

DOI: [10.7242/1999-6691/2019.12.1.5](https://doi.org/10.7242/1999-6691/2019.12.1.5)

УДК 534-143; 534.29; 622.765

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВИБРАЦИЙ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В АНСАМБЛЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ И ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В ЖИДКОСТИ

В.В. Коновалов, Т.П. Любимова

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Российская Федерация*

Известно, что линейно-поляризованные поступательные вибрации могут приводить к многократному увеличению сечения захвата осаждающихся твердых частиц всплывающим в жидкости одиночным газовым пузырьком. Данный факт имеет важное теоретическое и прикладное значение в использовании вибраций для интенсификации процесса флотации, в котором всплывающих пузырьков участвует множество. В настоящей работе в рамках двухмерной постановки задачи численно исследован захват твердых частиц ансамблем газовых пузырьков в жидкости, которая подвергается воздействию высокочастотных вибраций малой амплитуды. В качестве инструмента численного решения применен пакет ANSYS Fluent. Полученные поля осредненной и пульсационной компонент скорости течения обрабатывались затем собственным кодом с целью вычисления траекторий движения малых частиц из некоторого, расположенного в расчетном домене, «облака». При описании сил, действующих на частицу, учитывались присоединенная масса жидкости, сила тяжести с архимедовой силой, сила Стокса, наследственная сила Бассе, а также вибрационная сила, возникающая вследствие неоднородности пульсационного поля. Расчеты проводились для миллиметровых пузырьков воздуха в воде при характеристиках частиц, важных для процесса флотации. Показано, что влияние вибраций значительно ослабляется внутри ансамбля пузырьков в результате эффекта «экранирования», который в полной мере проявляется при предельно высокой частоте вибраций и слабо зависит от расстояния между пузырьками. Однако вибрации не слишком высокой частоты, при которых проявляется сжимаемость газа в пузырьках, при достаточной интенсивности их возбуждения, способны все же проникать вглубь объема жидкости и тем самым увеличивать область захвата частиц.

*Ключевые слова:* процесс флотации, вибрации, жидкость, ансамбль газовых пузырьков, захват твердых частиц

## NUMERICAL STUDY OF THE EFFECT OF VIBRATIONS ON THE INTERACTION IN AN ENSEMBLE OF GAS BUBBLES AND SOLID PARTICLES IN A LIQUID

V.V. Kononov and T.P. Lyubimova

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russian Federation*

It is known that linearly polarized translational vibrations can lead to a multiple increase in the capture cross section of deposited solid particles by a single gas bubble suspended in a liquid. This fact is of great theoretical and practical importance in the use of vibrations to intensify the flotation process, in which, however, many pop-up bubbles are involved. In the present work, in the framework of a two-dimensional formulation of the problem, the capture of solid particles by an ensemble of gas bubbles in a liquid that is exposed to high-frequency vibrations of small amplitude is numerically investigated. The ANSYS Fluent package was used as a numerical solution tool. The fields of the averaged and pulsation components of the flow velocity obtained in it were then processed with the own code in order to calculate trajectories of the movement of small particles from some "cloud" located in the calculation domain. Of the forces acting on the particle, the added mass of the fluid, the force of gravity with the Archimedean force, the Stokes force, the hereditary Basse force, and also the vibration force due to the inhomogeneity of the pulsation field were taken into account. The calculations were carried out for millimeter bubbles of air in water and the characteristics of the particles important for the flotation process. It is shown that the effect of vibrations is significantly weakened inside the arrangement of the ensemble of bubbles as a result of the "shielding" effect, which is fully manifested in the limit of a very high frequency of vibrations and weakly depends on the distance between the bubbles. However, vibrations of a not too high frequency, for which the effect of compressibility of a gas in a bubble is manifested, are capable of penetrating into the bulk of the liquid at a sufficient intensity, thereby increasing the area of capture of particles.

*Key words:* flotation process, vibrations, liquid, gas bubble ensemble, solid particle capture

### 1. Введение

Флотационный способ разделения, основанный на селективном прикреплении твердых частиц к поверхности пузырьков газа, из физико-химических методов является самым производительным. Он широко применяется для извлечения ценных компонентов в горнодобывающей отрасли, а также при очистке промышленных и бытовых сточных вод. Развитие многих технологических процессов, в том числе флотации, включает применение ультразвука. В связи с этим возникает необходимость в усовершенствовании способов передачи ультразвукового воздействия для обработки наибольшего рабочего объема жидкости.

В целях улучшения метода также актуальным является подробное исследование взаимодействия в вибрационном поле газовых пузырьков и твердых частиц, которое началось с работы [1]. Ее автором получено выражение для силы воздействия друг на друга пузырька и частицы, колеблющихся при условиях, что их движения независимы, а жидкость вдали от них неподвижна. В [2] дано выражение для силы, действующей на частицу в звуковом поле, рассеянном на находящемся от нее на большом

расстоянии пузырьке. Однако выражение корректно лишь для случая сферического звукового поля, создаваемого радиальными пульсациями изменяющего свой объем пузырька.

