

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.1.8](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.8)

УДК 539.4

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ СЛАБОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОМУ СДВИГУ

А.П. Янковский

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия*

На основе алгоритма шагов по времени разработана математическая модель вязкоупругопластического деформирования гибких пластин, перекрестно армированных в плоскостях, параллельных срединной плоскости. Деформации компонентов композиции пластин предполагаются малыми и раскладываются на упругие и пластические составляющие. Вязкоупругое поведение материалов композиции описывается соотношениями тела Максвелла–Больцмана. Неупругое деформирование представляется уравнениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Нормальные напряжения в поперечном направлении аппроксимируются линейно по толщине пластин. За счет этого линейные деформации в поперечном направлении и их скорости исключаются из определяющих уравнений для компонентов композиции. Ослабленное сопротивление волокнистых пластин поперечным сдвигам учитывается в рамках неклассической теории изгиба Редди. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Сформулированные начально-краевые задачи решаются численно с применением явной схемы типа «крест». Для получения устойчивой численной схемы используется искусственный прием: напряжения в вязкоупругих соотношениях Максвелла–Больцмана в текущий дискретный момент времени выражаются через скорость напряжений по формуле трапеций с шагом назад. Исследовано упругопластическое и вязкоупругопластическое изгибное динамическое поведение относительно толстых ортогонально армированных стеклопластиковых прямоугольных пластин под действием нагрузок взрывного типа. Показано, что изменение структуры армирования приводит к изменению величины остаточного прогиба конструкции. Продемонстрировано, что амплитуда колебаний армированной пластины в окрестности начального момента времени существенно превосходит величину остаточного прогиба.

*Ключевые слова:* пластины, перекрестное армирование, вязкоупругопластическое деформирование, геометрическая нелинейность, теория Редди, тело Максвелла–Больцмана, динамическое нагружение, схема типа «крест», устойчивость численной схемы

## MODELLING THE VISCOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCED PLATES WITH ACCOUNT OF WEAK RESISTANCE TO TRANSVERSE SHEAR

A.P. Yankovskii

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

A mathematical model of viscoelastic-plastic deformation of flexible plates cross-reinforced in planes parallel to the middle plane is developed on the basis of the algorithm of time steps. The deformations of the components of the composition of the plates are assumed to be small and they are decomposed into elastic and plastic components. The viscoelastic behavior of the composition materials is subject to the relations of the Maxwell–Boltzmann body. Inelastic deformation is defined by the equations of the theory of plastic flow with isotropic hardening. The normal stresses in the transverse direction are linearly approximated over the thickness of the plates. Therefore, linear deformations in the transverse direction and their velocities are excluded from the governing equations for the composition components. The weakened resistance of fibrous plates to transverse shear is taken into account in the framework of the non-classical Reddy bending theory. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. The formulated initial-boundary value problems are solved numerically using an explicit scheme of the “cross” type. To obtain a stable numerical scheme, an artificial technique is used: the stresses in the Maxwell – Boltzmann viscoelastic relations at the current discrete time are expressed in terms of the stress velocity by the trapezoid formula with a step back. The elastic-plastic and viscoelastic-plastic bending dynamic behavior is investigated for the relatively thick orthogonally reinforced fiberglass rectangular plates under the action of explosive loads. It is shown that a change in the structure of reinforcement leads to a change in the value of the residual deflection of the structure. It was found that the amplitude of oscillations of the reinforced plate in the vicinity of the initial time instant significantly exceeds the value of the residual deflection.

*Keywords:* plates, cross-reinforcement, viscoelastic-plastic deformation, geometric nonlinearity, Reddy theory, Maxwell–Boltzmann body, dynamic loading, “cross” type scheme, numerical scheme stability

### 1. Введение

Конструкции из композиционных материалов (КМ) в настоящее время находят все более широкое применение в инженерной практике [1–5]. Наиболее ярко основные преимущества КМ (малый вес в сочетании с прочностью) проявляются при эксплуатации тонкостенных элементов типа пластин и оболочек [5–15], поэтому проблема математического моделирования их механического поведения остается актуальной и важной для оценки живучести конструкций из них.

Известно, что слоистые КМ и тонкостенные элементы, армированные по эквидистантным поверхностям, плохо сопротивляются поперечному сдвигу. Для учета этого обстоятельства традиционно

используются либо теория Рейсснера–Миндлина [5, 8–10, 14–17], либо теория Редди [6, 7, 11, 13, 15], реже — теории более высоких порядков [12, 18, 19], основанные, в частности, на кинематической гипотезе ломаной линии [12, 19]. Как показано в [7], теория Редди является асимптотически точной (в первом асимптотическом приближении из пространственных уравнений механики деформируемого твердого тела вытекают соотношения классической теории анизотропных пластин [6], а во втором приближении — соотношения теории Редди, и в рамках этой теории удается удовлетворить граничные условия на лицевых поверхностях тонкостенной конструкции по касательным силам). Теория же Рейсснера не относится к асимптотически точной, поскольку в ее рамках нельзя удовлетворить никакие граничные условия на лицевых поверхностях конструкции. При этом сложность реализации обеих теорий практически одинакова [15].

В подавляющем большинстве исследований, посвященных моделированию механического поведения пластин и оболочек из КМ, рассматривается лишь линейно-упругое поведение их материала [5–9, 11–14, 16–19]. Однако современные КМ-изделия могут подвергаться воздействию высокоинтенсивных нагрузок [5], при которых компоненты композиции деформируются упругопластически [10, 15, 20, 21]. В работе [10] изучалось упругопластическое поведение слоистых (с изотропными слоями) тонкостенных конструкций, в [20, 21] — динамическое поведение сэндвич-панелей. В [15] предложена модель упругопластического деформирования гибких пластин, армированных перекрестно по поверхностям, параллельным срединной плоскости; в качестве определяющих уравнений для компонентов композиции, как и в [10], взяты уравнения теории Прандтля–Рейсса–Хилла [22] (ТПРХ).

Определяющие уравнения ТПРХ не описывают демпфирующие свойства реальных материалов при их динамическом осциллирующем деформировании [23, 24], поэтому модели, использованные в [10, 15], не позволяют вычислить остаточные перемещения и деформации при динамическом упругопластическом деформировании тонкостенных КМ-конструкций. Учет демпфирующих свойств компонентов композиции может быть осуществлен за счет привлечения вязкоупругих соотношений [25], то есть построения математической модели, для которой в [26] вводится термин «модель вязкоупругопластического деформирования КМ». На сегодняшний день такая модель отсутствует.

Для численного интегрирования динамических задач применяются явные и неявные схемы. Из явных схем наиболее широкое распространение получила схема типа «крест» [10, 15], из неявных схем — те, что употребляются в методах Ньюмарка [20, 21, 27, 28].

В свете вышеизложенного данная работа посвящена осуществляемому в рамках теории Редди математическому моделированию вязкоупругопластически деформируемых гибких пластин, перекрестно армированных в своей плоскости, при учете их слабого сопротивления поперечным сдвигам. Для численного интегрирования возникающих при этом начально-краевых задач предполагается использовать явную схему типа «крест».

## 2. Модель вязкоупругопластического деформирования

Как и в [15], считаем, что деформации  $\varepsilon_{ij}$  являются малыми, поэтому их можно разложить на упругие —  $e_{ij}$ , и пластические (несжимаемые) —  $p_{ij}$ , составляющие [29, 30]:

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + p_{ij}, \quad p_{ii} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Вязкоупругое поведение материала опишем соотношениями тела Максвелла–Больцмана [25]:

$$\dot{\bar{e}}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta}, \quad \dot{\varepsilon}_0 = \dot{e}_0 = \frac{\dot{\sigma}_0}{3K} + \frac{\sigma_0}{3\mu} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \quad \bar{e}_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_{ll}}{3}, \quad \varepsilon_0 = e_0 = \frac{\varepsilon_{ll}}{3}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (i, j = 1, 2, 3); \quad (3)$$

$\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений;  $s_{ij}$ ,  $\bar{e}_{ij}$  — компоненты девиаторов напряжений и упругих деформаций;  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  — средние напряжение и деформация;  $E$ ,  $\nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала;  $G$  — модуль сдвига;  $K$  — объемный модуль упругости;  $\eta$  — коэффициент линейной вязкости при сдвиге;  $\mu$  — коэффициент объемной вязкости;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера; точка над символом означает производную по времени  $t$ .

Пластическое деформирование материала описывается теорией течения с изотропным упрочнением, причем поверхность нагружения  $f = 0$  соответствует обобщенному на вязкопластическое деформирование условию текучести Мизеса [31]:

$$f(T, \chi) \equiv T^2 - \tau_s^2(\chi) = 0 \quad (4)$$

или

$$T = \tau_s(\chi), \quad (5)$$

где

$$T = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}}, \quad \chi = \int_0^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij} \dot{p}_{ij}} dt; \quad (6)$$

$T$  — интенсивность касательных напряжений;  $\chi$  — параметр упрочнения (в данном случае  $\chi$  — параметр Одквиста);  $\tau_s$  — известная из эксперимента на чистый сдвиг функция упрочнения; по повторяющимся нижним индексам производится суммирование от 1 до 3, если явно не указаны пределы суммирования.

На основании ассоциированного закона пластического течения и выражений (4) и (6) имеем [22, 30, 31]

$$\dot{p}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \dot{\lambda} s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (7)$$

где  $\dot{\lambda}$  — подлежащий определению параметр. Умножая (7) на  $s_{ij}$  и сворачивая результат по обоим индексам, при учете (5) и (6) будем иметь:  $s_{mn} \dot{p}_{mn} = \dot{\lambda} s_{mn} s_{mn} = 2\dot{\lambda} T^2 = 2\dot{\lambda} \tau_s^2(\chi)$ . Отсюда следует

$$\dot{\lambda} = \frac{s_{mn} \dot{p}_{mn}}{2T^2} = \frac{s_{mn} \dot{p}_{mn}}{2\tau_s^2(\chi)}. \quad (8)$$

Подставляем (8) в равенство (7) и учитываем (1), тогда получаем:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{s_{ij}}{2T^2} s_{mn} \dot{p}_{mn} = \frac{s_{ij}}{2T^2} s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} - \frac{s_{ij}}{2T^2} s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (9)$$

В рамках ТПРХ приращение работы упругих деформаций  $dA_e = s_{mn} de_{mn} = s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} dt$  может быть представлено через приращение работы деформаций формоизменения  $dA = s_{mn} d\bar{\varepsilon}_{mn} = s_{mn} d\varepsilon_{mn} = s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} dt$  (где  $\bar{\varepsilon}_{mn} = \varepsilon_{mn} - \delta_{mn} \varepsilon_0$ ), то есть предполагается (см. стр. 234 в [30]), что

$$dA_e = \kappa dA \quad (s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} = \kappa s_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn}), \quad (10)$$

где  $\kappa = \kappa(\chi)$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметра упрочнения и выражающийся через модуль сдвига  $G$  и касательный модуль  $\tilde{G}$  на диаграмме чистого сдвига [30], а значит, обуславливается свойствами материала.

