

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.2.11](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.2.11)

УДК 532.542,532.135

СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗАПОЛНЕНИИ КРУГЛОЙ ТРУБЫ / ПЛОСКОГО КАНАЛА

Е.И. Борзенко, Г.Р. Шрагер

Томский государственный университет, Томск, Российская Федерация

Исследуется течение вязкопластичной жидкости, реализующееся при заполнении круглой трубы/плоского канала в поле силы тяжести с заданным расходом во входном сечении. Сформулирована математическая постановка задачи на основе полных уравнений движения и неразрывности, естественных граничных условий на свободной поверхности и условия прилипания на твердой стенке. Реологическое поведение среды описывается законом Шведова–Бингама, который предполагает наличие в потоке зон квазитвердого движения в областях с малыми скоростями деформаций. Численное решение задачи основано на конечно-разностном подходе, включающем метод контрольного объема и алгоритм SIMPLE (для вычисления полей скорости и давления во внутренних узлах разнесенной сетки) и метод инвариантов (для удовлетворения граничных условий на свободной поверхности). Для осуществления сквозного расчета потока с квазитвердыми ядрами используется регуляризация реологического уравнения. Проанализировано, как основные параметры задачи влияют на поведение свободной границы, структуры и характеристик потока. Обнаружено, что с течением времени первоначально плоская свободная граница приобретает установившуюся выпуклую форму и в таком виде перемещается вдоль трубы/канала со среднерасходной скоростью. В области течения выделены зоны фонтанирующего движения в окрестности свободной границы и одномерного движения вдали от нее. Продемонстрированы характерные структуры течения с различным количеством и местоположением в потоке квазитвердых ядер. Построены топограммы этих структур в зависимости от соотношения сил вязкости, тяжести и пластичности в потоке жидкости. Показаны случаи связанности стабильного и неустойчивого поведения формы свободной границы со значениями определяющих параметров.

Ключевые слова: канал, труба, вязкопластичная жидкость, свободная поверхность, заполнение, численный метод, фонтанирующее течение, режим, квазитвердые ядра

THE STRUCTURE OF VISCOPLASTIC FLUID FLOW DURING FILLING OF A CIRCULAR PIPE / PLANE CHANNEL

E.I. Borzenko and G.R. Shrager

Tomsk State University, Tomsk, Russian Federation

The investigation of a viscoplastic fluid flow initiated in a circular pipe/plane channel during its filling in the gravity field at the flow rate specified at the inlet section is carried out. A mathematical formulation of the problem is developed using complete equations of motion, continuity equation, natural boundary conditions on the free surface, and no-slip boundary conditions on the solid wall. The rheological behavior of the medium is described by the Shvedov-Bingham law, which implies the existence of zones with quasi-solid motion (unyielded zones) in the regions of low strain rate. The numerical solution of the problem is based on the finite-difference approach with an application of the finite volume method and SIMPLE algorithm for calculating velocity and pressure fields at the internal nodes of a staggered grid. The method of invariants is used to satisfy the boundary conditions on the free surface. To provide a through computation of the flow with unyielded regions, a regularization of the rheological equation is implemented. The investigation of the free boundary behavior, flow structure, and flow characteristics as a function of the main parameters is carried out. It was found that in the course of time the initially flat free boundary assumes a stationary convex shape, which remains invariant moving through the pipe/channel at an average velocity. In the flow near and far away from the free boundary one can distinguish the fountain flow zones and the one-dimensional flow regions, respectively. The typical flow structures with different number and various locations of unyielded regions in the flow are shown. The topograms of the above mentioned flow structures are plotted as a function of the ratio of viscous and gravity forces and plasticity in the fluid flow. The stable and unstable behavior of the free boundary shape is shown to be related to the values of the constitutive parameters.

Key words: channel, pipe, viscoplastic fluid, free surface, filling, fountain flow, regime, unyielded regions

1. Введение

Течения неньютоновских жидкостей со свободной границей реализуются во многих отраслях промышленности. В частности, заполнение плоских каналов и круглых труб является составной частью технологии формования изделий из полимерных материалов методом литья под давлением. Реология полимерных композиций в текучем состоянии связана с условиями переработки и может меняться от ньютоновской до проявления свойств, характерных для нелинейновязких и вязкоупругих жидкостей. Для описания реологического поведения расплавов полимеров широкое распространение получил закон Шведова–Бингама [1].