В [3] на основе выражения для вибрационной силы, взятого из [4], изучено взаимодействие в колеблющейся жидкости осаждающихся твердых частиц и всплывающего газового пузырька. Показано, что вибрации могут приводить к многократному увеличению сечения захвата таких частиц. Этот результат имеет важное прикладное значение для интенсификации посредством вибраций процесса флотации, в котором участвует большое количество пузырьков.

В настоящей работе получены данные о распространении вибрационного поля вглубь объема, занимаемого в жидкости всплывающими пузырьками газа, и на их основе оценена эффективность процесса захвата осаждающихся твердых частиц в зависимости от характеристик вибраций.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, состоящую из ансамбля всплывающих газовых пузырьков и осаждающихся твердых частиц в жидкости, подвергаемой действию высокочастотных малоамплитудных вибраций. Конфигурацию и компоненты системы можно видеть на рисунке. 1. Здесь:  $\mathbf{U}$  — вектор скорости всплытия газового пузырька;  $D$  — диаметр пузырька;  $L$  — характерное расстояние между пузырьками;  $\mathbf{g}$  — вектор ускорения силы тяжести;  $b$  и  $\omega$  — амплитуда скорости и циклическая частота вибраций;  $\rho$  и  $\eta$  — плотность и динамическая вязкость жидкости;  $\rho_s$  и  $d_s$  — плотность материала твердых частиц и их диаметр. В дальнейшем будут использоваться также радиус пузырька  $R$  и амплитуда вибраций  $a = b/\omega$ .

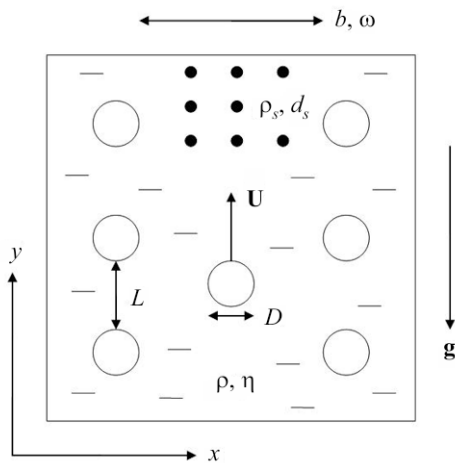


Рис. 1. Конфигурация и компоненты системы: пузырьки  $\circ$ , твердые частицы  $\bullet$

Кроме того, что свойства твердых и газовых включений в жидкости считаются фиксированными, используются следующие упрощающие допущения:

- задача течения жидкости рассматривается в двумерной постановке;
- скорость всплытия газовых пузырьков в жидкости считается заданной величиной, определяемой из модели «одинокного пузырька»;
- газовые пузырьки в процессе всплытия в жидкости в целом сохраняют цилиндрическую форму (в двухмерной постановке);
- вибрации перпендикулярны направлению всплытия пузырьков;
- течение жидкости разделяется на основную и пульсационную части, которые в высокочастотном приближении не связаны друг с другом;
- вязкость жидкости не учитывается при расчете ее течения в основном масштабе;
- вязкость жидкости учитывается по Стоксу при расчете движения осаждающихся в ней твердых частиц;
- твердые частицы имеют цилиндрическую форму (в двухмерной постановке);
- размер частиц считается малым;
- движение осаждающихся в жидкости твердых частиц не влияет на ее течение в основном масштабе.

Для эффективного разделения основной и вибрационной частей течения жидкости требуется выполнение критериев малости амплитуды вибраций

$$a \ll l, \quad l = \min(L, D)$$

и их высокой частоты [5]

$$\omega \gg \max(U/l, \eta/(\rho l^2)).$$

Для представления всплытия газовых пузырьков в жидкости воспользуемся обобщающей экспериментальные данные моделью из [6]. Приведем ее основные соотношения, адаптированные к обсуждаемому случаю. Следующим образом запишем, соответственно, числа Рейнольдса, Бонда и Моргана:

$$\text{Re} = \frac{\rho U D}{\eta},$$

$$\text{Bo} = \frac{gD^2(\rho - \rho_g)}{\sigma},$$

$$\text{Mo} = \frac{(\rho - \rho_g)g\eta^4}{\rho^2\sigma^3}.$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на поверхности раздела жидкость–газ. Данные числа входят в систему из четырех соотношений, в результате совместного разрешения которых определяется  $U$  — скорость всплытия газового пузырька в жидкости:

$$U = \left( \frac{4(\rho - \rho_g)gD}{3\rho c} \right)^{1/2},$$

$$c = e \cdot f,$$

$$e = \frac{10(1 + 1,3\text{Mo}^{1/6}) + 3,1\text{Bo}}{10(1 + 1,3\text{Mo}^{1/6}) + \text{Bo}},$$

$$f = \frac{48}{\text{Re}} \frac{\sqrt{1 + 0,25\text{Re}}}{\sqrt{1 + 0,25\text{Re} + 1}} \frac{3/2 + \eta/\eta_g}{1 + \eta/\eta_g} \frac{1 + 12\text{Mo}^{1/3}}{1 + 36\text{Mo}^{1/3}} + \frac{0,9\text{Bo}^{3/2}}{1,4(1 + 30\text{Mo}^{1/6}) + \text{Bo}^{3/2}};$$

где  $\rho_g$  и  $\eta_g$  — плотность и динамическая вязкость газа в пузырьке. Поскольку в обсуждаемом случае  $\eta_g \ll \eta$  и  $\rho_g \ll \rho$ , то ими можно пренебречь.