Соотношение (10) считается справедливым при любых видах напряженно-деформированного состояния (НДС) при активном нагружении изотропного материала. В частности, при чистом сдвиге энергетическое соотношение (10) при учете (3) и (6) принимает вид:

$$\tau \dot{\gamma}_e = \kappa(\chi) \tau \dot{\gamma} \Rightarrow \dot{\gamma}_e = \kappa(\chi) \dot{\gamma}, \quad (11)$$

где

$$\chi = \int_0^t |\dot{\gamma}_p| dt = \int_0^{|\gamma_p|} d|\gamma_p| = |\gamma_p|, \quad \gamma_p = \gamma - \gamma_e; \quad (12)$$

$\tau$  — касательное напряжение при чистом сдвиге;  $\gamma$  — полная угловая деформация (например  $\gamma = 2\varepsilon_{12}$ );  $\gamma_e, \gamma_p$  — упругая и пластическая составляющие величины  $\gamma$ . Равенство (11) справедливо при подстановке (12) и выполнении условия (5), в котором нужно принять  $T = \tau$ .

Равенства (10) и (11) выполняются, если не принимаются во внимание вязкоупругие свойства материала, то есть справедливы только для упругопластического тела с изотропным упрочнением

(что отвечает ТПРХ). Построим соотношения, аналогичные (10) и (11), для вязкоупругопластического материала. Согласно (5) и (6) при условии активного нагружения в случае чистого сдвига и пластическом деформировании имеем

$$\tau = \tau_s(\chi), \quad (13)$$

где  $\chi$  вычисляется, например, по формуле (12).

Используя равенство (13), получаем энергетическое соотношение, аналогичное (11). Действительно, при активном нагружении в условиях чистого сдвига из (13), при учете (12), вытекает выражение для дифференциала касательного напряжения:

$$d\tau = \tau_\chi d\chi = \tau_\chi d\gamma_p \Rightarrow \dot{\tau} = \tau_\chi \dot{\gamma}_p, \quad (14)$$

где

$$\tau_\chi \equiv \frac{d\tau_s}{d\chi} = \frac{d\tau_s(\gamma_p)}{d\gamma_p} \equiv \bar{G}; \quad (15)$$

$\tau_\chi \equiv \bar{G} = \tau_\chi(\chi) = \tau_\chi(\gamma_p)$  — известная из эксперимента функция, имеющая смысл касательного модуля на диаграмме  $\tau \sim \gamma_p$ . Здесь и далее для удобства математических выкладок полагается, что угловые деформации  $\gamma$ ,  $\gamma_e$  и  $\gamma_p$  при проведении экспериментов на чистый сдвиг положительны.

С другой стороны, согласно (2), приращение касательного напряжения  $\tau$  сопровождается приращением упругой угловой деформации  $\gamma_e$ , а именно:

$$\frac{\dot{\gamma}_e}{2} = \frac{\dot{\tau}}{2G} + \frac{\tau}{2\eta} \Rightarrow \dot{\tau} = G\dot{\gamma}_e - \frac{G}{\eta}\tau. \quad (16)$$

Подставляем выражение (16) в равенство (14) и учитываем второе соотношение (12), тогда получаем:

$$G\dot{\gamma}_e - \frac{G}{\eta}\tau = \tau_\chi(\dot{\gamma} - \dot{\gamma}_e) \Rightarrow \dot{\gamma}_e = \frac{g}{1+g}\dot{\gamma} + \frac{\tau}{\eta(1+g)}, \quad (17)$$

где

$$g \equiv \frac{\bar{G}}{G} = \frac{\tau_\chi}{G}. \quad (18)$$

После умножения второго равенства (17) на  $\tau$  будем иметь энергетическое соотношение вида:

$$\tau\dot{\gamma}_e = \frac{g}{1+g}\tau\dot{\gamma} + \frac{\tau^2}{\eta(1+g)} \Rightarrow \frac{dA_e}{dt} = \frac{g}{1+g}\frac{dA}{dt} + \frac{\tau^2}{\eta(1+g)}. \quad (19)$$

Как и в рамках ТПРХ (см. (10) и (11)), предполагаем, что энергетическое соотношение, аналогичное (19), должно выполняться не только при чистом сдвиге, но и при любом виде НДС материала, поэтому исходя из (2) и (6) находим:

$$s_{mn}\dot{e}_{mn} = \frac{g}{1+g}s_{mn}\dot{e}_{mn} + \frac{s_{mn}s_{mn}}{2\eta(1+g)} = \frac{g}{1+g}s_{mn}\dot{e}_{mn} + \frac{T^2}{\eta(1+g)}. \quad (20)$$

Подставим выражение (20) в правую часть соотношения (9), а (1) и (3) — в левую часть:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{e}_{ij} + \frac{s_{ij}s_{mn}\dot{e}_{mn}}{2T^2} - \frac{gs_{ij}s_{mn}\dot{e}_{mn}}{2T^2(1+g)} - \frac{s_{ij}s_{mn}s_{mn}}{4\eta T^2(1+g)} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Проведем преобразования правой части этого равенства: учитываем в первом слагаемом (2), а в последнем слагаемом — первое выражение из (6), тогда

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta} + \frac{s_{ij}s_{mn}\dot{\epsilon}_{mn}}{2T^2(1+g)} - \frac{s_{ij}}{2\eta(1+g)} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (21)$$

В случае идеальной пластичности ( $\tau_s(\chi) = \text{const}$ ) имеем  $\bar{G} = \tau_\chi = 0$  и, согласно (18), получаем  $g = 0$ , поэтому из (17) и разложений (1) следуют определяющие уравнения, предложенные в [25]. Из равенств (2) и (21) вытекает

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - Bs_{ij} - As_{ij}s_{mn}\dot{\epsilon}_{mn} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (22)$$

где

$$A \equiv \frac{cG}{T^2(1+g)}, \quad B \equiv \frac{G}{\eta} \left( 1 - \frac{c}{1+g} \right); \quad (23)$$

$c$  — параметр переключения:  $c = 0$  при вязкоупругом деформировании, разгрузке и нейтральном нагружении;  $c = 1$  при активном нагружении в условиях пластического деформирования.

Определим условия, при которых  $c = 0$  и  $c = 1$ . Исходя из (4) и (5) вязкоупругое деформирование имеет место, если  $f(T, \chi) < 0$  или

$$T < \tau_s(\chi). \quad (24)$$

Начало разгрузки от поверхности нагружения характеризуется условиями:  $f(T, \chi) = 0$  и  $df < 0$ . В связи с этим, используя (4) при учете (6) и (15), вычисляем дифференциал функции нагружения:

$$df = \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} ds_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = s_{ij} ds_{ij} - 2\tau_s \tau_\chi d\chi = s_{ij} ds_{ij} - 2\tau_s \bar{G} d\chi. \quad (25)$$

На основании второго равенства из (6) получаем

$$d\chi = d \left( \int_0^t \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}} dt \right) = \sqrt{2dp_{ij}dp_{ij}} \geq 0 \quad (26)$$

или

$$\dot{\chi} = \sqrt{2\dot{p}_{ij}\dot{p}_{ij}} \geq 0. \quad (27)$$

Согласно (26) при начале разгрузки от поверхности нагружения  $f = 0$  приращения пластических деформаций отсутствуют ( $d\chi = 0$ ), поэтому при  $df < 0$  из (25) вытекает условие начала разгрузки:

$$T = \tau_s(\chi) \quad \text{и} \quad s_{ij} ds_{ij} < 0. \quad (28)$$

В случае нейтрального нагружения имеем:  $f = 0$  и  $df = 0$ . Однако при этом приращения пластических деформаций также отсутствуют ( $d\chi = 0$ ), поэтому из (25) получаются условия нейтрального нагружения, аналогичные (28), где знак «меньше» следует заменить знаком «равно». При активном нагружении выполняются равенства:  $f = 0$  и  $df = 0$ , но в этом случае, согласно (26), имеем  $d\chi > 0$ . При учете известных из экспериментов неравенств  $\tau_s > 0$  и  $\tau_\chi \equiv \bar{G} > 0$  [22, 31] из соотношения (25) вытекают условия активного нагружения, аналогичные (28), где знак «меньше» нужно заменить знаком «больше».

Преобразуем второе условие (28). С этой целью делим его на  $dt > 0$  и подставляем выражение (22). При разгрузке и нейтральном нагружении из (22) и (23) при  $c = 0$  (заметим, что  $\dot{p}_{ij} = 0$  и  $\dot{\chi} = 0$ , см. (27)) следует:

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{\bar{\epsilon}}_{ij} - \frac{G}{\eta} s_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (29)$$

После подстановки (29) и (6) во второе соотношение из (28) выходит, что

$$2Gs_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta}s_{ij}s_{ij} \leq 0 \Rightarrow s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{T^2}{\eta} = s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\tau_s^2(\chi)}{\eta} \leq 0. \quad (30)$$

При активном нагружении из первого равенства (9) с учетом (1) и (2) получаем:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{s_{ij}s_{mn}\dot{p}_{mn}}{2T^2} \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2\eta} + \frac{s_{ij}s_{mn}\dot{p}_{mn}}{2T^2} \Rightarrow \dot{s}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta}s_{ij} - \frac{Gs_{ij}s_{mn}\dot{p}_{mn}}{T^2} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (31)$$

Подстановка (31) и (6) во второе условие из (28) (при замене знака «меньше» на знак «больше») дает:

$$2Gs_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{G}{\eta}s_{ij}s_{ij} - \frac{Gs_{ij}s_{ij}s_{mn}\dot{p}_{mn}}{T^2} = 2G\left(s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{T^2}{\eta} - s_{mn}\dot{p}_{mn}\right) > 0. \quad (32)$$

Согласно постулату Друккера [26] при активном нагружении справедливо условие  $s_{mn}\dot{p}_{mn} > 0$ , поэтому в силу  $G > 0$  из (32) вытекает редуцированное неравенство:

$$s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\tau_s^2(\chi)}{\eta} > 0. \quad (33)$$

Условия (30) и (33) совпадают с приведенными в работе [25].