К настоящему моменту выполнено большое количество исследований, рассматривающих заполнение плоских и осесимметричных емкостей в приближении ньютоновского поведения жидкости, в том числе с учетом диссипативного разогрева и зависимости вязкости от температуры [2–8]. Процессам заполнения каналов неньютоновской жидкостью посвящены работы [9–16], в которых обсуждается кинематика

течений неньютоновских жидкостей, однако представлены весьма скудные сведения о структуре потока для вязкопластичных сред и не приводится информация о ее связи со значениями реологических параметров.

Целью данной работы является исследование влияния пластичных свойств жидкой среды на формирование структуры потока при заполнении плоского канала/круглой трубы на основе реологического уравнения Шведова–Бингама.

2. Постановка задачи

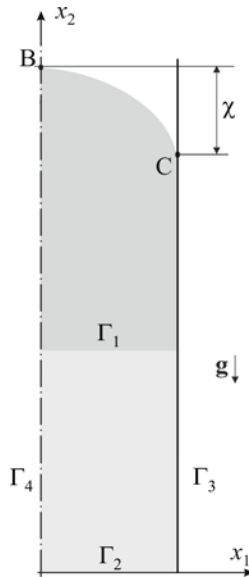


Рис. 1. Область течения

Рассматривается заполнение круглой трубы/плоского канала вязкопластичной жидкостью Шведова–Бингама. Считается, что эффект вязкой диссипации мал, и течение реализуется в изотермическом режиме [17]. В момент времени $t = 0$ жидкость занимает лишь часть канала, свободная граница жидкости Γ_1 имеет плоскую форму (Рис. 1) и, для исключения влияния на характер течения в окрестности входной границы, расположена на достаточном удалении от противоположной границы Γ_2 . На границе Γ_2 задан профиль скорости, соответствующий стационарному течению жидкости Шведова–Бингама в канале/трубе с известным постоянным расходом. На твердой стенке Γ_3 имеет место прилипание, на линии Γ_4 — симметрия потока. На свободной границе выполняются условия отсутствия касательного напряжения и равенство нормального напряжения внешнему давлению. Капиллярные эффекты не учитываются, а внешнее давление равно нулю. Движение свободной границы описывается кинематическим условием.

В математическую постановку задачи входят уравнения движения и неразрывности, которые в безразмерной форме записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \alpha \eta \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u}{x_1} \right), \\ \operatorname{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \alpha \frac{\eta}{x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} - W, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \alpha \frac{u}{x_1} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь: t — время; u, v — проекции вектора скорости на оси координат x_1, x_2 ; p — давление; η — эффективная вязкость; параметр α отвечает за геометрию канала и используемую систему координат ($\alpha = 0$ соответствует плоскому каналу и декартовой системе, $\alpha = 1$ — круглой трубе и цилиндрической системе). В постановку задачи входят безразмерные критерии: число Рейнольдса $\operatorname{Re} = \rho L U / \mu$; параметр $W = (\rho L^2 g) / (\mu U)$, характеризующий соотношение гравитационных и вязких сил в потоке. В качестве масштабов выбираются величины: для длины L — полуширина канала (при $\alpha = 0$) или радиус трубы (при $\alpha = 1$); для скорости U — среднерасходная скорость во входном сечении; для времени — L/U ; для давления — комплекс $\mu U / L$, где ρ — плотность жидкости, g — модуль вектора ускорения свободного падения.

Систему (1) замыкает реологическое соотношение Шведова–Бингама с эффективной вязкостью, определяемой формулой

$$\eta = (Bn + A) / A,$$

где A — интенсивность тензора скоростей деформации, $Bn = (\tau_0 L) / (\mu U)$ — число Бингама, μ, τ_0 — реологические параметры.

Граничные условия записываются в виде:

$$\Gamma_1: \quad \frac{\partial u_n}{\partial s} + \frac{\partial u_s}{\partial n} + \alpha \frac{u}{x_1} = 0, \quad p = 2\eta \frac{\partial u_n}{\partial n}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 : \quad u = 0, \quad v = V(x_1); \\ \Gamma_3 : \quad u = 0, \quad v = 0; \\ \Gamma_4 : \quad u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где u_n, u_s — нормальная и касательная составляющие скорости на свободной поверхности, $V(x_1)$ — профиль скорости полностью развитого течения в плоском канале или круглой трубе с заданным постоянным расходом. Условия на границе Γ_1 (см. (2)) записаны в локальной декартовой системе координат (n, s) , нормально связанной со свободной поверхностью. Движение свободной границы описывается кинематическими условиями в лагранжевом представлении:

$$\frac{dx_1}{dt} = u, \quad \frac{dx_2}{dt} = v.$$

Функция $V(x_1)$ в (3) является решением стационарной задачи течения вязкопластичной жидкости в бесконечном канале/трубе под действием градиента давления δp , обеспечивающего единичный расход, и имеет следующий вид:

$$V(x_1) = \begin{cases} v_0, & 0 \leq x_1 \leq h, \\ v_0 \left[1 - \left(\frac{x_1 - h}{1 - h} \right)^2 \right], & h < x_1 \leq 1, \end{cases}$$