Число Вебера не входит в приведенные соотношения, но также является весьма важным, так как определяет величину деформации поверхности пузырька при его движении в объеме жидкости:

$$\text{We} = \frac{\rho DU^2}{\sigma}.$$

Расчеты показывают, что для миллиметровых пузырьков воздуха, всплывающих в чистой воде, (интересных с точки зрения процесса флотации [7]),

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \eta = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}, \quad \sigma = 7,28 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м}, \quad D \sim 10^{-3} \text{ м},$$

числа Вебера, Бонда и Рейнольдса лежат в следующих диапазонах:

$$\text{We} < 1, \quad \text{Bo} < 1, \quad 100 < \text{Re} < 1000.$$

Это говорит о выполнении заявленных требований, а именно малости деформации формы газовых пузырьков в процессе всплытия в жидкости и потенциальности основного течения, вызванного их движением. Скорость всплытия миллиметрового пузырька воздуха в чистой воде составляет примерно 0,25 м/с, что и принимается далее в расчетах.

### 3. Уравнения основного и вибрационного течений и граничные условия

Для проведения численного исследования задачи необходимо записать уравнения и граничные условия для основного и вибрационного течений жидкости. Форму вычислительного домена можно видеть на рисунке 1. Это прямоугольная область, имеющая, соответственно, внешние границы (горизонтальные и вертикальные) и внутренний объем с расположенными в нем одним либо несколькими пузырьками.

Зададим прямоугольную систему координат  $(x, y)$ . Вертикальную ось  $y$  направим противоположно вектору ускорения силы тяжести, а горизонтальную ось  $x$  соотнесем с направлением вибраций.

Определенные для системы на рисунке 1 уравнения и граничные условия приведены в таблице 1. Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, нормальный к поверхности пузырька. Как основное, так и вибрационное течения жидкости считаются потенциальными. Для них запишем уравнения Лапласа, содержащие потенциалы скорости  $\Phi$  и  $\phi$  (потенциал  $\phi$  вводится фактически для амплитуды скорости пульсационной части решения). На внешних границах области поставим граничные условия непротекания.

Таблица 1. Уравнения и граничные условия для основного и вибрационного течений жидкости (случай несжимаемых газовых пузырьков)

	Основное течение	Вибрационное течение
Уравнения для потенциала скорости		
В объеме жидкости	$\Delta\Phi = 0$	$\Delta\phi = 0$
Граничные условия		
Вертикальные внешние границы	$\partial\Phi/\partial x = 0$	$\partial\phi/\partial x = b$
Горизонтальные внешние границы	$\partial\Phi/\partial y = 0$	$\partial\phi/\partial y = 0$
Поверхность пузырька	$\partial\Phi/\partial n = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{n})$	$\phi = 0$

При этом для основного течения жидкости внешние границы считаем неподвижными, а для вибрационного течения — совершающими горизонтальные вибрации с амплитудой  $b$ .

Из таблицы видно, что на поверхности газового пузырька, всплывающего вверх со скоростью  $\mathbf{U}$ , направленной вдоль оси  $y$ , для основного течения жидкости ставится граничное условие непротекания, для вибрационного течения жидкости — граничное условие равенства нулю потенциала скорости.

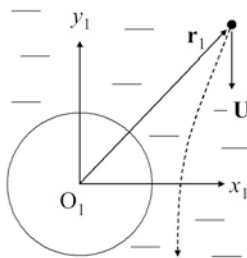


Рис. 2. Схема движения твердой частицы около всплывающего в жидкости газового пузырька

Последнее происходит из высокочастотного приближения без учета сжимаемости газа в пузырьке [5]. Ниже, при рассмотрении указанного эффекта, данное условие будет модифицироваться (Табл. 2).

Так как осаждающиеся в жидкости твердые частицы считаются не взаимодействующими друг с другом и идентичными по своим свойствам, достаточно рассмотреть одну из них. На поведение такой частицы влияют следующие силы: присоединенная масса жидкости, сила тяжести, сила Архимеда, сила Стокса, наследственная сила Бассэ, а также вибрационная сила [4].

Частицу удобнее рассматривать в системе отсчета  $(x_1, y_1)$ , связанной с одним из всплывающих в жидкости газовых пузырьков. Так как векторы скорости всех пузырьков сонаправлены и по величине равны друг другу, в этой системе отсчета картина

основного течения не меняется со временем (Рис. 2).

Определение траектории движения твердой частицы, взвешенной в жидкости, возможно из решения дифференциального уравнения [8]

$$(\rho_s + \rho/2) \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{3}{8} \rho \frac{\rho_s - \rho}{\rho_s + \rho/2} \nabla \mathbf{W}^2 - 18 \frac{1}{d_s^2} \eta \left( \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \mathbf{V}_1 \right) + (\rho_s - \rho) \mathbf{g} - \frac{9}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{d_s} \sqrt{\rho \eta} \int_0^t \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{d\tau^2} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}$$

со следующим начальным условием:

$$t = 0: \quad \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = -\mathbf{U}.$$

Здесь  $\mathbf{V}_1 = \nabla\Phi - \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W} = \nabla\phi$ , где  $\nabla$  — дифференциальный оператор набла.

