [DOI](#)
6. Chen W., Tan X., Yu H., Wu G., Jia S. A fully coupled thermo-hydro-mechanical model for unsaturated porous media // JRMGE. 2009. Vol. 1. P. 31-40. [DOI](#)
7. Lin B., Chen S., Jin Y. Evaluation of reservoir deformation induced by water injection in SAGD wells considering formation anisotropy, heterogeneity and thermal effect // J. Petrol. Sci. Eng. 2017. Vol. 157. P. 767-779. [DOI](#)
8. Roos H.G., Stynes M., Tobiska L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: Convection-diffusion-reaction and flow problems. Springer, 2008. 628 p.
9. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1982. Vol. 32. P. 199-259. [DOI](#)
10. Hughes T.J.R., Mallet M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1986. Vol. 58. P. 305-328. [DOI](#)
11. Bochev P.B., Gunzburger M.D., Shadid J.N. Stability of the SUPG finite element method for transient advection–diffusion problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2004. Vol. 193. P. 2301-2323. [DOI](#)
12. Burman E. Consistent SUPG-method for transient transport problems: Stability and convergence // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2010. Vol. 199. P. 1114-1123. [DOI](#)
13. Сальников Н.Н., Сирик С.В. Построение весовых функций метода Петрова–Галёркина для уравнений конвекции–диффузии–реакции в трехмерном случае // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50. № 5. С. 173-183. (English version [DOI](#))

14. Hughes T.J.R., Franca L.P., Hulbert G.M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1989. Vol. 73. P. 173-189. [DOI](#)
15. Franca L.P., Frey S.L., Hughes T.J.R. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1992. Vol. 95. P. 253-276. [DOI](#)
16. Codina R. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1998. Vol. 156. P. 185-210. [DOI](#)
17. Xia K., Yao H. A Galerkin/least-square finite element formulation for nearly incompressible elasticity/stokes flow // *Appl. Math. Model.* 2007. Vol. 31. P. 513-529. [DOI](#)
18. Ranjan R., Feng Y., Chronopolous A.T. Augmented stabilized and Galerkin least squares formulations // *J. Math. Res.* 2016. Vol. 8. No. 6. P. 1-33. [DOI](#)
19. John V., Knobloch P. On the performance of SOLD methods for convection–diffusion problems with interior layers // *Int. J. Comput. Sci. Math.* 2007. Vol. 1. P. 245-258. [DOI](#)
20. John V., Knobloch P. On the choice of parameters in stabilization methods for convection–diffusion equations // *Numerical Mathematics and Advanced Applications / Ed. K. Kunisch, G. Of, O. Steinbach. Springer, 2008. P. 297-304. [DOI](#)*
21. John V., Schmeier E. Finite element methods for time-dependent convection–diffusion–reaction equations with small diffusion // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2008. Vol. 198. P. 475-494. [DOI](#)
22. Hughes T.J.R., Feijóo G.R., Mazzei L., Quincy J.-B. The variational multiscale method – a paradigm for computational mechanics // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1998. Vol. 166. P. 3-24. [DOI](#)
23. Brezzi F., Hauke G., Marini L.D., Sangalli G. Link-cutting bubbles for the stabilization of convection-diffusion-reaction problems // *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 2003. Vol. 13. P. 445-461. [DOI](#)
24. Brezzi F., Marini L.D., Russo A. On the choice of a stabilizing subgrid for convection–diffusion problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2005. Vol. 194. P. 127-148. [DOI](#)
25. Juanes R. A variational multiscale finite element method for multiphase flow in porous media // *Finite Elem. Anal. Des.* 2005. Vol. 41. P. 763-777. [DOI](#)
26. Hughes T.J.R., Sangalli G. Variational multiscale analysis: the fine-scale Green’s function, projection, optimization, localization, and stabilized methods // *SIAM J. Numer. Anal.* 2007. Vol. 45. P. 539-557. [DOI](#)
27. Modirkhazeni S.M., Trelles J.P. Algebraic approximation of sub-grid scales for the variational multiscale modeling of transport problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2016. Vol. 306. P. 276-298. [DOI](#)
28. Sendur A., Nesliturk A., Kaya A. Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of the convection–diffusion–reaction problems in 2D // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2014. Vol. 277. P. 154-179. [DOI](#)
29. Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. Метод конечных суперэлементов в задачах конвекции-диффузии: Препр. / ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2001. 17 с. (URL: [http://keldysh.ru/papers/2001/prep8/prep2001\\_8.pdf](http://keldysh.ru/papers/2001/prep8/prep2001_8.pdf))
30. Masud A., Calderer R. A variational multiscale method for incompressible turbulent flows: Bubble functions and fine scale fields // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2011. Vol. 200. P. 2577-2593. [DOI](#)
31. Coley C., Evans J.A. Variational multiscale modeling with discontinuous subscales: analysis and application to scalar transport // *Meccanica.* 2018. Vol. 53. P. 1241-1269. [DOI](#)
32. Do Carmo E.G.D., Alvarez G.B. A new upwind function in stabilized finite element formulations, using linear and quadratic elements for scalar convection–diffusion problems // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2004. Vol. 193. P. 2383-2402. [DOI](#)
33. Hauke G. A simple subgrid scale stabilized method for the advection–diffusion-reaction equation // *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2002. Vol. 191. P. 2925-2947. [DOI](#)
34. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
35. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 351 с.
36. Comsol Multiphysics 5.4. Reference Manual. 2018. 1622 p.