где $h = -(1 + \alpha)Bn/\delta p$ — координата границы квазитвердого ядра, в котором значение скорости v_0 постоянно и вычисляется по формуле:

$$v_0 = -\frac{\delta p}{2(1 + \alpha)}(1 - h)^2.$$

Величина перепада давления δp находится из условия равенства единице безразмерного расхода через единицу площади и в случае плоского канала ($\alpha = 0$) определяется выражением:

$$\delta p = -(Bn + 2) \left\{ \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(1 - 2 \left(\frac{Bn}{Bn + 2} \right)^3 \right) \right] + 0,5 \right\},$$

а в случае круглой трубы ($\alpha = 1$)

$$\delta p = -\sqrt{\frac{4}{3}Bn^2 \operatorname{ch}(\phi) + \frac{4}{9}(Bn + 3)^2} - 2\sqrt{A^2 + B^2} \cos\left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{B}{A}\right) - \frac{2(Bn + 3)}{3},$$

где $\phi = \frac{1}{3} \operatorname{Arch} \left(\frac{Bn + 3}{Bn} \right)^2$, $A = -\frac{2}{3}Bn^2 \operatorname{ch}(\phi) + \frac{4}{9}(Bn + 3)^2$, $B = \frac{2}{\sqrt{3}}Bn^2 \operatorname{sh}(\phi)$.

3. Метод решения

Сформулированная задача решалась численно. В области решения строилась разностная сетка, на которой с помощью метода контрольного объема и алгоритма SIMPLE выполнялся расчет искомых переменных во внутренних узлах [18] и которая названа разнесенной. В нерегулярных узлах в окрестности свободной границы значения скорости и давления находились путем линейной интерполяции с привлечением данных со свободной поверхности и из регулярных узлов.

Свободная поверхность на дискретном уровне представлялась набором маркеров. Расчет составляющих скорости на свободной границе выполнялся с помощью метода инвариантов [19], основанного на совместной записи уравнения неразрывности и условия отсутствия касательных напряжений. Давление на свободной границе определялось из разностного аналога условия равенства нормального напряжения внешнему

давлению. Эволюция фронта свободной поверхности вычислялась в соответствии с разностным аналогом кинематического условия по схеме Эйлера. Движение маркера, расположенного на линии трехфазного контакта, осуществляется с учетом проскальзывания и равенства динамического краевого угла π [20].

Течение вязкопластичной жидкости характеризуется образованием квазитвердых ядер в потоке, в которых уровень напряжений ниже предела текучести, а значение эффективной вязкости стремится к бесконечности. Для организации сквозного счета в случае потока вязкопластичной среды без явного выделения зон квазитвердого движения необходима регуляризация реологической модели, позволяющая ограничить значения вязкости в ядрах. В настоящей работе применяется подход, предложенный в [21]. Согласно ему вязкость вычисляется по формуле:

$$\eta = \frac{Bn + (A^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}{(A^2 + \varepsilon^2)^{1/2}},$$

где ε — параметр регуляризации, а при исследовании процесса возникновения и эволюции квазитвердых ядер в потоке в качестве условия их выделения используется неравенство $\eta A \leq Bn$, которое является безразмерным аналогом условия малости скоростей деформаций или критерием Мизеса для напряжений.

4. Результаты расчетов

Изучение процесса заполнения плоского канала и круглой трубы вязкопластичной средой с заданным постоянным расходом во входном сечении показывает, что с течением времени первоначально плоская свободная поверхность становится выпуклой и далее перемещается по каналу со среднерасходной скоростью. Этот факт иллюстрирует рисунок 2, на котором представлены положения свободной границы с шагом по времени, равным одной безразмерной единице. Для описания формы свободной границы вводится параметр χ , показывающий расстояние между точками В и С вдоль оси x_2 (см. Рис. 1).

Распределения характеристик течения в момент времени $t = 5,5$ представлены на рисунке 3 для плоского канала. В окрестности свободной границы (Рис. 3а, б) можно выделить зону двумерного течения и в остальной части потока — зону одномерного течения.