Таким образом, соотношение (22) при учете (3), (18), (23), (24), (28), (30), (33) и второго равенства из (2) преобразуется к окончательному виду:

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \delta_{ij}\lambda\dot{\epsilon}_{ii} - B\sigma_{ij} + \delta_{ij}D\sigma_{ii} - As_{ij}s_{mn}\dot{\epsilon}_{mn} \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (34)$$

где

$$\lambda \equiv \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} = \text{const}, \quad D \equiv \frac{1}{3}\left(B - \frac{K}{\mu}\right), \quad c = \begin{cases} 0 & \text{при } T < \tau_s(\chi) \text{ или } T = \tau_s(\chi) \text{ и } s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} \leq \eta^{-1}\tau_s^2(\chi), \\ 1 & \text{при } T = \tau_s(\chi) \text{ и } s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij} > \eta^{-1}\tau_s^2(\chi); \end{cases} \quad (35)$$

$\lambda$  — параметр Ламе (не путать с  $\lambda$  в (7) и (8)).

Если вязкоупругие свойства материала в расчет не принимаются ( $\eta \rightarrow \infty$  и  $\mu \rightarrow \infty$ ), то, согласно (23) и (35),  $B = D = 0$ . Тогда соотношения (34) при коэффициентах (35) редуцируются в определяющие уравнения ТПРХ [15, 30].

### 3. Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких пластин с плоско-перекрестными структурами армирования

Рассмотрим изгибное поведение гибридной КМ-пластины толщиной  $2h$  (Рис. 1), с которой связана декартова прямоугольная система координат  $Ox_1x_2x_3$ , причем плоскость  $Ox_1x_2$  ( $x_3 = 0$ ) — срединная, а ось

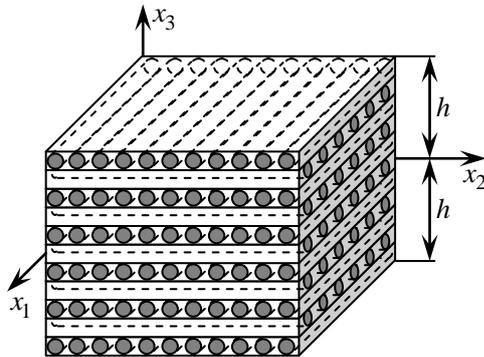


Рис. 1. Элемент армированной композитной пластины

$Ox_3$  направлена по толщине конструкции ( $|x_3| \leq h$ ). Пластина перекрестно усилена  $N$  семействами волокон в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости  $Ox_1x_2$ , и структура армирования в направлении  $Ox_3$  квазиоднородна. Относительное объемное содержание связующего материала в репрезентативной ячейке композиции обозначим как  $\omega_0$ , а плотности армирования волокнами  $k$ -го семейства —  $\omega_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ). При этом выполним условие нормирования:

$$\omega_0 + \sum_k \omega_k = 1. \quad (36)$$

Здесь и далее суммирование по индексу  $k$  проводим от 1 до  $N$ .

Так как установить фактическое распределение деформаций, напряжений и их скоростей в КМ, где связующее имеет многочисленные, достаточно произвольно ориентированные, более жесткие включения, весьма затруднительно (особенно при неупругом деформировании компонентов композиции), то для получения практически пригодных определяющих уравнений вязкоупругопластического поведения обсуждаемой КМ-пластины необходимо сделать некоторые исходные допущения, аналогичные принятым в [15, 32]:

1. КМ в пределах представительного элемента композиции считаем макроскопически квазиоднородным анизотропным телом (при достаточно густом и равномерном наполнении связующей матрицы армирующими волокнами эта предпосылка вполне допустима [15]).
2. Между арматурой и связующим реализуется идеальный механический контакт (полное сцепление).
3. В пределах репрезентативной ячейки, выделенной из КМ на миниуровне, напряжения и деформации во всех компонентах и в композиции кусочно-постоянны. Эффекты высших порядков, связанные с изменением полей напряжений, деформаций и их скоростей на микроуровне в локальных окрестностях границ контакта арматуры со связующим, не учитываем.
4. Поля деформаций, напряжений и их скоростей в композиции усредняем по объему представительного элемента, то есть, согласно допущению 3, пропорционально относительному объемному содержанию каждого составляющего  $\omega_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ).
5. Все компоненты композиции однородны и изотропны, а их вязкоупругопластическое деформирование описывается соотношениями (34) с параметрами (35).

В соответствии с допущениями 2, 3 и условиями сопряжения напряжений на границах контакта волокон со связующим и в силу плоско-перекрестного армирования пластины (см. Рис. 1) имеем:

$$\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_{33}^{(0)} \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (37)$$

Здесь и далее индекс  $k$  в скобках означает номер компонента композиции:  $k = 0$  — связующее,  $k \geq 1$  — арматура  $k$ -го семейства.

На основании допущения 4 усредненное напряжение в композиции  $\sigma_{33}$  определяется так:

$$\sigma_{33} = \omega_0 \sigma_{33}^{(0)} + \sum_k \omega_k \sigma_{33}^{(k)}. \quad (38)$$

Из равенства (38) при учете (36) и (37) следует:

$$\sigma_{33}^{(k)} = \sigma_{33}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (39)$$

Так как динамическое поведение КМ-пластины рассматриваем как поведение гибкой тонкостенной механической системы, напряжение  $\sigma_{33}$  с приемлемой для практических приложений точностью можно линейно аппроксимировать по переменной  $x_3$  [9]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (40)$$

где  $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$  — нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях пластины, известные из соответствующих силовых граничных условий;  $\Omega$  — область, занимаемая пластиной в плане.

Используя соотношения (39), (40) и получающиеся из них после дифференцирования по времени  $t$  равенства для скоростей напряжений, преобразуем уравнения (34) с параметрами (35). Для этого исключим из рассмотрения скорости деформаций  $\dot{\epsilon}_{33}^{(k)}$  подобно тому, как это традиционно делается при записи определяющих соотношений для тонкостенных элементов конструкций [5–17, 19]. В результате установим определяющие уравнения для  $k$ -го компонента композиции пластины, которые можно записать в следующей матричной форме ( $\Gamma$  — символ операции транспонирования):

$$\dot{\sigma}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\epsilon}_k + \mathbf{V}_k \sigma_k + \mathbf{w}_k \left[ \dot{\sigma}_{33} + \left( B^{(k)} - D^{(k)} \right) \sigma_{33} \right] + \mathbf{q}_k \sigma_{33}, \quad 0 \leq k \leq N; \quad (41)$$

$$\dot{\epsilon}_{33}^{(k)} = \mathbf{g}_k^T \dot{\epsilon}_k - \mathbf{e}_k^T \sigma_k + z^{(k)} \left[ \dot{\sigma}_{33} + \left( B^{(k)} - D^{(k)} \right) \sigma_{33} \right], \quad 0 \leq k \leq N. \quad (42)$$

Здесь и далее:

$$\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k, \quad \mathbf{V}_k = \bar{\mathbf{V}}_k - \bar{\bar{\mathbf{V}}}_k, \quad k = 0, 1, \dots, N; \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{13}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}, 2\varepsilon_{13}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}\}^T, \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{12}^{(k)}, s_{13}^{(k)}, s_{23}^{(k)}\}^T; \end{aligned} \quad (44)$$

$\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\mathbf{V}}_k = (\bar{v}_{ij}^{(k)})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{V}}}_k = (\bar{\bar{v}}_{ij}^{(k)})$  —  $5 \times 5$ -матрицы,

$\mathbf{w}_k = \{w_i^{(k)}\}$ ,  $\mathbf{q}_k = \{q_i^{(k)}\}$ ,  $\mathbf{g}_k = \{g_i^{(k)}\}$ ,  $\mathbf{e}_k = \{e_i^{(k)}\}$  — 5-компонентные векторы-столбцы, ненулевые элементы которых определяются так:

$$\begin{aligned} \bar{z}_{ij}^{(k)} &= 2\delta_{ij}G^{(k)} + \lambda^{(k)} = \text{const}, \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = G^{(k)} = \text{const}, \\ \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} &= A^{(k)}s_i^{(k)}s_j^{(k)} + z^{(k)}(\lambda^{(k)} - A^{(k)}s_i^{(k)}s_{33}^{(k)})(\lambda^{(k)} - A^{(k)}s_j^{(k)}s_{33}^{(k)}), \\ \bar{\bar{z}}_{il}^{(k)} &= \bar{\bar{z}}_{li}^{(k)} = A^{(k)}s_l^{(k)}[s_i^{(k)} - z^{(k)}s_{33}^{(k)}(\lambda^{(k)} - A^{(k)}s_i^{(k)}s_{33}^{(k)})], \\ \bar{\bar{z}}_{lm}^{(k)} &= A^{(k)}\sigma_l^{(k)}\sigma_m^{(k)}(1 + A^{(k)}z^{(k)}s_{33}^{(k)}s_{33}^{(k)}), \\ \bar{v}_{ij}^{(k)} &= -\delta_{ij}B^{(k)} + D^{(k)}, \quad \bar{v}_{ll}^{(k)} = -B^{(k)}, \quad \bar{\bar{v}}_{ij}^{(k)} = D^{(k)}z^{(k)}(\lambda^{(k)} - A^{(k)}s_i^{(k)}s_{33}^{(k)}), \quad \bar{\bar{v}}_{ij}^{(k)} = -D^{(k)}z^{(k)}A^{(k)}s_i^{(k)}s_{33}^{(k)}, \\ w_i^{(k)} &= z^{(k)}(\lambda^{(k)} - A^{(k)}s_i^{(k)}s_{33}^{(k)}), \quad w_l^{(k)} = -A^{(k)}z^{(k)}\sigma_l^{(k)}s_{33}^{(k)}, \\ q_i^{(k)} &= D^{(k)}, \quad g_i^{(k)} = -z^{(k)}(\lambda^{(k)} - A^{(k)}s_i^{(k)}s_{33}^{(k)}), \quad g_l^{(k)} = 2A^{(k)}z^{(k)}\sigma_l^{(k)}s_{33}^{(k)}, \\ e_i^{(k)} &= D^{(k)}z^{(k)}, \quad z^{(k)} = (2G^{(k)} + \lambda^{(k)} - A^{(k)}s_{33}^{(k)}s_{33}^{(k)})^{-1} \quad (i, j = 1, 2; \quad l, m = 3, 4, 5), \end{aligned} \quad (45)$$