## References

1. Aziz Kh., Settari A. *Petroleum reservoir simulation*. London, Applied Science Publishers Ltd., 1979. 476 p.
2. Kostina A.A., Zhelnin M.S., Plekhov O.A. Study of oil filtration in porous media under the steam-assisted gravity drainage process. *Vestnik Permskogo nauchnogo tsentra – Perm Scientific Center Journal*, 2018, no. 3, pp. 6-16. [DOI](#)
3. Vilarrasa V., Olivella S., Carrera J., Rutqvist J. Long term impacts of cold CO<sub>2</sub> injection on the caprock integrity. *Int. J. Greenh. Gas Con.*, 2014, vol. 24, pp. 1-13. [DOI](#)
4. Zhou M.M., Meschke G. A three-phase thermo-hydro-mechanical finite element model for freezing soils. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 2013, vol. 37, pp. 3173-3193. [DOI](#)
5. Vitel M., Rouabhi A., Tijani M., Guérin F. Thermo-hydraulic modeling of artificial ground freezing: Application to an underground mine in fractured sandstone. *Computers and Geotechnics*, 2016, vol. 75, pp. 80-92. [DOI](#)
6. Chen W., Tan X., Yu H., Wu G., Jia S. A fully coupled thermo-hydro-mechanical model for unsaturated porous media. *JRMGE*, 2009, vol. 1, pp. 31-40. [DOI](#)
7. Lin B., Chen S., Jin Y. Evaluation of reservoir deformation induced by water injection in SAGD wells considering formation anisotropy, heterogeneity and thermal effect. *J. Petrol. Sci. Eng.*, 2017, vol. 157, pp. 767-779. [DOI](#)
8. Roos H.G., Stynes M., Tobiska L. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: Convection-diffusion-reaction and flow problems*. Springer, 2008. 628 p.
9. Brooks A.N., Hughes T.J.R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1982, vol. 32, pp. 199-259. [DOI](#)