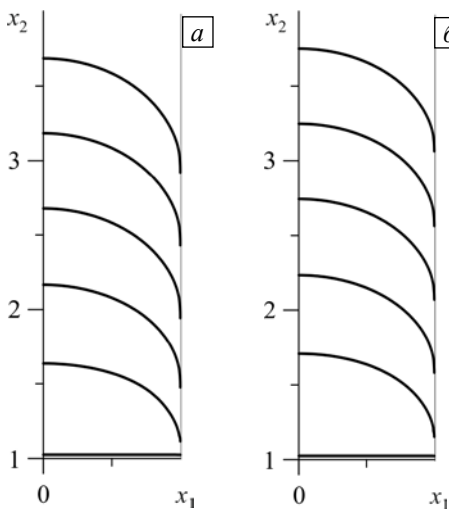


Рис. 2. Эволюция формы свободной поверхности с течением времени при $Re = 0,01$, $W = 5$, $Bn = 2$ в канале ($\alpha = 0$) (а) и в круглой трубе ($\alpha = 1$) (б)

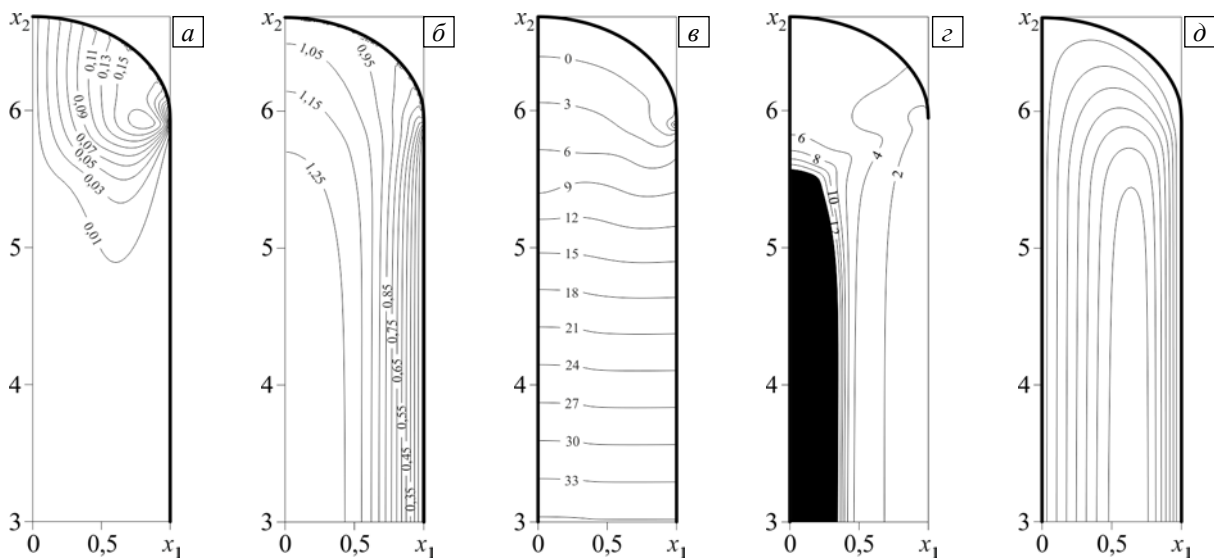


Рис. 3. Распределение характеристик потока в канале ($\alpha = 0$) при $Re = 0,01$, $W = 5$, $Bn = 2$: u (а), v (б), p (в), η (г), линии тока (д)

На рисунке 3г приведено распределение эффективной вязкости, при этом заливкой отмечена область квазитвердого ядра. На рисунке 3д показаны линии тока в системе координат, движущейся вверх со среднерасходной скоростью. Видно, что кинематика потока в зоне двумерного течения имеет фонтанирующий характер. Впервые термин «фонтанирующее течение» использован в работе [22] для описания потока вблизи границы раздела фаз для случая, когда в капилляре одна жидкость вытесняет другую.