#### 4. Численное решение

В качестве инструмента численного решения задачи использовался коммерческий вычислительный пакет ANSYS Fluent. При задании уравнения Лапласа для основного и вибрационного течений жидкости применялся механизм User-Defined Scalar. Граничные условия формировались с помощью механизма User-Defined Function.

На основе данных, полученных из решений для основного и вибрационного течений жидкости, строились траектории движения осаждающихся в ней твердых частиц. Рассматривалось множество частиц, составляющих некоторый кластер в расчетной области. Для каждой частицы определялась ее «судьба»: либо она считалась вынесенной за пределы расчетной области, либо была притянутой к одному из всплывающих газовых пузырьков. Таким образом находились области захвата твердых частиц всплывающими в жидкости газовыми пузырьками, пространственные характеристики которых и представляли интерес.

#### 4.1. Результаты для случая несжимаемого пузырька газа

Здесь представлены результаты расчетов для случая, когда сжимаемостью газа в пузырьках можно пренебречь, что соответствует пределу очень высокой частоты вибраций. Рассматривались миллиметровые пузырьки воздуха, всплывающие в чистой воде, для которых

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \eta = 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

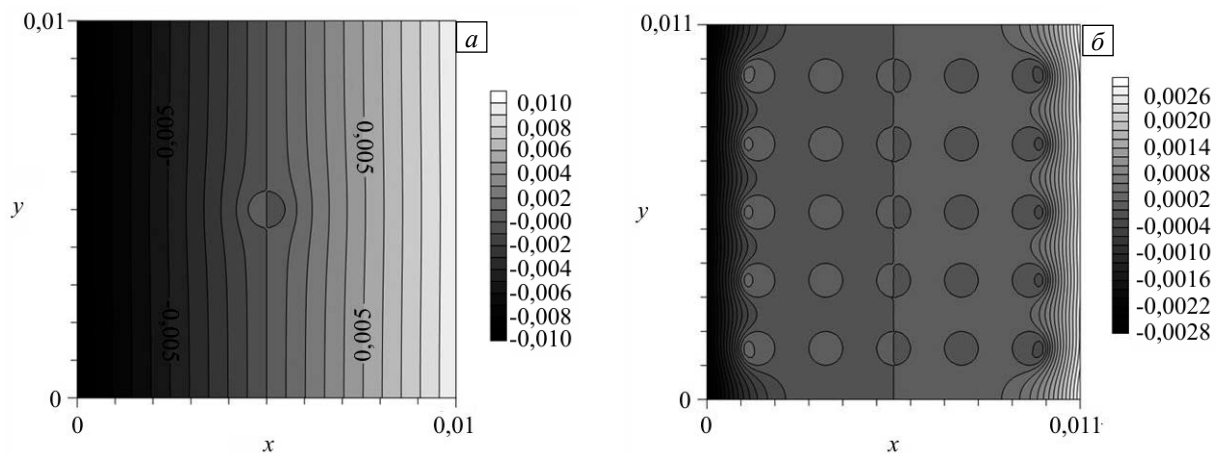
Скорость всплытия таких пузырьков принималась равной 0,25 м/с.

Выбирались параметры осаждающихся в жидкости твердых частиц:

$$d_s = 10^{-4} \text{ м}, \quad \rho_s = 2000 \text{ кг/м}^3.$$

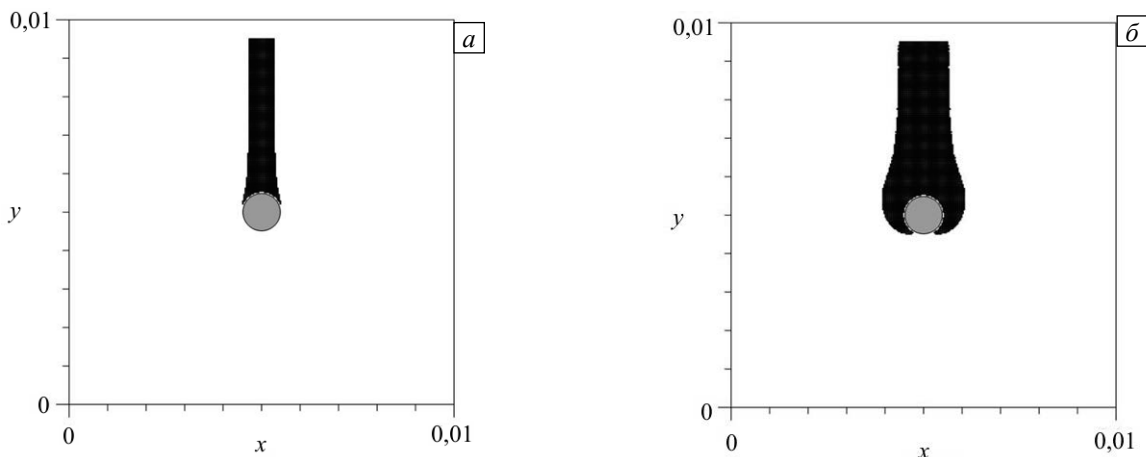
Расчеты выполнялись как для случая одиночного пузырька, так и для упорядоченного набора из 25 пузырьков. Расстояние между пузырьками в наборе (ансамбле) равнялось одному, двум либо четырем диаметрам пузырька. Скорость вибраций во всех случаях составляла 2 м/с.