$$A^{(k)} = \frac{c^{(k)}G^{(k)}}{(1+g^{(k)})T^{(k)2}}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}}\left(1 - \frac{c^{(k)}}{1+g^{(k)}}\right), \quad D^{(k)} = \frac{1}{3}\left(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}}\right), \quad g^{(k)} = \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1+\nu^{(k)})},$$

$$\lambda^{(k)} = \frac{\nu^{(k)}E^{(k)}}{(1+\nu^{(k)})(1-2\nu^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1-2\nu^{(k)})}, \quad T^{(k)2} = \frac{1}{2}(s_1^{(k)2} + s_2^{(k)2} + s_{33}^{(k)2}) + \sum_{l=3}^5 \sigma_l^{(k)2};$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } T^{(k)} < T_*^{(k)} \text{ или } T^{(k)} = T_*^{(k)} \text{ и } W^{(k)} \leq T_*^{(k)2} / \eta^{(k)}, \\ 1 & \text{при } T^{(k)} = T_*^{(k)} \text{ и } W^{(k)} > T_*^{(k)2} / \eta^{(k)}, \end{cases}$$

$$W^{(k)} \equiv \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + z^{(k)}s_{33}^{(k)}\left\{\left[\dot{\sigma}_{33} + (B^{(k)} - D^{(k)})\sigma_{33}\right] - D^{(k)}(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}) - \lambda^{(k)}(\dot{\varepsilon}_{11}^{(k)} + \dot{\varepsilon}_{22}^{(k)}) + A^{(k)}s_{33}^{(k)}\mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k\right\}, \quad (46)$$

$$T_*^{(k)} = \max\{T_p^{(k)}, T_m^{(k)}\}, \quad 0 \leq k \leq N;$$

$T_p^{(k)}$  — значение интенсивности касательных напряжений в  $k$ -м компоненте композиции  $T^{(k)}$ , при котором он впервые приходит в пластическое состояние;  $T_m^{(k)}$  — максимальное значение  $T^{(k)}$ , достигнутое за всю предыдущую историю деформирования элемента материала  $k$ -го компонента композиции; остальные величины имеют тот же смысл, что и в (34), (35). Суммирование по  $k$  и  $l$  отсутствует. Так как при изотропном упрочнении материала  $k$ -го компонента зависимость  $\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)})$  является монотонно возрастающей [22, 25, 26, 30, 31], то в (46), как и в [15, 30], в качестве параметра упрочнения  $\chi^{(k)}$  (см. (4) и (5)) вместо параметра Одквиста выбрана величина  $T_*^{(k)}$ , которая более удобна с вычислительной точки зрения. Равенства (44) задают соответствия между 5 компонентами  $f_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) некоторого вектора-столбца  $\mathbf{f}_k$  и компонентами симметричного тензора 2-го ранга  $f_{jl}^{(k)}$  ( $j, l = \overline{1, 3}$ ),  $0 \leq k \leq N$ . Функции  $\sigma_{33}$  и  $\dot{\sigma}_{33}$  в (41) и (46) известны из выражения (40).

Как и в [15], для численного интегрирования рассматриваемой задачи используем процедуру шагов по времени [10, 20, 21, 27, 28, 30], то есть будем определять значения неизвестных функций в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \Delta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta = \text{const} > 0$  — шаг по времени. При этом считаем, что в моменты времени  $t_{n-1}$  и  $t_n$  уже известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \boldsymbol{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\sigma}_{33}^n(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{33}(t_n, \mathbf{r}), \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33}^n(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_{33}(t_n, \mathbf{r}), \\ 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h. \end{aligned} \quad (47)$$

Так как далее явную схему типа «крест», имеющую 2-й порядок точности по  $\Delta$  [10, 15], предполагается разрабатывать на 3-точечном шаблоне по времени  $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$ , то преобразуем второе слагаемое в правой части равенства (41) по формуле трапеций, которая также имеет 2-й порядок точности по  $\Delta$  [33]. Согласно формуле трапеций для текущего момента времени  $t_n$  получаем:

$$\boldsymbol{\sigma}_k^n - \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} = \frac{\Delta}{2} \left( \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1} \right), \quad 0 \leq k \leq N. \quad (48)$$

Здесь использованы обозначения, аналогичные (47). Выражаем из (48) вектор-столбец  $\boldsymbol{\sigma}_k^n$  и подставляем в правую часть соотношения (41), тогда при  $t = t_n$  приходим к преобразованному определяющему уравнению:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n = \mathbf{Z}_k^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n + \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^n \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n + \mathbf{V}_k^{n-1/2} \boldsymbol{\sigma}_k^n + \mathbf{w}_k^n \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33}^n + \left( B^{(k)} - D^{(k)} \right) \sigma_{33}^n \right] + \mathbf{q}_k^n \sigma_{33}^n, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (49)$$

где

$$\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2} \equiv \boldsymbol{\sigma}_k^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^{n-1}, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (50)$$

В соответствии с (50) и учетом предположений (47) вектор-столбец  $\boldsymbol{\sigma}_k^{n-1/2}$  в правой части равенства (49) теперь известен. Компоненты матриц  $\mathbf{Z}_k$ ,  $\mathbf{V}_k$  и вектор-столбцов  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{q}_k$  зависят от времени (см. (43), (45) и (46)). Из соотношения (49) в момент времени  $t_n$  окончательно получаем определяющее уравнение для  $k$ -го компонента композиции

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n = \mathbf{B}_k^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n + \mathbf{p}_k^n, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (51)$$

где

$$\mathbf{B}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{Z}_k^n, \quad \mathbf{p}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left\{ \mathbf{V}_k^{n-1/2} \boldsymbol{\sigma}_k^n + \mathbf{w}_k^n \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33}^n + \left( B^{(k)} - D^{(k)} \right) \sigma_{33}^n \right] + \mathbf{q}_k^n \sigma_{33}^n \right\}, \quad \bar{\mathbf{V}}_k^n \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^n; \quad (52)$$

$\mathbf{I}$  — единичная  $5 \times 5$ -матрица;  $\bar{\mathbf{V}}_k^{n-1}$  — матрица, обратная  $5 \times 5$ -матрице  $\bar{\mathbf{V}}_k^n$ . При  $t = t_n$  матрицы  $\mathbf{Z}_k$  и  $\mathbf{V}_k$ , векторы-столбцы  $\mathbf{w}_k$ ,  $\mathbf{q}_k$  и величины  $B^{(k)}$ ,  $D^{(k)}$  в (41) (см. выражения (43), (45) и (46)), а значит, согласно (52),  $5 \times 5$ -матрица  $\mathbf{B}_k^n$  и 5-компонентный вектор-столбец  $\mathbf{p}_k^n$  предполагаются линеаризованными по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости [34]. Следовательно, на каждой итерации этого метода в момент времени  $t_n$  вектор  $\mathbf{p}_k^n$  в (51) при учете (50) и (52) является известным. При  $\mathbf{p}_k^n = \mathbf{0}$  равенство (51) редуцируется в определяющее матричное соотношение ТПРХ (см. формулу (16) в [15]).

Линеаризованные уравнения (51) формально совпадают с соотношениями Дюамеля–Неймана для неоднородной анизотропной среды [13], где компоненты вектора-столбца  $\mathbf{p}_k^n$  условно можно трактовать как известные на текущей итерации при  $t = t_n$  скорости температурных напряжений. Так как исходные допущения 1–5 аналогичны гипотезам, принятым в [15, 32], то, повторяя рассуждения и выкладки из [15, 32], в данный момент времени  $t_n$  на текущей итерации из (51) получаем линеаризованное матричное соотношение, описывающее вязкоупругопластическое деформирование КМ-пластины:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^n = \mathbf{B}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n + \mathbf{p}^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (53)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &\equiv (\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_k \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_k \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \\ \mathbf{H} &\equiv \omega_0 \mathbf{I} + \sum_k \omega_k \mathbf{E}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_k \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \boldsymbol{\zeta}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (54)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  — 5-компонентные векторы-столбцы скоростей усредненных напряжений  $\dot{\sigma}_{ij}$  и деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  в композиции, по структуре аналогичные (44);  $\mathbf{B}, \mathbf{E}_k, \mathbf{C}_k$  —  $5 \times 5$ -матрицы;  $\mathbf{D}_k^{-1}, \mathbf{H}^{-1}$  — матрицы, обратные  $\mathbf{D}_k$  и  $\mathbf{H}$   $5 \times 5$ -матрицам;  $\mathbf{p}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\zeta}_k$  — 5-компонентные векторы-столбцы. Элементы  $c_{ij}^{(k)}, d_{ij}^{(k)}$  матриц  $\mathbf{C}_k, \mathbf{D}_k$  и компоненты  $\zeta_i^{(k)}$  векторов-столбцов  $\boldsymbol{\zeta}_k$  определяются так:

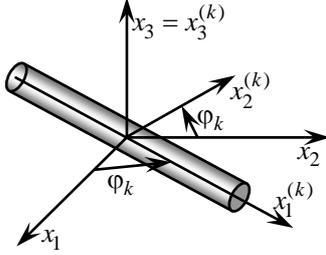


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волоком  $k$ -го семейства

$$\begin{aligned} c_{1j}^{(k)} &= d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^5 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \\ d_{ij}^{(k)} &= \sum_{l=1}^5 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \zeta_1^{(k)} = 0, \quad \zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^5 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}) \\ &(i = \overline{2, 5}, \quad j = \overline{1, 5}), \quad 1 \leq k \leq N; \end{aligned} \quad (55)$$