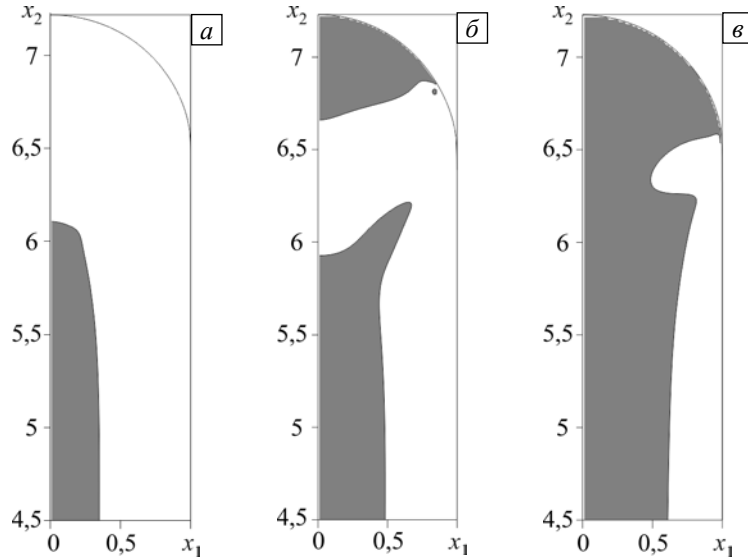


Рис. 4. Структура потока при $\alpha = 0$, $W = 5$ и различных значениях числа Бингама Bn : 2 (а), 4 (б), 8 (в)

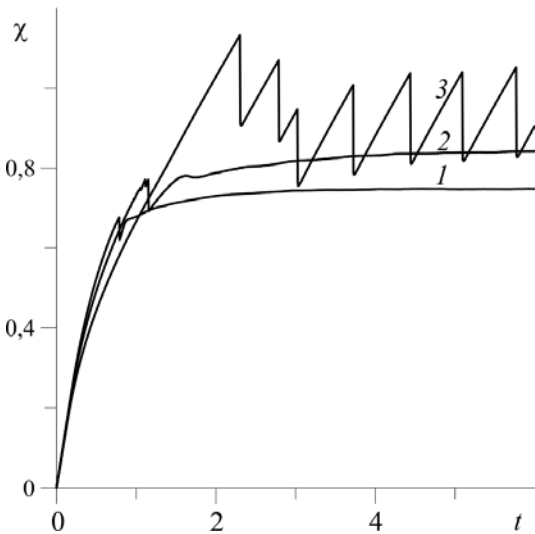


Рис. 5. Зависимость $\chi(t)$ при $\alpha = 0$, $W = 5$ и различных значениях числа Бингама Bn : 2 (кривая 1), 4 (2), 8 (3)

В ходе параметрических исследований течения при заполнении канала выявлены три характерных структуры потока, которые представлены на рисунке 4. Структуры отличаются количеством и местоположением квазитвердых ядер. Первая структура имеет одно квазитвердое ядро в окрестности линии симметрии (Рис. 4а). На рисунке 4б показана вторая структура потока с двумя ядрами. Одно из них формируется около линии симметрии, на удалении от свободной поверхности, второе примыкает к свободной поверхности. С увеличением числа Bn эти ядра объединяются и образуют третью типичную структуру потока (Рис. 4в). Аналогичные структуры потока наблюдаются в случае заполнения круглой трубы.

Характер установления формы свободной поверхности со временем для структур потока, показанных на рисунке 4, представлен на рисунке 5. В структуре потока на рисунке 4в квазитвердое ядро захватывает всю площадь свободной границы — от линии симметрии

до твердой стенки, что приводит к образованию квазитвердой «пробки». Несовместимость условия прилипания на твердой стенке и «пробкового» режима течения приводит к неустойчивому заполнению, что демонстрируется поведением параметра $\chi(t)$ (см. кривую 3, Рис. 5).

В статье [15] представлены две структуры течения с одним и двумя квазитвердыми ядрами. Рисунок 6 дает возможность сравнить полученные там результаты с данными расчетов авторов настоящей работы. Как видно, имеет место их хорошее согласование: расхождение в ширине ядра в области одномерного течения не превышает 4% ширины канала.

Описанные выше режимы течения определяются значением предела текучести и относительным влиянием вязких и гравитационных сил в потоке, то есть параметрами W и Bn . Рисунок 7 демонстрирует топограммы выделенных структур потоков для плоского канала и круглой трубы, где режимы заполнения