На рисунке 3б продемонстрирован эффект «экранирования» газовых пузырьков друг другом, который возникает в ансамбле пузырьков и связан с граничным условием равенства нулю потенциала скорости вибрационного течения жидкости на поверхности несжимаемого газового пузырька.



**Рис. 3.** Характер потенциала вибрационного течения около одиночного пузырька (а) и около ансамбля пузырьков (б) при расстоянии между пузырьками в ансамбле, равном одному диаметру пузырька

Сравним далее, как область захвата осаждающихся твердых частиц всплывающими газовыми пузырьками изменяется в присутствии вибраций для случаев одиночного пузырька и набора пузырьков.



**Рис. 4.** Область захвата частиц одиночным пузырьком без вибраций (а), в присутствии вибраций (б)

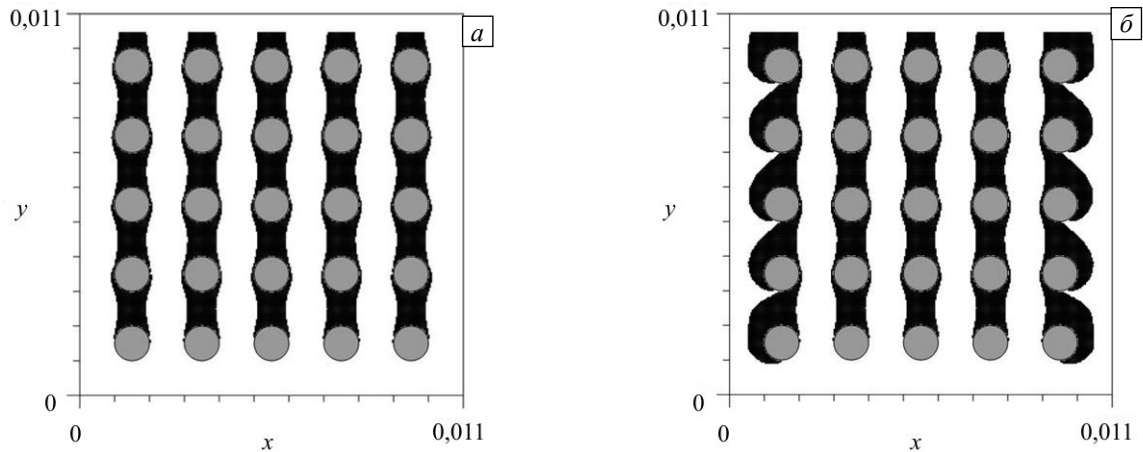


Рис. 5. Область захвата частиц ансамблем пузырьков с расстоянием между пузырьками, равным одному диаметру пузырька: без вибраций (а), в присутствии вибраций (б)

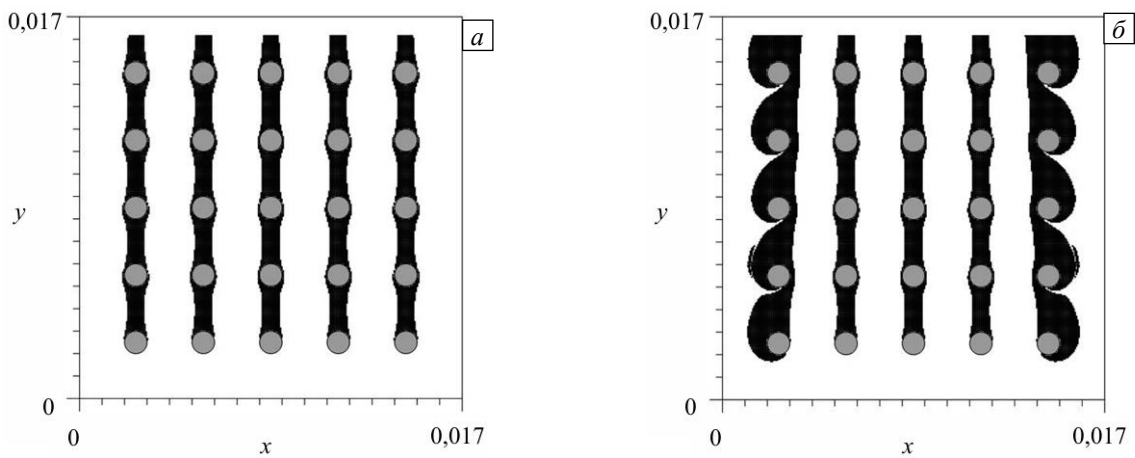


Рис. 6. Область захвата частиц ансамблем пузырьков с расстоянием между пузырьками, равным двум диаметрам пузырька: без вибраций (а), в присутствии вибраций (б)