10. Hughes T.J.R., Mallet M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: III. The generalized streamline operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1986, vol. 58, pp. 305-328. [DOI](#)
11. Bochev P.B., Gunzburger M.D., Shadid J.N. Stability of the SUPG finite element method for transient advection–diffusion problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2004, vol. 193, pp. 2301-2323. [DOI](#)
12. Burman E. Consistent SUPG-method for transient transport problems: Stability and convergence. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2010, vol. 199, pp. 1114-1123. [DOI](#)
13. Salnikov N.N., Siryk S.V. Construction of weight functions of the Petrov–Galerkin method for convection–diffusion–reaction equations in the three-dimensional case. *Cybern. Syst. Anal.*, 2014, vol. 50, pp. 805-814. [DOI](#)
14. Hughes T.J.R., Franca L.P., Hulbert G.M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin-least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1989, vol. 73, pp. 173-189. [DOI](#)
15. Franca L.P., Frey S.L., Hughes T.J.R. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1992, vol. 95, pp. 253-276. [DOI](#)
16. Codina R. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1998, vol. 156, pp. 185-210. [DOI](#)
17. Xia K., Yao H. A Galerkin/least-square finite element formulation for nearly incompressible elasticity/stokes flow. *Appl. Math. Model.*, 2007, vol. 31, pp. 513-529. [DOI](#)
18. Ranjan R., Feng Y., Chronopolous A.T. Augmented stabilized and Galerkin least squares formulations. *J. Math. Res.*, 2016, vol. 8, no. 6, pp. 1-33. [DOI](#)
19. John V., Knobloch P. On the performance of SOLD methods for convection–diffusion problems with interior layers. *Int. J. Comput. Sci. Math.*, 2007, vol. 1, pp. 245-258. [DOI](#)
20. John V., Knobloch P. On the choice of parameters in stabilization methods for convection–diffusion equations. *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, ed. K. Kunisch, G. Of, O. Steinbach. Springer, 2008. P. 297-304. [DOI](#)
21. John V., Schmeier E. Finite element methods for time-dependent convection–diffusion–reaction equations with small diffusion. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2008, vol. 198, pp. 475-494. [DOI](#)
22. Hughes T.J.R., Feijóo G.R., Mazzei L., Quincy J.-B. The variational multiscale method – a paradigm for computational mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 1998, vol. 166, pp. 3-24. [DOI](#)
23. Brezzi F., Hauke G., Marini L.D., Sangalli G. Link-cutting bubbles for the stabilization of convection-diffusion-reaction problems. *Math. Model. Meth. Appl. Sci.*, 2003, vol. 13, pp. 445-461. [DOI](#)
24. Brezzi F., Marini L.D., Russo A. On the choice of a stabilizing subgrid for convection–diffusion problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2005, vol. 194, pp. 127-148. [DOI](#)
25. Juanes R. A variational multiscale finite element method for multiphase flow in porous media. *Finite Elem. Anal. Des.*, 2005, vol. 41, pp. 763-777. [DOI](#)
26. Hughes T.J.R., Sangalli G. Variational multiscale analysis: the fine-scale Green’s function, projection, optimization, localization, and stabilized methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2007, vol. 45, pp. 539-557. [DOI](#)
27. Modirkhazeni S.M., Trelles J.P. Algebraic approximation of sub-grid scales for the variational multiscale modeling of transport problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2016, vol. 306, pp. 276-298. [DOI](#)
28. Sendur A., Nesliturk A., Kaya A. Applications of the pseudo residual-free bubbles to the stabilization of the convection–diffusion–reaction problems in 2D. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2014, vol. 277, pp. 154-179. [DOI](#)
29. Zhukov V.T., Novikova N.D., Strakhovskaya L.G., Fedorenko R.P., Feodoritova O.B. Metod konechnykh super-elementov v zadachakh konveksii-diffuzii [Finite superelement method in convection-diffusion problems]. Preprint, Keldysh Institute of Applied Mechanics. Moscow, 2001. 17 p. (URL: [http://keldysh.ru/papers/2001/prep8/prep2001\\_8.pdf](http://keldysh.ru/papers/2001/prep8/prep2001_8.pdf))
30. Masud A., Calderer R. A variational multiscale method for incompressible turbulent flows: Bubble functions and fine scale fields. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2011, vol. 200, pp. 2577-2593. [DOI](#)
31. Coley C., Evans J.A. Variational multiscale modeling with discontinuous subscales: analysis and application to scalar transport. *Meccanica*, 2018, vol. 53, pp. 1241-1269. [DOI](#)
32. Do Carmo E.G.D., Alvarez G.B. A new upwind function in stabilized finite element formulations, using linear and quadratic elements for scalar convection–diffusion problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2004, vol. 193, pp. 2383-2402. [DOI](#)
33. Hauke G. A simple subgrid scale stabilized method for the advection–diffusion-reaction equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2002, vol. 191, pp. 2925-2947. [DOI](#)
34. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and quasi-linear parabolic differential equations]. Moscow, Nauka, 1967. 736 p.
35. Strang G., Fix G.J. *An analysis of the finite element method*. New Jersey/Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1973. 306 p.
36. Comsol Multiphysics 5.4. Reference Manual, 2018, 1622 p.

Поступила в редакцию 11.04.2019; после доработки 15.05.2019; принята к опубликованию 20.05.2019

---

Сведения об авторах

Желнин Максим Сергеевич, асп., мнс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614018, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: zhelnin.m@icmm.ru.; ORCID: 0000-0003-4498-450X

Костина Анастасия Андреевна, кфмн, мнс, ИМСС УрО РАН; e-mail: kostina@icmm.ru.; ORCID: 0000-0002-5721-3301

Плехов Олег Анатольевич, дфмн, зам.директора, ИМСС УрО РАН; e-mail: poa@icmm.ru.; ORCID: 0000-0002-0378-8249