$p_l^{(k)}$  ( $l = \overline{1, 5}$ ) — компоненты вектора-столбца  $\mathbf{p}_k$  (см. (51));  $g_{il}^{(k)}, q_{ij}^{(k)}$  — элементы  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$   $5 \times 5$ -матриц, которые отвечают за преобразование векторов-столбцов  $\boldsymbol{\sigma}_k$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  (см. (44)) при переходе от глобальной системы координат  $x_i$  к локальной системе  $x_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ), связанной с арматурой  $k$ -го семейства (Рис. 2), то есть при повороте на угол  $\varphi_k$  относительно оси  $x_3 = x_3^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq N$ ). Ненулевые компоненты матриц  $\mathbf{G}_k$  и  $\mathbf{Q}_k$  находятся по формулам:

$$\begin{aligned} g_{11}^{(k)} &= g_{22}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = q_{22}^{(k)} = \cos^2 \varphi_k, \quad g_{12}^{(k)} = g_{21}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = q_{21}^{(k)} = \sin^2 \varphi_k, \quad g_{13}^{(k)} = -g_{23}^{(k)} = -q_{31}^{(k)} = q_{32}^{(k)} = \sin 2\varphi_k, \\ g_{32}^{(k)} &= -g_{31}^{(k)} = q_{13}^{(k)} = -q_{23}^{(k)} = \sin \varphi_k \cos \varphi_k, \quad g_{33}^{(k)} = q_{33}^{(k)} = \cos 2\varphi_k, \quad g_{44}^{(k)} = g_{55}^{(k)} = q_{44}^{(k)} = q_{55}^{(k)} = \cos \varphi_k, \\ g_{45}^{(k)} &= -g_{54}^{(k)} = q_{45}^{(k)} = -q_{54}^{(k)} = \sin \varphi_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (56)$$

В равенствах (54) и (55) для упрощения записи опущен верхний индекс  $n$  у  $5 \times 5$ -матриц.

Как и в [15, 32], при выводе соотношений (53) и (54) попутно получаются линейризованные матричные равенства:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (57)$$

В текущий момент времени  $t_n$  на данной итерации первое равенство из (57) определяет скорости деформаций связующего материала  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$  через скорости усредненных деформаций композиции  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Второе соотношение из (57) связывает скорости деформаций арматуры  $k$ -го семейства  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k$  со скоростями деформаций связующего  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ , то есть, в конечном счете, с  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ .

Подстановка выражений (57) в (42) при учете равенств (44), (48), (51) и предположений (47) позволяет вычислить и скорость линейной деформации каждого компонента композиции  $\dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}$  в поперечном направлении пластины. Усредняя, согласно допущению 4, скорости деформаций  $\dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}$  по формуле, аналогичной (38), при необходимости находим скорость усредненной поперечной линейной деформации  $\dot{\varepsilon}_{33}$  КМ-пластины.

В соответствии с формулами (54), (55) и (45) при  $t = t_n$  на текущей итерации матрицы  $\mathbf{B}, \mathbf{H}^{-1}$  и  $\mathbf{E}_k$ , векторы-столбцы  $\mathbf{p}, \mathbf{g}, \mathbf{r}_k, \boldsymbol{\zeta}_k$  и величины  $z^{(k)}, B^{(k)}, D^{(k)}$  в соотношениях (53), (57) и (42) известны.

Если материалы всех компонентов композиции не обладают вязкоупругими свойствами, то есть  $\eta^{(k)} \rightarrow \infty$  и  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty, 0 \leq k \leq N$  (см. (45)), то в (53) согласно (54), (55)  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ , и соотношение (53) редуцируется в определяющее матричное уравнение для перекрестно-армированной композиции,

выведенное ранее в рамках ТПРХ (см. формулу (32) в [15]). Таким образом, равенство (53) является обобщением структурных соотношений, построенных в [15].

В работе [15] показано, что если неупругое деформирование компонентов композиции описывается соотношениями ТПРХ, то при наличии на лицевых поверхностях КМ-пластины внешних касательных сил в рамках теории Редди нельзя построить явную численную схему типа «крест» так, чтобы соответствующие граничные условия на лицевых поверхностях выполнялись. При отсутствии же таких касательных сил схема «крест» реализуема. Этот результат переносится и на более общий случай вязкоупругопластического поведения компонентов композиции, поэтому далее исследуем частный, но важный для практики случай нагружения конструкции, когда к лицевым поверхностям прикладываются только нормальные внешние силы. Тогда, учитывая геометрическую нелинейность задачи в приближении Кармана, для усредненных деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и перемещений  $U_i$  точек КМ-пластины в рамках изгибной теории Редди используем следующие аппроксимации [15]:

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \frac{x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2)(\partial_i \varepsilon_{j3}^0 + \partial_j \varepsilon_{i3}^0) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}); \quad (58)$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + \frac{2x_3}{3h^2}(3h^2 - x_3^2) \varepsilon_{i3}^0, \quad U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0 \quad (i, j = 1, 2), \quad (59)$$

где  $w$  — прогиб;  $u_i$  — тангенциальные перемещения точек срединной плоскости ( $x_3 = 0$ ) в направлениях  $x_i$ ;  $\varepsilon_{i3}^0$  — деформации поперечных сдвигов в точках той же плоскости;  $t_0$  — начальный момент времени  $t$ ;  $\partial_i$  — оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$ . В равенствах (58) и (59) неизвестными являются функции  $w$ ,  $u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^0$ , зависящие от двух пространственных переменных  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) и времени  $t$ .

Уравнения динамического равновесия гибкой КМ-пластины при отсутствии массовых внешних нагрузок и учете выражений (59) имеют вид [15]:

$$2h\rho\ddot{w} = \sum_{i=1}^2 \partial_i (F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \quad \frac{2}{3} h^3 \rho \ddot{\gamma}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}, \quad (60)$$

$$2h\rho \ddot{u}_i = \sum_{j=1}^2 \partial_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) - (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) \partial_i w, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0,$$

где

$$\rho = \omega_0 \rho_0 + \sum_k \omega_k \rho_k, \quad F_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} dx_3, \quad F_{i3} = \int_{-h}^h \sigma_{i3} dx_3, \quad M_{ij} = \int_{-h}^h \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad (61)$$

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}) \equiv \frac{8}{5} \varepsilon_{i3}^0 - \partial_i w, \quad \varepsilon_{i3}^0(t, \mathbf{x}) = \frac{5}{8} (\gamma_i + \partial_i w), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0; \quad (62)$$

$\rho_0$ ,  $\rho_k$  — объемная плотность материала связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $F_{ij}$ ,  $F_{i3}$  — мембранные и поперечные силы;  $M_{ij}$  — изгибающие и крутящие моменты;  $\gamma_i$  — некоторые функции, введенные для удобства выкладок.

На одной кромке пластины (обозначим ее  $\Gamma_p$ ) должны быть заданы силовые граничные условия [15]:

$$\sum_{j=1}^2 n_j (F_{ij} - F_{j3} \partial_i w) = P_i \quad (i = 1, 2), \quad \sum_{i=1}^2 n_i \left( F_{i3} + \sum_{j=1}^2 F_{ij} \partial_j w \right) = P_{n3}, \quad (63)$$

$$M_{11} n_1^2 + M_{22} n_2^2 + 2M_{12} n_1 n_2 = M_{nn}, \quad (M_{22} - M_{11}) n_1 n_2 + M_{12} (n_1^2 - n_2^2) = M_{nt}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad t \geq t_0,$$

а на другой части кромки (обозначим ее  $\Gamma_u$ ) — кинематические условия (см. (59) и (62)):

$$w(t, \mathbf{x}) = w_*(t, \mathbf{x}), \quad 2hu_i(t, \mathbf{x}) = \bar{u}_i(t, \mathbf{x}), \quad \frac{2}{3} h^3 \gamma_i(t, \mathbf{x}) = \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0 \quad (i = 1, 2). \quad (64)$$

При  $t = t_0$  необходимо знать начальные условия [15]:

$$\begin{aligned}
 w(t_0, \mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = \dot{w}_0(\mathbf{x}), \quad 2hu_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3}h^3\dot{\gamma}_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}), \\
 2h\dot{u}_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \frac{2}{3}h^3\dot{\gamma}_i(t_0, \mathbf{x}) = \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (i = 1, 2).
 \end{aligned}
 \tag{65}$$

Здесь:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_i(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{u}}_i(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{i*}(t, \mathbf{r}) x_3 dx_3, \quad \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{u}}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3, \\
 \bar{v}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) dx_3, \quad \bar{\bar{v}}_{0i}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3 dx_3 \quad (i = 1, 2), \quad n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{66}$$

Также на границах известны:  $P_i$  — на кромке  $\Gamma_p$  мембранные силы, действующие в направлениях  $x_i$ ;  $P_{n3}$  — на  $\Gamma_p$  поперечная сила;  $M_{nn}$ ,  $M_{n\tau}$  — на кромке  $\Gamma_p$  изгибающий и крутящий моменты;  $w_*$  — на кромке  $\Gamma_u$  прогиб;  $U_{i*}$  — на торцевой поверхности конструкции перемещения в тангенциальных направлениях  $x_i$ ;  $w_0$ ,  $\dot{w}_0$ ,  $U_{0i}$ ,  $V_{0i}$  ( $i = 1, 2$ ) — перемещения и скорости точек пластины в начальный момент времени  $t_0$ ;  $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$  — контур, ограничивающий область  $\Omega$ , занимаемую конструкцией в плане;  $\alpha$  — угол, задающий направление внешней нормали к  $\Gamma$ . На кромке пластины  $\Gamma$  может быть задано и пять смешанных граничных условий из (63) и (64), например в случае ее шарнирного опирания [7].