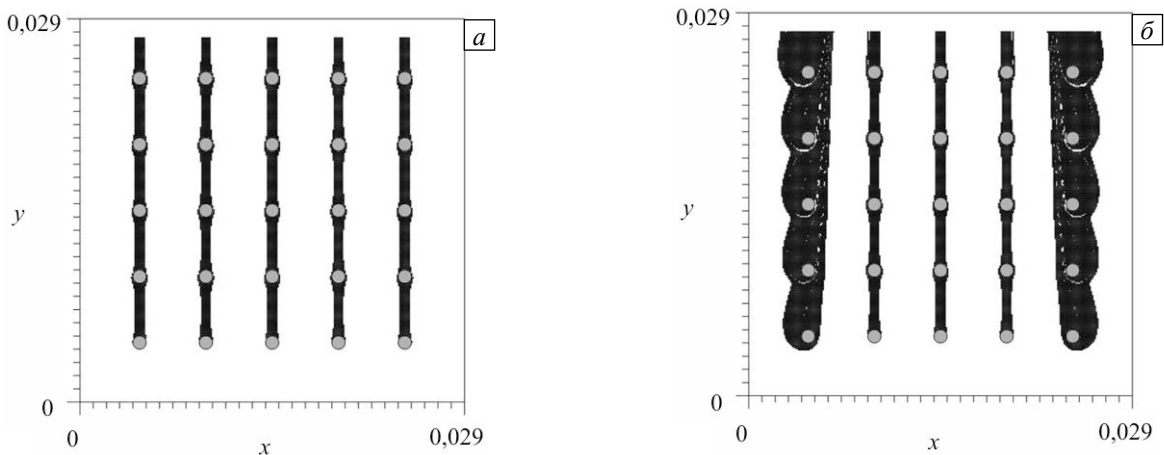


Рис. 7. Область захвата частиц ансамблем пузырьков с расстоянием между пузырьками, равным четырем диаметрам пузырька: без вибраций (а), в присутствии вибраций (б)

Из анализа рисунков 4–7 можно заключить следующее:

- высокочастотные вибрации малой амплитуды могут увеличивать сечение захвата осаждающихся твердых частиц одиночным газовым пузырьком, всплывающим в жидкости [3];
- в случае ансамбля газовых пузырьков эффект вибраций на процесс захвата твердых частиц значительно ослабляется из-за «экранирования» пузырьков друг другом;
- эффект «экранирования» газовых пузырьков друг другом практически не зависит от расстояния между пузырьками.

#### 4.2. Учет сжимаемости газа в пузырьках

Для того чтобы исследовать в вибрационном течении жидкости роль сжимаемости газа в пузырьках, было необходимо модифицировать уравнения и граничные условия, приведенные в таблице 1. При рассмотрении основного течения жидкости они остались прежними, а для вибрационного течения их вид изменился (см. Табл. 2).

Таблица 2. Уравнение и граничные условия для вибрационного течения жидкости (случай сжимаемых газовых пузырьков)

Потенциал скорости в объеме жидкости	$\Delta\phi = 0$
Граничные условия	
Вертикальные внешние границы	$\partial\phi/\partial x = b$
Горизонтальные внешние границы	$\partial\phi/\partial y = 0$
Поверхность пузырька	$i\omega\eta = \partial\phi/\partial n \quad i\omega\rho\phi = \Delta p \quad (i^2 = -1)$

Итак, для потенциала амплитуды скорости пульсаций  $\phi$  в объеме жидкости выполнялось уравнение Лапласа. Граничные условия на внешних границах расчетной области остались прежними. Появилась дополнительная переменная — возмущение формы поверхности пузырька  $\eta$ . Данное возмущение считалось малым, то есть везде производилась процедура линеаризации граничных условий и их снос на невозмущенную поверхность пузырька.

На поверхности пузырька ставились кинематическое и динамическое граничные условия. Капиллярными силами, действующими на поверхности пузырька, пренебрегали. В динамическое граничное условие входило изменение давления газа в пузырьке  $\Delta p$ , связанное с возмущениями его формы.

При выполнении следующего критерия:

$$\lambda = \frac{c_g}{\omega} \gg D,$$

то есть при условии, что длина акустической волны значительно превышает размер пузырька, давление газа в пузырьке является однородным. Считая газ в пузырьке адиабатическим, можно получить соотношение:

$$\Delta p = -\rho_g c_g^2 \frac{\Delta V_b}{V_b} = -\rho_g c_g^2 \frac{\int \eta dS}{\pi R^2},$$

где интеграл берется по поверхности пузырька.

В случае слабой сжимаемости жидкости разложение решения в ряд по волновому числу акустической волны приводит в главном порядке к «несжимаемой» задаче, представленной в таблице 1. Из условия разрешимости краевой задачи во втором порядке получается дополнительное условие

$$\int_V \phi dV = 0,$$

в котором интеграл берется по объему жидкости. Данное условие делает полностью определенным потенциал амплитуды скорости течения  $\phi$ , который иначе бы вычислялся лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