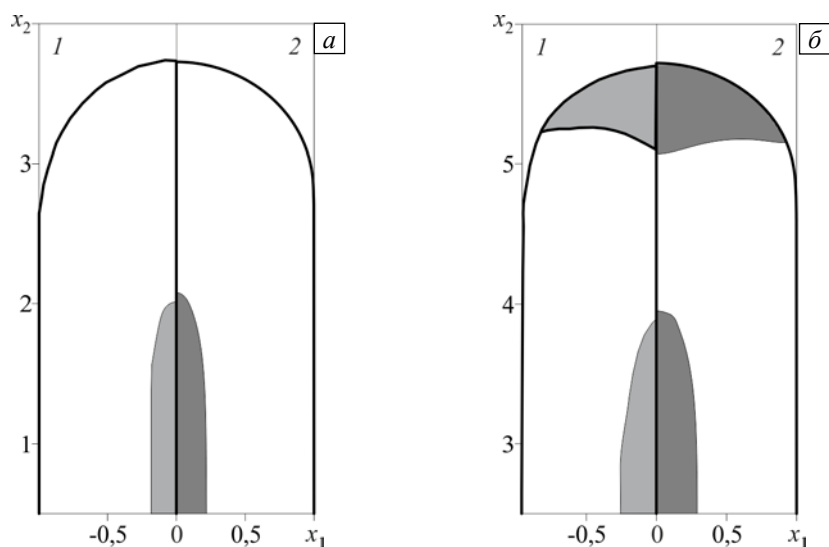


Рис. 6. Топограммы структур потока (данные из [15] – 1, результаты настоящей работы – 2) при $\alpha=0$, $W=5$ и двух значениях числа Бингама Bn : 1 (а); 1,5 (б)

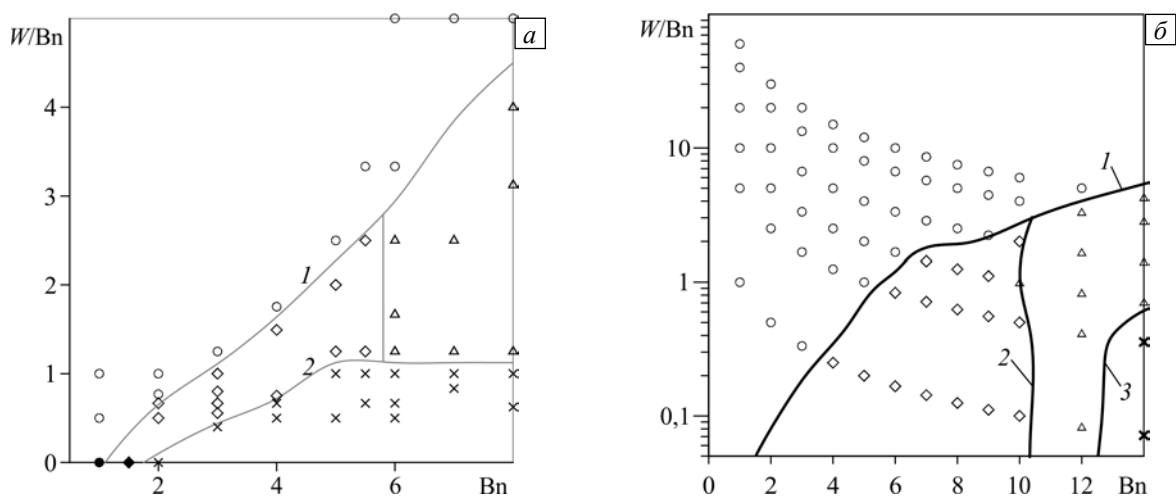


Рис. 7. Распределение структур потока в канале ($\alpha=0$) (а) и трубе ($\alpha=1$) (б); \circ – одно ядро, \diamond – два ядра, Δ – объединенное ядро, \times – неустойчивое заполнение

идентифицируются по значениям из области в координатах W/Bn и Bn . Отношение W/Bn характеризует вклад силы тяжести и пластичности в формирование структуры потока. В области выше кривой 1 структура потока имеет одно ядро, ниже кривой 3 она отвечает нестабильному заполнению. В области, ограниченной линиями 1 и 3, слева от линии 2 течению присущи два ядра, справа — объединенное ядро.

4. Заключение

Сформулирована математическая постановка задачи о заполнении плоского канала/круглой трубы вязкопластичной жидкостью Шведова–Бингама в поле силы тяжести. Разработана численная методика решения на основе регуляризованного реологического соотношения, которое исключает сингулярность значений вязкости в областях с уровнем напряжения меньше предела текучести. Выявлены характерные структуры потока, отличающиеся количеством и местоположением квазитвердых ядер. Построены топограммы этих структур в зависимости от значений определяющих параметров W/Bn и Bn .

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 18-19-00021).

Литература

1. Янков В.И., Боярченко В.И., Первадчук В.П., Глот И.О., Шакиров Н.В. Переработка волокнообразующих полимеров. Основы реологии полимеров и течение полимеров в каналах. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 264 с.