#### 4. Численный метод расчета

Как отмечалось в разделе 3, для численного интегрирования рассматриваемой задачи предполагается использовать метод шагов по времени [10, 15, 20, 21, 27, 28, 30]. В связи с этим считаем, что в дискретные моменты времени  $t_m$ , кроме (47), уже известны значения следующих функций

$$\begin{aligned}
 u_l(\mathbf{x}) \equiv u_l(t_m, \mathbf{x}), \quad w(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad \gamma_l(\mathbf{x}) \equiv \gamma_l(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\
 \sigma_k^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), \quad l = 1, 2, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h.
 \end{aligned}
 \tag{67}$$

Тогда по формулам (61) в данный момент времени  $t_n$  можем вычислить все силовые факторы  $F_{ij}$ ,  $F_{i3}$ ,  $M_{ij}$  и внешние нагрузки, которые входят в правые части уравнений (60) и граничные условия (63).

Как и в [15], для аппроксимации встречающихся производных по времени  $t$  используем центральные разности на 3-точечном шаблоне, что позволяет построить явную схему численного интегрирования исследуемой задачи. Замена в левых частях уравнений движения (60) вторых производных по времени их конечно-разностными аналогами при учете обозначений, аналогичных (47) и (67), приводит к равенствам:

$$\begin{aligned}
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) = \sum_{l=1}^2 \partial_l \left( F_{l3} + \sum_{j=1}^2 F_{lj} \partial_j w \right) + \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)}, \quad \frac{2h^3\rho}{3\Delta^2} \left( \gamma_i^{n+1} - 2\gamma_i^n + \gamma_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij} - F_{i3}, \\
 \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( F_{ij} - F_{j3} \partial_j w \right) - \left( \sigma_{33}^{n(+)} - \sigma_{33}^{n(-)} \right) \partial_i w \quad (i = 1, 2, \quad n = 1, 2, 3, \dots), \quad \mathbf{x} \in \Omega,
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

Так как правые части в (68) известны, то из этих уравнений с функциями (67) и необходимых граничных условий (63) и (64) можно по явной схеме определить значения неизвестных функций  $w^{n+1}$ ,  $u_i^{n+1}$  и  $\gamma_i^{n+1}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . По известным функциям  $w^{n+1}$ ,  $u_i^{n+1}$  и  $\gamma_i^{n+1}$  с использованием формул (58) при учете (62) можно вычислить усредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$ . В силу того, что при  $t = t_{n-1}$  деформации  $\varepsilon_{ij}^{n-1}$  уже известны (см. (58) и (62) и предположения (67)), на основе формул численного дифференцирования по времени  $t$ , можно установить и скорости усредненных деформаций  $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$  (или  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$ ) в каждой точке КМ-конструкции в момент времени  $t_n$ . Затем по формулам (57) и (42), принимая во внимание обозначения (44), последовательно вычисляем скорости деформаций компонентов

композиции  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^n$  и  $\dot{\varepsilon}_{33}^{(k)}$ , а на основании равенств (51) и (39) — скорости напряжений  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k^n$  и  $\dot{\sigma}_{33}^{(k)}$  ( $0 \leq k \leq N$ ) в тех же материалах. Далее решение рассматриваемой задачи строится совершенно так же, как и в [15].

В разделе 3 уже отмечалось, что матричные соотношения (51), (53) и (57) предполагаются линеаризованными, поэтому в момент времени  $t_n$  в каждой точке конструкции (не зависимо от соседних точек) необходимо уточнять матрицы  $\mathbf{B}_k$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}^{-1}$ ,  $\mathbf{E}_k$  и векторы-столбцы  $\mathbf{p}_k$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{r}_k$  и  $\boldsymbol{\zeta}_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) при (52), (54)–(56), (45) и (46). Для этого используем итерационный процесс, аналогичный методу переменных параметров упругости [34] и качественно похожий на процедуру «посадки» напряженного состояния на поверхность нагружения [10]. Предварительно проведенные расчеты показывают, что для получения приемлемых в инженерных приложениях результатов достаточно произвести две итерации по этому методу.

Согласно структуре левых частей равенств (68) для начала проведения расчетов по разработанной численной схеме требуется предварительно определить значения функций  $w^m$ ,  $u_i^m$  и  $\gamma_i^m$  ( $m = 0, 1$ ). Функции  $w^0$ ,  $u_i^0$  и  $\gamma_i^0$  однозначно задаются начальными условиями (65) при учете (66), а функции  $w^1$ ,  $u_i^1$  и  $\gamma_i^1$  вычисляются по формуле Тейлора [15]:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{w}^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{w}^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, & u_i(\mathbf{x}) &= u_i^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{u}_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{u}_i^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0, \\ \gamma_i(\mathbf{x}) &= \gamma_i^0(\mathbf{x}) + \Delta \dot{\gamma}_i^0(\mathbf{x}) + \frac{\Delta^2}{2} \ddot{\gamma}_i^0(\mathbf{x}) + O(\Delta^3) \approx 0 \quad (i=1, 2), & \mathbf{x} &\in \Omega, \end{aligned} \quad (69)$$

где производные  $\dot{w}^0$ ,  $\dot{u}_i^0$  и  $\dot{\gamma}_i^0$  известны из начальных условий (65), а ускорения  $\ddot{w}^0$ ,  $\ddot{u}_i^0$  и  $\ddot{\gamma}_i^0$  можно найти из уравнений движения (60) в начальный момент времени  $t_0$ . Приближенные равенства в (69) выполняются с точностью порядка  $\Delta^3$ , если при  $t=t_0$  пластина покоится и внешние нагрузки  $\sigma_{33}^{(\pm)}$  отсутствуют.

Если область  $\Omega$ , занимаемая конструкцией в плане, является прямоугольной, то, заменяя в равенствах (63) и (68) производные  $\partial_i(\bullet)$  их конечно-разностными аналогами, в конечном итоге получаем явную численную схему типа «крест» [10, 15]. Если же область  $\Omega$  имеет неканоническую форму, то для дискретизации соотношений (63) и (68) по пространственным переменным  $x_i$  ( $i=1, 2$ ) можно использовать вариационно-разностный подход, рекомендуемый в [10]. Необходимые условия устойчивости разработанной численной схемы типа «крест» вытекают из критерия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви [10] и для обсуждаемой КМ-пластины совпадают с неравенствами (60) из [15].

## 5. Обсуждение результатов расчетов

В качестве конкретного примера рассмотрим динамическое поведение относительно толстой прямоугольной пластины ( $\Omega: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b; a=3b, b=10$  см,  $2h=2$  см;  $h/b=1/10$ ). По всему контуру  $\Gamma = \Gamma_u$  конструкция жестко закреплена (см. (64) и (66) при  $w_* = U_{i*} \equiv 0$ ) и в начальный момент времени  $t=t_0=0$  покоится (см. (65) и (66) при  $w_0 = U_{0i} \equiv 0, \dot{w}_0 = V_{0i} \equiv 0$  ( $i=1, 2$ )). Со стороны нижней лицевой поверхности пластина нагружена давлением, порожденным воздушной взрывной волной [27]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (70)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (71)$$

$t_{\max}$  — момент времени, в который нагрузка  $p(t)$  достигает максимального значения  $p_{\max} > 0$ ;  $t_{\min}$  — момент времени, при превышении которого  $p(t)$  можно считать пренебрежимо малым по сравнению с  $p_{\max}$  (соотношение (71) соответствует случаю, когда  $p(t_{\min}) = 0,01 p_{\max}$ ). На основании экспериментальных данных [27] примем  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс.

Пластина изготовлена из эпоксидной смолы и усилена стекловолокнами марки S-994 [35, 36]. Мгновенное упругопластическое деформирование материалов компонентов композиции на стадии активного нагружения характеризуется диаграммой с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (72)$$

где  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  — осевые напряжение и деформация;  $E_s^{(k)}$  — модуль линейного упрочнения  $k$ -го компонента композиции;  $\sigma_s^{(k)}$ ,  $\varepsilon_s^{(k)}$  — предел текучести и соответствующая ему мгновенная деформация. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции представлены в таблице (формулы пересчета характеристик мгновенной диаграммы  $\tau \sim \gamma$  при чистом сдвиге по данным диаграммы мгновенного деформирования при растяжении и сжатии (72) приведены в [15, 30]). Согласно табличным данным  $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$ , то есть объемная вязкость компонентов композиции не учитывается (см. (2)).

Физико-механические характеристики компонентов композиции пластины [35, 36]

Материал	$\rho$ , кг / м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_s$ , ГПа	$\eta$ , МПа·с	$\mu$ , МПа·с
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114	50	$\infty$
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230	200	$\infty$

Рассматриваются две однородные ортогональные структуры армирования ( $N = 2$ ): I)  $\varphi_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = 0$ ,  $\omega_1 = 0,1$  и  $\omega_2 = 0,3$ ; II)  $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$  и  $\omega_1 = \omega_2 = 0,2$ . При структуре I волокна укладываются вдоль сторон пластины (Рис. 1 и Рис. 3а), причем в направлении  $Ox_2$  арматура укладывается с большей плотностью. При структуре II волокна обоих семейств наносятся с одинаковой плотностью, но траектории армирования повернуты относительно сторон пластины на угол  $\pi/4$  (Рис. 3б). Общий расход волокон в обеих структурах армирования одинаков.