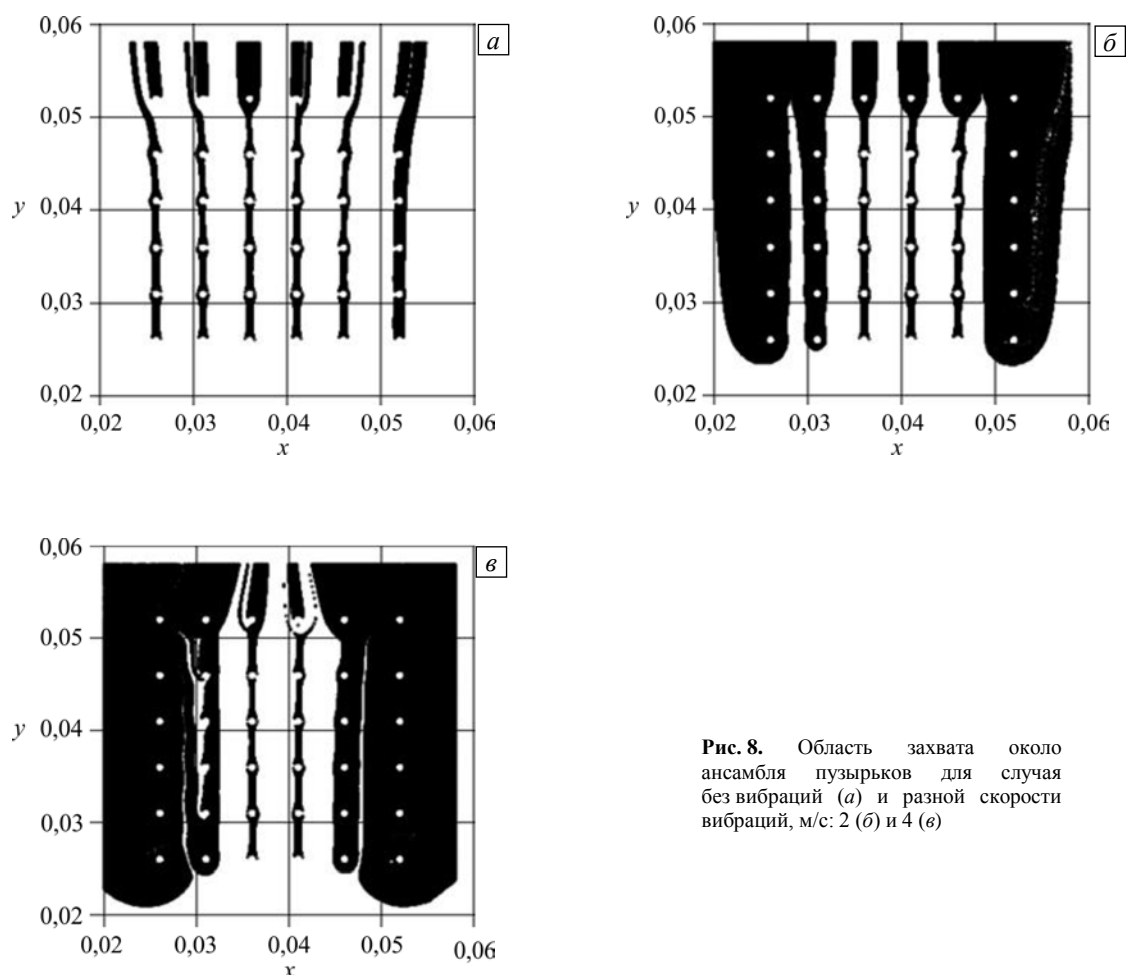
Вследствие очевидной трудности численного решения поставленной таким образом задачи (появилось дополнительное интегральное условие), будем решать похожую задачу со следующим граничным условием на внешней границе вычислительного домена:

$$\phi = b(x - x_c).$$

Здесь  $x_c$  — координата, в которой потенциал скорости вибрационного течения жидкости обращается в нуль и которая определяется условиями возбуждения колебаний в жидкости; в частности, при синхронных колебаниях стенок канала  $x_c$  соответствует центру канала.

Замена граничных условий является правомерной, если пренебрегать влиянием газовых пузырьков на вибрационное течение жидкости вблизи границ вычислительного домена. Но по результатам расчетов следует проверить приближенное выполнение вышеуказанного дополнительного условия путем сравнения максимального значения потенциала  $\phi$  в расчетной области с его средним значением. Первая величина должна быть намного больше второй. Для приведенных ниже результатов расчетов данное соотношение составляет несколько десятков.

Рассмотрим, как проявляется эффект сжимаемости газа для случая ансамбля из 36 пузырьков. Он продемонстрирован на рисунке 8 для циклической частоты вибраций 50000 Гц и трех вариантов скорости вибраций, м/с: 0 (без вибраций), 2, 4. Расстояние между пузырьками в ансамбле принималось равным 0,001 м, что составляло четыре диаметра пузырька.



**Рис. 8.** Область захвата около ансамбля пузырьков для случая без вибраций (а) и разной скорости вибраций, м/с: 2 (б) и 4 (в)

Из анализа рисунка можно сделать вывод, что внутри области, занимаемой ансамблем газовых пузырьков, эффект от вибраций также ослабляется, но не столь значительно, как в несжимаемом случае. Вибрации достаточно высокой интенсивности способны «проникнуть» внутрь ансамбля и тем самым увеличить область захвата осаждающихся твердых частиц около всплывающих в жидкости газовых пузырьков.