2. Coyle D.J., Blake J.W., Macosco C.W. The kinematics of fountain flow in mold-filling // *AICHE J.* 1987. Vol. 33. P. 1168-1177. [DOI](#)
3. Mitsoulis E. Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters // *AICHE J.* 2010. Vol. 56. P. 1147-1162. [DOI](#)
4. Борзенко Е.И., Фролов О.Ю., Шрагер Г.Р. Фонтанирующее течение вязкой жидкости при заполнении канала с учетом диссипативного разогрева // *Изв. РАН. МЖГ.* 2014. Т. 49, № 1. С. 45-55. (English version [DOI](#))
5. Hassan H., Regnier N., Pujos C., Defaye G. Effect of viscous dissipation on the temperature of the polymer during injection molding filling // *Polymer. Eng. Sci.* 2008. Vol. 48. P. 1199-1206. [DOI](#)
6. Баранов А.В. Неизотермическое течение реологически сложных сред в условиях химических превращений // *МКМК.* 2010. Т. 16, № 3. С. 384-399.
7. Nguyen-Chung T., Mennig G. Non-isothermal transient flow and molecular orientation during injection mold filling // *Rheol. Acta.* 2001. Vol. 40. P. 67-73. [DOI](#)
8. El Otmani R., Zinet M., Boutaous M., Benhadid H. Numerical simulation and thermal analysis of the filling stage in injection molding process: Role of the mold-polymer interface // *J. Appl. Polym. Sci.* 2011. Vol. 121. P. 1579-1592. [DOI](#)
9. Wang W., Li X., Han X. Numerical simulation and experimental verification of the filling stage in injection molding // *Polymer. Eng. Sci.* 2012. Vol. 52. P. 42-51. [DOI](#)
10. Kamal M.R., Goyal S.K., Chu E. Simulation of injection mold filling of viscoelastic polymer with fountain flow // *AICHE J.* 1988. Vol. 34. P. 94-106. [DOI](#)
11. Булгаков В.К., Липанов А.М., Чехонин К.А. Заполнение области между вертикальными коаксиальными цилиндрами аномально-вязкой жидкостью в неизотермических условиях // *ИФЖ.* 1989. Т. 57, № 4. С. 577-583. (English version [DOI](#))
12. Липанов А.М., Альес М.Ю., Константинов Ю.Н. Численное моделирование ползущих течений неньютоновских жидкостей со свободной поверхностью // *Матем. моделирование.* 1993. Т. 5, № 7. С. 3-9.
13. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Заполнение каналов неньютоновской жидкостью в поле силы тяжести // *Изв. РАН. МЖГ.* 2009. Т. 44, № 6. С. 40-46. (English version [DOI](#))
14. Mavridis H., Nrytak A.N., Vlachopoulos J. Finite element simulation of fountain flow in injection molding // *Polymer. Eng. Sci.* 1986. Vol. 26. P. 449-454. [DOI](#)
15. Gogos C.G., Huang Ch.-F., Schmidt L.R. The process of cavity filling including the fountain flow in injection molding // *Polymer. Eng. Sci.* 1986. Vol. 26. P. 1457-1466. [DOI](#)
16. Mitsoulis E. Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics.* 2010. Vol. 165. P. 45-55. [DOI](#)
17. Глушков И.А., Банзула Ю.Б. Моделирование структурно-реологических свойств дисперсных систем. М.: Угрешская типография, 2009. 299 с.
18. Patankar S. Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Taylor & Francis, 1980. 197 p.
19. Васенин И.М., Сидонский О.Б., Шрагер Г.Р. Численное решение задачи о движении вязкой жидкости со свободной поверхностью // *ДАН СССР.* 1974. Т. 217, № 2. С. 295-298.
20. Борзенко Е.И., Шрагер Г.Р. Влияние вида граничных условий на линии трехфазного контакта на характеристики течения при заполнении канала // *ПМТФ.* 2015. Т. 56, № 2. С. 3-14. [DOI](#)
21. Bercovier M., Engelman M.A. Finite-element method for incompressible non-Newtonian flows // *J. Comput. Phys.* 1980. Vol. 36. P. 313-326. [DOI](#)
22. Rose W. Fluid-fluid interfaces in steady motion // *Nature.* 1961. Vol. 191. P. 242-243. [DOI](#)