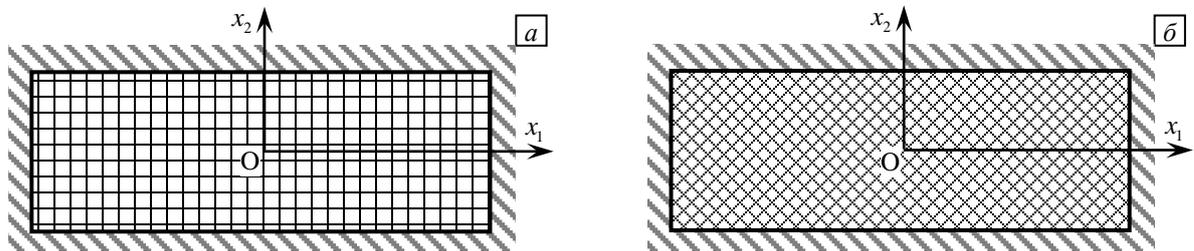
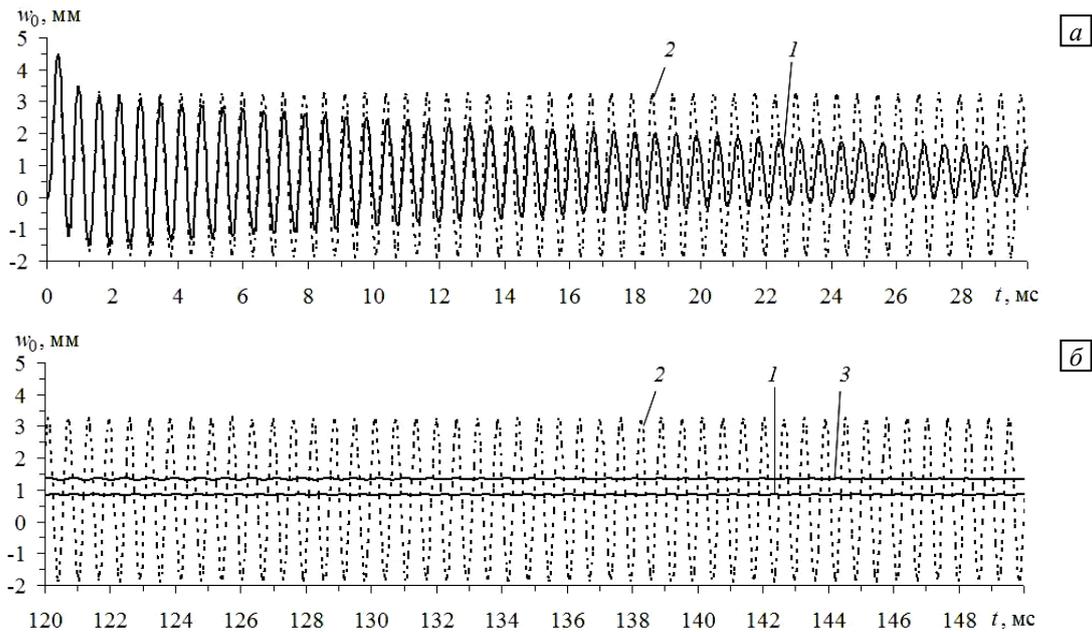


Рис. 3. Ортогональное армирование прямоугольной удлиненной пластины: продольно-поперечное армирование (а); повернутая структура армирования (б)

На рисунке 4 изображены осцилляции центральных точек армированных пластин ( $w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$ ), рассчитанные при  $p_{\max} = 7$  МПа (см. (70)) вблизи начального момента времени (Рис. 4а) и вблизи  $t = 150$  мс (Рис. 4б). Кривые 1 (сплошные линии) получены в рамках модели вязкоупругопластического деформирования КМ-пластины со структурой армирования I; кривые 2 (пунктирные линии) приведены для сравнения и определены при тех же условиях, но в рамках ТПРХ [15] ( $\eta^{(k)} \rightarrow \infty$  ( $k = 0, 1, 2$ )); кривая 3 (сплошная линия) рассчитана при тех же условиях, что и кривая 1, но в случае структуры армирования II (на рисунке 4а кривая 3 не изображена, чтобы не загромождать его; ее поведение при  $0 \leq t \leq 30$  мс качественно аналогично поведению кривой 1).

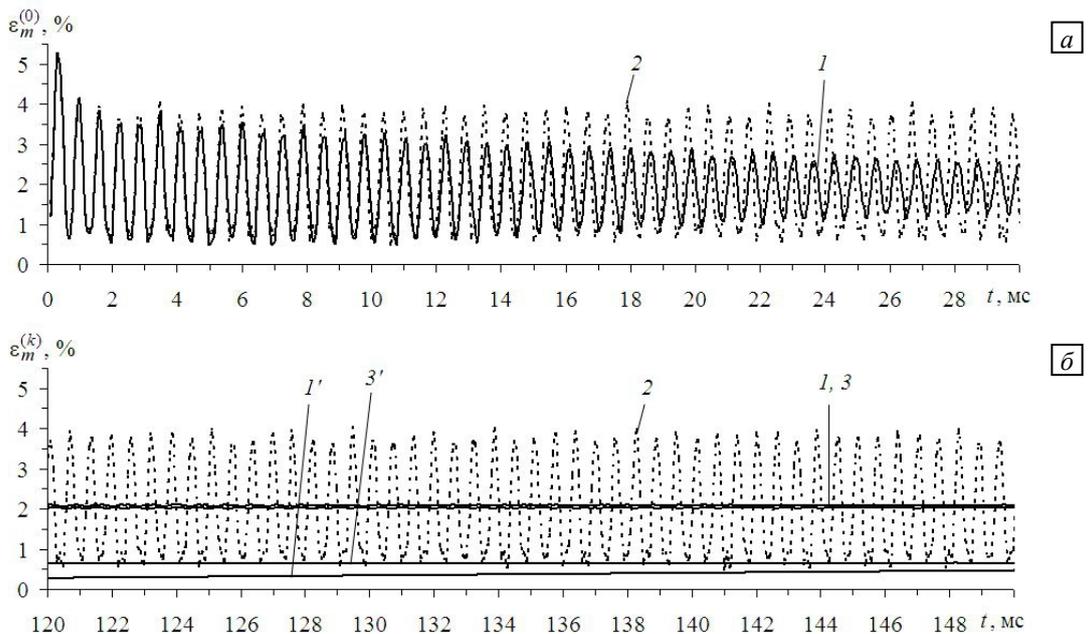
Поведение кривой 2 на рисунке 4 свидетельствует о том, что при расчетах в рамках ТПРХ пластина неограниченно долго осциллирует в окрестности нового положения, определяемого величиной остаточного прогиба, однако точно установить величину остаточного прогиба по этой теории невозможно. Поведение же кривой 1 показывает, что, согласно расчету по разработанной модели вязкоупругопластического деформирования КМ-пластины ее колебания со временем затухают и к моменту  $t = 150$  мс практически прекращаются, что позволяет рассчитать остаточный прогиб (в данном случае он порядка 1 мм). Аналогично, поведение кривой 3 на рисунке 4б свидетельствует о том, что при структуре армирования II остаточный прогиб равен примерно 1,5 мм. Таким образом, пластина со структурой I обладает податливостью в поперечном направлении меньшей, чем КМ-конструкция со структурой II



**Рис. 4.** Осцилляции центральных точек армированных пластин вблизи различных моментов времени, мс: около  $t=0$  (а); около  $t=150$  (б)

при одинаковом общем расходе арматуры. Следовательно, имеет смысл осуществлять целевое управление структурами армирования пластин при их динамическом неупругом деформировании.

На рисунке 5 изображены рассчитанные для тех же случаев осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций  $\varepsilon_*^{(k)}$  ( $\varepsilon_m^{(k)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(k)}(t, \mathbf{r})$ ,  $|x_1| \leq a$ ,  $|x_2| \leq b$  и  $|x_3| \leq h$ ) в связующем материале ( $k=0$ ; кривые 1–3) и в арматуре первого семейства ( $k=1$ ; кривые 1' и 3'). Кривые 1–3 на рисунке 5 вычислены при тех же условиях, что и аналогичные кривые на рисунке 4, причем кривые 1 и 3 на рисунке 5б визуальнo почти неразличимы, но кривая 3 находится все-таки чуть выше кривой 1. Кривые 1' и 3' получены для той же КМ-пластины, что и кривые 1 и 3 соответственно.



**Рис. 5.** Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций компонентов композиции армированной пластины вблизи моментов времени, мс: около  $t=0$  (а); около  $t=150$

**З а м е ч а н и е.** На первый взгляд может показаться, что преобразование определяющих соотношений (41) к матричному виду (51) на основе равенств (48)–(50) излишне. Действительно, уравнения (41) в момент времени  $t_н$  можно сразу записать в форме (51), если вместо (52) прибегнуть к выражению:

$$\mathbf{B}_k^n \equiv \mathbf{Z}_k^n, \quad \mathbf{p}_k^n \equiv \mathbf{V}_k^n \boldsymbol{\sigma}_k^n + \mathbf{w}_k^n \left[ \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{33}^n + \left( \mathbf{B}^{(k)n} - \mathbf{D}^{(k)n} \right) \boldsymbol{\sigma}_{33}^n \right] + \mathbf{q}_k^n \boldsymbol{\sigma}_{33}^n, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (73)$$

Однако оказалось, что разработанная в разделе 4 численная схема типа «крест» при использовании соотношений (51) с учетом (73) проявляет неустойчивость, несмотря на то, что необходимые условия устойчивости этой схемы выполняются. Для демонстрации этого факта на рисунке 6 изображены зависимости  $w_0(t)$  и  $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ , рассчитанные для однородной изотропной, изготовленной из эпоксидной смолы пластины прежних размеров при  $p_{\max} = 0,6$  МПа и  $\eta^{(0)} = 1$  МПа·с (остальные характеристики материала те же, что указаны в таблице). Сплошные кривые 1 на рисунке 6 получены с использованием определяющего соотношения (51) при учете (52), а пунктирные кривые 2 — при учете выражений (73). Поведение кривых 2 на рисунке 6 свидетельствует о неустойчивости численной схемы типа «крест», основанной на применении формул (73). Следует заметить, что в настоящем разделе во всех расчетах шаг по времени принимался  $\Delta t = 0,5$  мкс, и в прямоугольной области  $\Omega$  вводилась равномерная сетка с шагами  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 2b/100 = 0,2$  мм. При такой дискретизации области интегрирования задачи необходимые условия устойчивости схемы типа «крест» выполняются с запасом (см. формулу (60) в [15]).