## 5. Заключение

Численно исследован захват твердых включений ансамблем всплывающих в жидкости под действием архимедовой силы газовых пузырьков. Рассмотрен эффект перпендикулярных к направлению вектора силы тяжести вибраций.

При рассмотрении задачи в рамках модели несжимаемой жидкости, что формально соответствует бесконечной частоте вибраций, становится заметным эффект «экранирования», когда увеличение сечения захвата в результате вибрационного воздействия происходит лишь для «внешних» пузырьков ансамбля. Это связано с граничным условием равенства нулю потенциала скорости вибрационного течения жидкости на поверхности несжимаемого газового пузырька. Выявлено, что такой эффект как «экранирование» слабо зависит от расстояния между пузырьками.



Влияние вибраций высокой, но конечной частоты, при которых проявляется сжимаемость газа в пузырьке, внутри области, занимаемой ансамблем газовых пузырьков также ослабляется, но не столь значительно, как в несжимаемом случае. Вибрации достаточно высокой интенсивности способны «проникнуть» вглубь объема жидкости и тем самым увеличить область захвата твердых частиц.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-41-590974-р\_урал\_а).

## Литература

1. Bjerknes C.A. *Hydrodynamische Fernkräfte: fünf Abhandlungen über die Bewegung kugelförmiger Körper in einer inkompressiblen Flüssigkeit (1863-1880)*. Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1915. 61 S.
2. Алексеев В.Н. Силы, действующие на твердые частицы со стороны пузырька в звуковых полях // Акустический журнал. 1991. Т. 37. № 4. С. 597-604.
3. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid // *J. Fluid Mech.* 2016. Vol. 807. P. 205-220. [DOI](#)
4. Заичкин Е.В., Любимов Д.В. Поведение взвешенного в жидкости тела в поле торсионных вибраций // Вибрационные эффекты в гидродинамике / Под ред. Д.В. Любимова. Пермь: Изд-е Перм. ун-та, 2001. Вып. 2. С. 97-109.
5. Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А. Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 216 с.
6. Bozzano G., Dente M. Single bubble and drop motion modeling // *AIDIC Conference Series*. 2009. Vol. 9. P. 53-60. [DOI](#)
7. Dai Z., Fornasiero D., Ralston J. Particle-bubble collision models – a review // *Adv. Colloid Interface Sci.* 2000. Vol. 85. P. 231-256. [DOI](#)
8. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. Surfactant effect on interaction of rising bubble and particle in a liquid subjected to vibrations // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2017. Vol. 879. 012022. [DOI](#)

## References

1. Bjerknes C.A. *Hydrodynamische Fernkräfte: fünf Abhandlungen über die Bewegung kugelförmiger Körper in einer inkompressiblen Flüssigkeit (1863-1880)* [Hydrodynamic remote forces: Five essays on the motion of spherical bodies in an incompressible fluid (1863-1880)]. Leipzig: Wilhelm Engelmann, 1915. 61 p.
2. Alekseyev V.N. Sily, deystvuyushchiye na tverdyye chastitsy so storony puzyr'ka v zvukovykh polyakh [Forces of action of a bubble on solid particles in sound fields]. *Akusticheskiy zhurnal – Acoustic journal*, 1991, vol. 37, no. 4, pp. 597-604.
3. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. The interaction of a rising bubble and a particle in oscillating fluid. *J. Fluid Mech.*, 2016, vol. 807, pp. 205-220. [DOI](#)
4. Zaichkin E.V., Lyubimov D.V. Povedeniye vzveshennogo v zhidkosti tela v pole torsionnykh vibratsiy [The behavior of a body suspended in a fluid in a field of torsional vibrations] // *Vibratsionnyye efekty v gidrodinamike* [Vibration effects in hydrodynamics], ed. by D.V. Lyubimov. Perm, Perm State university, 2001. Iss. 2. Pp. 97-109.
5. Lyubimov D.V., Lyubimova T.P., Cherepanov A.A. *Dinamika poverkhnostey razdela v vibratsionnykh polyakh* [Dynamics of interfaces in vibrational fields]. Moscow, FIZMATLIT, 2003. 216 p.
6. Bozzano G., Dente M. Single bubble and drop motion modeling. *AIDIC Conference Series*, 2009, vol. 9, pp. 53-60. [DOI](#)
7. Dai Z., Fornasiero D., Ralston J. Particle-bubble collision models – a review. *Adv. Colloid Interface Sci.*, 2000, vol. 85, pp. 231-256. [DOI](#)
8. Lyubimov D.V., Klimenko L.S., Lyubimova T.P., Filippov L.O. Surfactant effect on interaction of rising bubble and particle in a liquid subjected to vibrations. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2017, vol. 879, 012022. [DOI](#)

Поступила в редакцию 11.02.2019; после доработки 14.03.2019; принята к опубликованию 16.03.2019

---

### Сведения об авторах

Коновалов Владимир Владиславович, кфмн, нс, Институт механики сплошных сред УрО РАН (ИМСС УрО РАН), 614013, Пермь, ул. Академика Королева, д. 1; e-mail: konovalov@icmm.ru

Любимова Татьяна Петровна, дфмн, проф., зав.лаб., ИМСС УрО РАН; e-mail: lyubimovat@mail.ru