References

1. Yankov V.I., Boyarchenko V.I., Pervadchuk V.P., Glot I.O., Shakirov N.V. *Pererabotka voloknoobrazuyushchikh polimerov. Osnovy reologii polimerov i techeniye polimerov v kanalakh* [Recycling fiber-forming polymers. Basics of polymer rheology and flow of polymers in channels]. Moscow-Izhevsk, Institut komp'yuternykh issledovaniy, Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika, 2008. 264 p.
2. Coyle D.J., Blake J.W., Macosco C.W. The kinematics of fountain flow in mold-filling. *AICHE J.*, 1987, vol. 33, pp. 1168-1177. [DOI](#)
3. Mitsoulis E. Fountain flow revisited: The effect of various fluid mechanics parameters. *AICHE J.*, 2010, vol. 56, pp. 1147-1162. [DOI](#)
4. Borzenko E.I., Frolov O.Yu., Shragger G.R. Fountain viscous fluid flow during filling a channel when taking dissipative warming into account. *Fluid Dyn.*, 2014, vol. 49, pp. 37-45. [DOI](#)
5. Hassan H., Regnier N., Pujos C., Defaye G. Effect of viscous dissipation on the temperature of the polymer during injection molding filling. *Polymer. Eng. Sci.*, 2008, vol. 48, pp. 1199-1206. [DOI](#)
6. Baranov A.V. Non-isothermal flow of rheological complex media taking into account of chemical conversions. *MKMK – Journal on composite mechanics and design*, 2010, vol. 16, no. 3, pp. 384-399.
7. Nguyen-Chung T., Mennig G. Non-isothermal transient flow and molecular orientation during injection mold filling. *Rheol. Acta*, 2001, vol. 40, pp. 67-73. [DOI](#)
8. El Otmani R., Zinet M., Boutaous M., Benhadid H. Numerical simulation and thermal analysis of the filling stage in injection molding process: Role of the mold-polymer interface. *J. Appl. Polym. Sci.*, 2011, vol. 121, pp. 1579-1592. [DOI](#)
9. Wang W., Li X., Han X. Numerical simulation and experimental verification of the filling stage in injection molding. *Polymer. Eng. Sci.*, 2012, vol. 52, pp. 42-51. [DOI](#)
10. Kamal M.R., Goyal S.K., Chu E. Simulation of injection mold filling of viscoelastic polymer with fountain flow. *AICHE J.*, 1988, vol. 34, pp. 94-106. [DOI](#)
11. Bulgakov V.K., Lipanov A.M., Chekonin K.A. Filling the region between vertical coaxial cylinders of an anomalously viscous fluid under nonisothermal conditions. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 1989, vol. 57, pp. 1169-1175. [DOI](#)

12. Lipanov A.M., Al'yes M.Yu., Konstantinov Yu.N. Chislennoye modelirovaniye polzushchikh techeniy nen'yutonovskikh zhidkostey so svobodnoy poverkhnost'yu [Numerical simulation of creeping free surface non-Newtonian fluids]. *Matem. modelirovaniye – Mathematical Models and Computer Simulations*, 1993, vol. 5, no. 7, pp. 3-9.
13. Borzenko E.I., Shrager G.R., Yakutenok V.A. Filling of channels with a non-Newtonian fluid in the gravity field. *Fluid Dyn.*, 2009, vol. 44, pp. 830-835. [DOI](#)
14. Mavridis H., Hrymak A.N., Vlachopoulos J. Finite element simulation of fountain flow in injection molding. *Polymer. Eng. Sci.*, 1986, vol. 26, pp. 449-454. [DOI](#)
15. Gogos C.G., Huang Ch.-F., Schmidt L.R. The process of cavity filling including the fountain flow in injection molding. *Polymer. Eng. Sci.*, 1986, vol. 26, pp. 1457-1466. [DOI](#)
16. Mitsoulis E. Fountain flow of pseudoplastic and viscoplastic fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2010, vol. 165, pp. 45-55. [DOI](#)
17. Glushkov I.A., Banzula Yu.B. *Modelirovaniye strukturno-reologicheskikh svoystv dispersnykh system* [Modeling the structural and rheological properties of dispersed systems]. Moscow, Ugreshskaya tipografiya, 2009. 299 p.
18. Patankar S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York, Taylor & Francis, 1980. 197 p.
19. Vasenin I.M., Sidonskiy O.B., Shrager G.R. Chislennoye resheniye zadachi o dvizhenii vyazkoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu [Numerical solution of the problem of the motion of a viscous fluid with a free surface]. *DAN SSSR – Transactions of the USSR Academy of Sciences*, 1974, vol. 217, no. 2, pp. 295-298.
20. Borzenko E.I., Shrager G.R. Effect of the type of boundary conditions on the three-phase contact line on the flow characteristics during filling of the channel. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 2015, vol. 56, pp. 167-176. [DOI](#)
21. Bercovier M., Engelman M.A. Finite-element method for incompressible non-Newtonian flows. *J. Comput. Phys.*, 1980, vol. 36, pp. 313-326. [DOI](#)
22. Rose W. Fluid–fluid interfaces in steady motion. *Nature*, 1961, vol. 191, pp. 242-243. [DOI](#)

Поступила в редакцию 27.03.2019; после доработки 24.04.2019; принята к опубликованию 29.04.2019