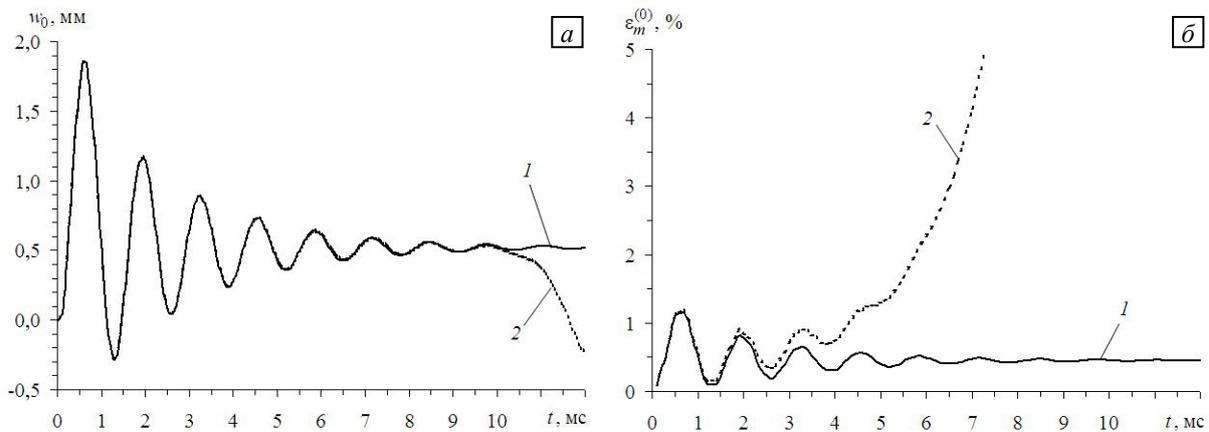


Рис. 6. Зависимость от времени прогиба центральной точки (а) и максимального значения интенсивности деформаций (б) изотропной пластины из эпоксидной смолы

## 6. Заключение

Разработанная структурная модель вязкоупругопластического деформирования перекрестно-армированных в своей плоскости пластин позволяет рассчитывать затухающие колебания таких конструкций при действии интенсивных кратковременных внешних нагрузок и устанавливать величины остаточных прогибов в них, а также остаточное НДС в компонентах композиции.

Расчеты показали, что величина остаточного прогиба и параметры остаточного НДС в компонентах композиции зависят от структуры армирования пластины. Следовательно, на множестве структур армирования можно осуществлять управление с целью выбора оптимальных параметров армирования, обеспечивающих, например, минимум остаточных перемещений или минимум интенсивности остаточных деформаций (напряжений) в одном из компонентов композиции (связующем).

Так как арматура запасает упругую энергию в значительном количестве (в силу больших значений пределов текучести), амплитуда колебаний конструкции вблизи начального момента времени во много раз больше величины остаточного прогиба. Аналогичное поведение характерно и для параметров, определяющих деформированное состояние компонентов композиции.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017–2020 годы (проект 23.4.1 — Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

## Литература

1. *Bannister M.* Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective // *Compos. Appl. Sci. Manuf.* 2001. Vol. 32. P. 901-910. DOI
2. *Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K.* Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // *Compos. Struct.* 2001. Vol. 53. P. 21-42. DOI
3. *Gibson R.F.* Principles of composite material mechanics / 3<sup>rd</sup> Ed. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. 686 p.

4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composites // *Front. Mech. Eng.* 2013. Vol. 8. P. 187-200. [DOI](#)
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрияшин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
6. Немировский Ю.В., Резников Б.С. Прочность элементов конструкций из композитных материалов. Новосибирск: Наука, 1986. 168 с.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
8. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
9. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
10. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
11. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis / 2<sup>nd</sup> Ed. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
12. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек // *Изв. АН. МТТ.* 1994. № 2. С. 33-42.
13. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
14. Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шнакова Ю.В. Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. М.: Физматлит, 2014. 196 с.
15. Янковский А.П. Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин // *Вычисл. мех. сплош. сред.* 2016. Т. 9, № 3. С. 279-297. [DOI](#)
16. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1945. Vol. 12. P. A69-A77.
17. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // *J. Appl. Phys.* 1951. Vol. 22. P. 316-323. [DOI](#)
18. Whitney J.M., Sun C.T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites // *J. Sound Vib.* 1973. Vol. 30. P. 85-97. [DOI](#)
19. Пикуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 535 с.
20. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading // *Compos. B Eng.* 2004. Vol. 35. P. 673-683. [DOI](#)
21. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // *Int. J. Non Lin. Mech.* 2011. Vol. 46. P. 807-817. [DOI](#)
22. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
23. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов: Справочник. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.
24. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Гюнал И., Егоров А.Г. Теоретико-экспериментальный метод определения параметров демпфирования на основе исследования затухающих изгибных колебаний тест-образцов. 1. Экспериментальные основы // *Механика композитных материалов.* 2014. Т. 50, № 2. С. 185-198. (English version [DOI](#))
25. Фрейденталь А., Геирингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
26. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
27. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. Struct.* 1987. Vol. 26. P. 1-15. [DOI](#)
28. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. Vol. 1. The basis. 707 p.
29. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
30. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. 352 с.
31. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
32. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель // *Механика композитных материалов.* 2010. Т. 46, № 5. С. 663-678. (English version [DOI](#))
33. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
34. Хажинский Г.М. Модели деформирования и разрушения металлов. М: Научный мир, 2011. 231 с.
35. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
36. Справочник по композитным материалам / Под ред. Дж. Любина. М.: Машиностроение, 1988. Кн. 1. 448 с.

## References

1. Bannister M. Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Compos. Appl. Sci. Manuf.*, 2001, vol. 32, pp. 901-910. [DOI](#)
2. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Compos. Struct.*, 2001, vol. 53, pp. 21-42. [DOI](#)
3. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics.* 3<sup>rd</sup> Ed. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012. 686 p.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composites. *Front. Mech. Eng.*, 2013, vol. 8, pp. 187-200. [DOI](#)
5. Solomonov Yu.S., Georgiyevskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnyye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]. М.: Физматлит, 2014. 408 p.

6. Nemirovskiy Yu.V., Reznikov B.S. *Prochnost' elementov konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Strength of elements of designs from composites materials]. Novosibirsk, Nauka, 1986. 168 p.
7. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya* [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]. Moscow, Nauka, 1987. 360 p.
8. Vasil'yev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of composite structures]. Moscow, Mashinostroyeniye, 1988. 272 p.
9. Bogdanovich A.E. *Nelineynyye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]. Riga, Zinatne, 1987. 295 p.
10. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynyye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy* [Nonlinear problems of dynamics composites designs]. Nizhniy Novgorod: Nizhniy Novgorod State University, 2002. 400 p.
11. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis / 2<sup>nd</sup> Ed.* Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
12. Kulikov G.M. Thermoelasticity of flexible multilayer anisotropic shells. *Mech. Solids*, 1994, vol. 29, no. 2, pp. 27-35.
13. Andreyev A. *Uprugost' i termouprugost' sloistnykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotoryye aspekty chislennogo analiza* [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis.]. Saarbrücken, Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 p.
14. Kaledin V.O., Aul'chenko S.M., Mitkevich A.B., Reshetnikova E.V., Sedova E.A., Shpakova Yu.V. *Modelirovaniye statiki i dinamiki obolocheknykh konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Simulation of statics and dynamics of shell structures made of composite materials]. Moscow, Fizmatlit, 2014. 196 p.
15. Yankovskii A.P. Applying the explicit time central difference method for numerical simulation of the dynamic behavior of elastoplastic flexible reinforced plates. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2017, vol. 58, pp. 1223-1241. [DOI](#)
16. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 1945, vol. 12, pp. A69-A77.
17. Mindlin R.D. Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates. *J. Appl. Phys.*, 1951, vol. 22, pp. 316-323. [DOI](#)
18. Whitney J.M., Sun C.T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *J. Sound Vib.*, 1973, vol. 30, pp. 85-97. [DOI](#)
19. Pikul' V.V. *Mekhanika obolochek* [Mechanics of shells]. Vladivostok, Dal'nauka, 2009. 535 p. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading. *Compos. B Eng.*, 2004, vol. 35, pp. 673-683. [DOI](#)
20. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading. *Compos. B Eng.*, 2004, vol. 35, pp. 673-683. [DOI](#)
21. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. Non Lin. Mech.*, 2011, vol. 46, pp. 807-817. [DOI](#)
22. Zubchaninov V.G. *Mekhanika protsessov plasticheskikh sred* [Mechanics of processes of plastic mediums]. Moscow, Fizmatlit, 2010. 352 p.
23. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveyev V.V. *Vibropogloshchayushchiye svoystva konstruksionnykh materialov: Spravochnik* [Vibration absorption properties of structural materials: a Handbook]. Kiyev, Naukova dumka, 1971. 375 p.
24. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gyunal I., Egorov A.G. Theoretical-experimental method for determining the parameters of damping based on the study of damped flexural vibrations of test specimens. 1. Experimental basis. *Mech. Compos. Mater.*, 2014, vol. 50, pp. 127-136. [DOI](#)
25. Flugge S. (ed.) *Handbuch der Physik. Band VI: Elastizitat und Plastizitat* [Handbook of Physics. Vol. 6: Elasticity and Plasticity]. Springer-Verlag, 1958. 642 p. [DOI](#)
26. Kolarov D., Baltov A., Boncheva N. *Mekhanika plasticheskikh sred* [Mechanics of plastic mediums]. Moscow, Mir, 1979. 302 p.
27. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Comput. Struct.*, 1987, vol. 26, pp. 1-15. [DOI](#)
28. Zeinkiewicz O.C., Taylor R.L. *The finite element method. Vol. 1: The basis*. Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000. 707 p.
29. Sedov L.I. *Vvedeniye v mekhaniku sploshnoy sredy* [Introduction in mechanics of the continuous medium]. Moscow, Fizmatgiz, 1962. 284 p.
30. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogul'skiy I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoye resheniye dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel* [The numerical solution of dynamic problems elastic-plastic deformations of solids]. Novosibirsk, Siberian university, 2002. 352 p.
31. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* [Bases of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka, 1969. 420 p.
32. Yankovskii A.P. Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. *Mech. Compos. Mater.*, 2010, vol. 46, pp. 451-460. [DOI](#)
33. Dekker K., Verwer J.G. *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equation*. Amsterdam-New York-Oxford: North-Holland, 1984. 307 p.
34. Khazhinskiy G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov* [Model of deformation and fracture of metals]. Moscow, Nauchnyy mir, 2011. 231 p.
35. Karpinos D.M. (ed.) *Kompozitsionnyye materialy. Spravochnik* [Composite materials. Reference Book]. Kiyev, Naukova dumka, 1985. 592 p.
36. Lubin G. (ed.) *Handbook of composites*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982. 786 p.

Поступила в редакцию 11.02.2019; после доработки 14.03.2019; принята к опубликованию 16.03.2019

---

Сведения об авторе

Янковский Андрей Петрович, дфмн, внс, Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН (ИТИМ СО РАН), 630090, Новосибирск, ул. Институтская, д. 4/1; e-mail: lab4nemir@rambler.ru